EML 2013

Exercice 1

Partie I - Calcul d'une intégrale dépendant d'un paramètre.

On considère l'application $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ définie, pour tout $t \in [0, 1]$, par :

$$g : t \mapsto \begin{cases} -t \ln t & \text{si } 0 < t \leqslant 1 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que g est continue sur $[0, 1]$.

Démonstration.
La fonction g est continue :

- sur $]0, 1]$ en tant que produit de fonctions continues sur $]0, 1]$.
- en 0. En effet :
  - d'une part, par croissances comparées : $\lim\limits_{t \to 0^+} g(t) = 0$.
  - d'autre part : $g(0) = 0$.

  Ainsi : $\lim\limits_{t \to 0^+} g(t) = g(0)$.

$$\boxed{\text{La fonction } g \text{ est donc continue sur } [0, 1].}$$

□

2. À l'aide d'une intégration par parties, calculer, pour tout $x \in]0, 1[$, l'intégrale $\displaystyle\int_x^1 g(t)\, dt$.

Démonstration.
Soit $x \in]0, 1[$. On procède par intégration par parties (IPP).

$$\left| \begin{array}{rclcrcl} u(t) & = & \ln(t) & & u'(t) & = & \dfrac{1}{t} \\ v'(t) & = & -t & & v(t) & = & -\dfrac{t^2}{2} \end{array} \right.$$

Cette IPP est valide car les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[x, 1]$.
On obtient alors :

$$\begin{aligned} \int_x^1 g(t)\, dt &= \left[-\frac{t^2}{2} \ln(t) \right]_x^1 - \int_x^1 \left(-\frac{t^{\cancel{2}}}{2} \right) \frac{1}{\cancel{t}}\, dt \\ &= \cancel{-\frac{1}{2} \ln(1)} + \frac{x^2}{2} \ln(x) + \frac{1}{2} \int_x^1 t\, dt \\ &= \frac{x^2}{2} \ln(x) + \frac{1}{2} \left[\frac{t^2}{2} \right]_x^1 \\ &= \frac{x^2}{2} \ln(x) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{x^2}{2} \right) = \frac{1}{4} + \frac{x^2}{2} \ln(x) - \frac{x^2}{4} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in]0, 1[, \ \int_x^1 g(t)\, dt = \frac{1}{4} + \frac{x^2}{2} \ln(x) - \frac{x^2}{4}.}$$

Commentaire

On rappelle qu'une intégration par parties s'effectue toujours sur un **segment**. Ici, l'intégrale d'intérêt est $\displaystyle\int_0^1 g(t)\ dt$ qui est impropre en 0. L'énoncé détaille donc la démonstration de sa convergence et son calcul en 2 étapes (classiques) :

1) calcul de l'intégrale sur le **segment** $[x, 1]$,

2) passage à la limite quand x tend vers 0.

□

3. En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 g(t)\ dt$ converge et que :

$$\int_0^1 g(t)\ dt = \frac{1}{4}.$$

Démonstration.
D'après la question précédente, pour tout $x \in]0, 1[$:

$$\int_x^1 g(t)\ dt \ = \ \frac{1}{4} + \frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{x^2}{4}$$

Or :

- par croissances comparées : $\displaystyle\lim_{x\to 0} x^2 \ln(x) = 0$,
- de plus : $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{4} = 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi l'intégrale } \int_0^1 g(t)\ dt \text{ converge et : } \int_0^1 g(t)\ dt = \frac{1}{4}.}$$

□

Partie II - Exemple de densité.

On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie, pour tout $t \in \mathbb{R}$ par :

$$f : t \mapsto \begin{cases} -t\ln(t) + t^{\frac{1}{3}} & \text{si } 0 < t < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

4. Montrer que f est continue sur $]-\infty, 1[$ et sur $]1, +\infty[$.
Est-ce que f est continue en 1 ?

Démonstration.
La fonction f est continue :

- sur $]-\infty, 0[$, en tant que fonction constante.
- en 0. En effet :
  - $\displaystyle\lim_{t\to 0^-} f(t) = f(0) = 0$ (par définition de f)
  - $\displaystyle\lim_{t\to 0^+} f(t) = 0$, car $\displaystyle\lim_{t\to 0^+} g(t) = 0$ et $\displaystyle\lim_{t\to 0} t^{\frac{1}{3}} = 0$ (car $\dfrac{1}{3} > 0$)

  Ainsi : $\displaystyle\lim_{t\to 0^-} f(t) = f(0) = \lim_{t\to 0^+} f(t)$.

× sur $]0,1[$ car elle est la somme $f = g + h$ où :
- g est continue sur $]0,1[$ d'après ***1.***,
- $h : t \mapsto t^{\frac{1}{3}}$ est continue sur $]0,1[$, en tant que fonction élévation à la puissance $\dfrac{1}{3}$.

× sur $]1,+\infty[$ en tant que fonction constante.

$$\boxed{\text{Finalement, la fonction } f \text{ est continue sur }]-\infty,1[\text{ et sur }]1,+\infty[.}$$

Commentaire

- Rappelons que la fonction $h : t \mapsto t^{\frac{1}{3}}$ n'est pas une fonction polynomiale ($\dfrac{1}{3} \notin \mathbb{N}$).
- Détaillons la justification de la continuité de cette fonction.
La fonction $h : t \mapsto t^{\frac{1}{3}} = \mathrm{e}^{\frac{1}{3}\ln(t)}$ est continue sur $]0,1[$ car elle est la composée $h = h_2 \circ h_1$ où :
  × $h_1 : t \mapsto \dfrac{1}{3}\ln(t)$ est :
    - continue sur $]0,1[$,
    - telle que : $h_1(]0,1[) \subset \mathbb{R}$.

  × $h_2 : t \mapsto \mathrm{e}^t$ est continue sur $\mathbb{R}$.

De plus :

× d'une part : $\lim\limits_{t \to 1^-} f(t) = \cancel{-1\ln(1)} + 1^{\frac{1}{3}} = 1$.

× d'autre part : $\lim\limits_{t \to 1^+} f(t) = f(1) = 0$.

Ainsi : $\lim\limits_{t \to 1^-} f(t) \neq \lim\limits_{t \to 1^+} f(t)$.

$$\boxed{\text{On en déduit que la fonction } f \text{ n'est pas continue en } 1.}$$

□

5. Établir que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt$ converge et que : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt = 1$.

Démonstration.

- Tout d'abord, comme f est nulle en dehors de $]0,1[$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt \;=\; \int_0^1 f(t)\, dt$$

- De plus, la fonction f est continue par morceaux sur le **segment** $[0,1]$.
L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(t)\, dt$ est donc bien définie.

$$\boxed{\text{On en déduit que l'intégrale } \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt \text{ est convergente.}}$$

- Alors :

$$\begin{array}{rcll}
\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt & = & \displaystyle\int_0^1 \big(-t\ln(t) + t^{1/3}\big)\ dt & \\
& = & \displaystyle\int_0^1 g(t)\ dt + \int_0^1 t^{1/3}\ dt & \textit{(par linéarité de l'espérance)} \\
& = & \dfrac{1}{4} + \left[\dfrac{1}{\frac{1}{3}+1}\ t^{\frac{1}{3}+1} \right]_0^1 & \textit{(d'après la question 3.)} \\
& = & \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{\frac{4}{3}}\ (1^{\frac{4}{3}} - \cancel{0^{\frac{4}{3}}}) & \\
& = & \dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4} &
\end{array}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt = 1.}$$

□

6. Montrer que f est une densité.

Démonstration.

- Tout d'abord, d'après ***6.***, la fonction f est continue sur $]-\infty, 1[$ et sur $]1, +\infty[$.

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est donc continue sur } \mathbb{R} \text{ sauf éventuellement en un nombre fini de points.}}$$

- Soit $t \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent :
  - × si $t \in\ ]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[$, alors : $f(t) = 0 \geqslant 0$.
  - × si $t \in\ ]0, 1[$, alors :

$$\begin{array}{lcl}
 & t < 1 & \\
\text{donc} & \ln(t) < 0 & \textit{(par stricte croissance de } \ln \textit{ sur }]0,+\infty[\textit{)} \\
\text{d'où} & -t\ \ln(t) > 0 & \textit{(car } -t < 0\textit{)} \\
\text{ainsi} & -t\ \ln(t) + t^{\frac{1}{3}} > t^{\frac{1}{3}} > 0 &
\end{array}$$

  On en déduit : $f(t) > 0$.

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall t \in \mathbb{R},\ f(t) \geqslant 0.}$$

- Il reste à démontrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt$ converge et vaut 1.
  C'est le résultat de la question précédente.

$$\boxed{\text{On en déduit que } f \text{ est une densité.}}$$

□

7. a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,1[$ et calculer $f'(t)$ et $f''(t)$ pour tout $t \in]0,1[$.

Démonstration.

- La fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,1[$ en tant que somme de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,1[$.
- Soit $t \in]0,1[$.

$$\begin{aligned} f'(t) &= -\ln(t) - t \times \frac{1}{t} + \frac{1}{3}\, t^{\frac{1}{3}-1} &= -\ln(t) - 1\frac{1}{3}\, t^{-\frac{2}{3}} \\ f''(t) &= -\frac{1}{t} + \frac{1}{3} \times \left(-\frac{2}{3}\right)\, t^{-\frac{2}{3}-1} &= -\frac{1}{t} - \frac{2}{9}\, t^{-\frac{5}{3}} \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall t \in]0,1[,\ f'(t) = -\ln(t) - 1 + \frac{1}{3}\,\frac{1}{t^{\frac{2}{3}}} \quad \text{et} \quad f''(t) = -\frac{1}{t} - \frac{2}{9}\,\frac{1}{t^{\frac{5}{3}}}}$$

□

b) En déduire que l'équation $f'(t) = 0$, d'inconnue $t \in]0,1[$, admet une solution et une seule, notée α, et montrer : $\dfrac{1}{\mathrm{e}} < \alpha < 1$.

Démonstration.

- La fonction f' est :
  - × continue sur $]0,1[$, car f est de classe $\mathcal{C}^2$ (donc $\mathcal{C}^1$) sur $]0,1[$,
  - × strictement décroissante sur $]0,1[$, car :

$$\forall t \in]0,1[,\ f''(t) = -\frac{1}{t} - \frac{2}{9}\, t^{-\frac{5}{3}} < 0$$

Ainsi, f' réalise une bijection de $]0,1[$ sur $f'(]0,1[)$ avec :

$$f'(]0,1[) = \left]\lim_{t\to 1} f'(t), \lim_{t\to 0} f'(t)\right[= \left]-\frac{2}{3}, +\infty\right[$$

Or $0 \in \left]-\dfrac{2}{3}, +\infty\right[$.

$$\boxed{\text{L'équation } f'(t) = 0 \text{ admet une unique solution sur }]0,1[\text{ notée } \alpha.}$$

- On sait déjà : $\alpha < 1$.
  Remarquons ensuite :
  - × $f'\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right) = -\ln\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right) - 1 + \dfrac{1}{3}\,\dfrac{1}{\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^{\frac{2}{3}}} = \cancel{1} - \cancel{1} + \dfrac{1}{3}\,\mathrm{e}^{\frac{2}{3}} > 0$
  - × $f'(\alpha) = 0$

  On a donc : $f'(\alpha) < f'\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$.
- D'après le théorème de la bijection, $(f')^{-1} :]-\frac{2}{3}, +\infty[\to]0,1[$ est strictement décroissante sur $]-\frac{2}{3}, +\infty[$. En appliquant $(f')^{-1}$ de part et d'autre de l'inégalité précédente :

$$\begin{array}{ccc} (f')^{-1}\big(f'(\alpha)\big) & > & (f')^{-1}\left(f'\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)\right) \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ \alpha & > & \dfrac{1}{\mathrm{e}} \end{array}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \frac{1}{\mathrm{e}} < \alpha < 1.}$$

□

c) Écrire un programme en **Scilab** qui calcule et affiche une valeur approchée de α à 10^{-3} près, mettant en oeuvre l'algorithme de dichotomie.

Démonstration.
Commençons par rappeler le cadre de la recherche par dichotomie.

> *Calcul approché d'un zéro d'une fonction par dichotomie*
>
> **Données** :
>
> × une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
>
> × un intervalle de recherche $[a, b]$,
>
> × une précision de recherche ε.
>
> **Résultat** : une valeur approchée à ε près d'un zéro (sur l'intervalle $[a, b]$) de la fonction f.
>
> Autrement dit, une valeur approchée (à ε près) d'un réel $x \in [a, b]$ tel que : $f(x) = 0$.

- La dichotomie est une méthode itérative dont le principe, comme son nom l'indique, est de découper à chaque itération l'intervalle de recherche en deux nouveaux intervalles. L'intervalle de recherche est découpé en son milieu. On obtient deux nouveaux intervalles :

  × un intervalle dans lequel on sait que l'on va trouver un zéro de f.
  Cet intervalle est conservé pour l'itération suivante.

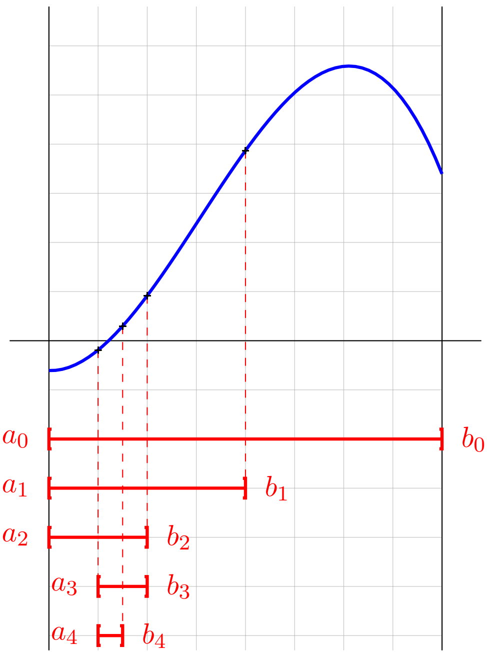
  × un intervalle dans lequel ne se trouve pas forcément un zéro de f.
  Cet intervalle n'est pas conservé dans la suite de l'algorithme.

  La largeur de l'intervalle de recherche est ainsi divisée par 2 à chaque itération.
  On itère jusqu'à obtenir un intervalle I contenant un zéro de f et de largeur plus faible que ε.
  Les points de cet intervalle I sont tous de bonnes approximations du zéro contenu dans I.

- C'est le **théorème des valeurs intermédiaires** qui permet de choisir l'intervalle qu'il faut garder à chaque étape. Rappelons son énoncé et précisons maintenant l'algorithme :

> **Théorème des Valeurs Intermédiaires**
>
> Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue sur l'**intervalle** $[a, b]$.
>
> Supposons : $f(a)\ f(b) \leqslant 0$.
>
> Alors il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$.

> **Calcul des suites** (a_m), (b_m), (c_m)
>
> Cas $f(a) \leqslant 0$ et $f(b) \geqslant 0$
>
> - Initialement, $a_0 = a$, $b_0 = b$
> - À chaque tour de boucle (tant que $b_m - a_m > \varepsilon$) :
>
>   × $c_m = \dfrac{a_m + b_m}{2}$ (point milieu de $[a_m, b_m]$)
>
>   × si $f(c_m) < 0$ alors :
>   - $a_{m+1} = c_m$
>   - $b_{m+1} = b_m$
>
>   × si $f(c_m) \geqslant 0$ alors :
>   - $a_{m+1} = a_m$
>   - $b_{m+1} = c_m$



- On construit ainsi une suite $\big([a_m, b_m]\big)_{m\in\mathbb{N}}$ de segments emboîtés :
  × contenant tous un zéro de f,
  × dont la largeur est divisée par deux d'un rang au suivant.
- Il reste enfin à adapter cet algorithme à l'énoncé.
  Commençons par coder la fonction f'.

```
function y = g(x)
    y = -log(x) - 1 + (1/3) ⋆ x ^ (-2/3)
endfunction
```

On cherche ensuite une valeur de x telle que : $f'(x) = 0$.
On se fixe initialement l'intervalle de recherche $]\frac{1}{e}, 1[$ de sorte que l'équation $f'(x) = 0$ ne possède qu'une solution, à savoir la valeur α qu'on cherche à approcher. D'un point de vue informatique, on crée des variables `a` et `b` destinées à contenir les valeurs succesives de a_m et b_m. Ces variables sont initialisées respectivement à `1 / %e` et 1.

```
a = 1 / %e
b = 1
```

On procède alors de manière itérative, tant que l'intervalle de recherche n'est pas de largeur plus faible que la précision 10^{-3} escomptée.

```
while (b-a) > 10 ^ (-3)
```

On commence par définir le point milieu du segment de recherche.

```
    c = (a+b) / 2
```

Puis on teste si $f'(\texttt{c}) < 0$, c'est-à-dire si $\texttt{g}(\texttt{c}) < 0$.
Si c'est le cas, la recherche s'effectue dans le demi-segment de droite.

```
    if g(c) < 0 then
        a = c
```

Sinon, elle s'effectue dans le demi-segment de gauche.

```
    else
        b = c
    end
```

En sortie de boucle, on est assuré que le segment de recherche, mis à jour au fur et à mesure de l'algorithme, est de largeur plus faible que 10^{-3} et contient un zéro de f'. Tout point de cet intervalle est donc une valeur approchée à 10^{-3} près de ce zéro.
On peut alors choisir de renvoyer le point le plus à gauche du segment.

```
disp(a)
```

On peut tout aussi bien choisir le point le plus à droite :

```
disp(b)
```

Ou encore le point milieu :

```
disp((a + b) / 2)
```

Ce dernier choix présente un avantage : tout point (dont le zéro recherché) du dernier intervalle de recherche se situe à une distance d'au plus $\dfrac{10^{-3}}{2}$ de ce point milieu.

On obtient ainsi une valeur approchée à $\dfrac{10^{-3}}{2}$ du zéro recherché.

Commentaire

- On peut se demander combien de tours de boucle sont nécessaires pour obtenir le résultat. Pour le déterminer, il suffit d'avoir en tête les éléments suivants :
  × l'intervalle de recherche initial $]\frac{1}{\mathrm{e}}, 1[$ est de largeur $\ell = 1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}} = \dfrac{\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}}$.
  × la largeur de l'intervalle de recherche est divisée par 2 à chaque tour de boucle.
  À la fin du $m^{\text{ème}}$ tour de boucle, l'intervalle de recherche est donc de largeur $\dfrac{\ell}{2^m}$.
  × l'algorithme s'arrête lorsque l'intervalle devient de largeur plus faible que 10^{-3}.

  On obtient le nombre d'itérations nécessaires en procédant par équivalence :

$$\begin{aligned}
\frac{\ell}{2^m} \leqslant 10^{-3} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{2^m}{\ell} \geqslant 10^3 && \textit{(par stricte croissance de la fonction inverse sur } \mathbb{R}_+^*\textit{)} \\
&\Leftrightarrow \quad 2^m \geqslant \ell \times 10^3 && \textit{(car } \ell > 0\textit{)} \\
&\Leftrightarrow \quad m \ \ln(2) \geqslant \ln(\ell) + 3 \ \ln(10) && \textit{(par stricte croissance de la fonction } \ln \textit{ sur } \mathbb{R}_+^*\textit{)}
\end{aligned}$$

  Ainsi : $\left\lceil \dfrac{\ln(\ell) + 3 \ \ln(10)}{\ln(2)} \right\rceil$ tours de boucle suffisent.

- Afin de permettre une bonne compréhension des mécanismes en jeu, on a détaillé avec beaucoup de précision la réponse à cette question. Cependant, compléter correctement le programme **Scilab** (on place ci-dessous le programme obtenu) démontre la bonne compréhension de l'algorithme demandé et permet d'obtenir tous les points alloués à cette question.

- On obtient le programme complet suivant.

```
a = 1 / %e
b = 1
while (b-a) > 10 ^ (-3)
    c = (a+b) / 2
    if g(c) < 0 then
        a = c
    else
        b = c
    end
end
disp((a + b) / 2)
```

□

Partie III - Calcul d'une fonction de répartition.

On admet qu'il existe une variable aléatoire réelle X ayant f pour densité (l'application f a été définie au début de la **Partie II**) et on note F la fonction de répartition de X.

8. Calculer, pour tout $x \in\,]0,1[$, l'intégrale $\displaystyle\int_x^1 f(t)\ dt$.
(On pourra utiliser le résultat obtenu à la question ***I-2.***)

Démonstration.
Soit $x \in\,]0,1[$.

- La fonction f est continue par morceaux sur le **segment** $[x,1]$.
  Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_x^1 f(t)\ dt$ est bien définie.
- De plus :

$$\begin{aligned}
\int_x^1 f(t)\ dt &= \int_x^1 \left(g(t)+t^{\frac{1}{3}}\right)\ dt \\
&= \int_x^1 g(t)\ dt + \int_x^1 t^{\frac{1}{3}}\ dt && \textit{(par linéarité de l'intégrale)} \\
&= \frac{1}{4}+\frac{x^2}{2}\ \ln(x) - \frac{x^2}{4} + \left[\ \frac{3}{4}\ t^{\frac{4}{3}}\ \right]_x^1 && \textit{(d'après la question \textbf{2.})} \\
&= \frac{1}{4}+\frac{x^2}{2}\ \ln(x) - \frac{x^2}{4} + \frac{3}{4} - \frac{3}{4}\ x^{\frac{4}{3}}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in\,]0,1[,\ \int_x^1 f(t)\ dt = 1 + \frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{x^2}{4} - \frac{3}{4}\ x^{\frac{4}{3}}}$$

□

9. Calculer $F(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Trois cas se présentent :

× si $x \in\,]-\infty,0]$, alors :

$$\begin{aligned}
F(x) &= \mathbb{P}([X \leqslant x]) \\
&= \int_{-\infty}^x f(t)\ dt \\
&= 0 && \textit{(car } f \textit{ est nulle en dehors de }]0,1[\textit{)}
\end{aligned}$$

× si $x \in\,]0,1[$, alors :

$$\begin{aligned}
F(x) &= \mathbb{P}([X \leqslant x]) \\
&= 1-\mathbb{P}([X > x]) \\
&= 1-\int_x^{+\infty} f(t)\ dt \\
&= 1-\int_x^1 f(t)\ dt && \textit{(car } f \textit{ est nulle en dehors de }]0,1[\textit{)} \\
&= \cancel{1} - \left(\cancel{1}+\frac{x^2}{2}\ln(x)-\frac{x^2}{4}-\frac{3}{4}\ x^{\frac{4}{3}}\right) && \textit{(d'après la question \textbf{8.})}
\end{aligned}$$

× si $x \in [1, +\infty[$, alors :

$$\begin{array}{rcll} F(x) & = & \mathbb{P}([X \leqslant x]) & \\ & = & \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt & \\ & = & \displaystyle\cancel{\int_{-\infty}^{0} f(t)\, dt} + \int_{0}^{1} f(t)\, dt + \cancel{\int_{1}^{x} f(t)\, dt} & \textit{(car } f \textit{ est nulle en dehors de }]0,1[\textit{)} \\ & = & 1 & \textit{(d'après la question 5.)} \end{array}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } F : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \,]-\infty, 0] \\ -\dfrac{x^2}{2}\ln(x) + \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{3}{4}\, x^{\frac{4}{3}} & \text{si } x \in \,]0,1[\\ 1 & \text{si } x \in [1, +\infty[\end{cases}.}$$

Commentaire

- Dans notre sujet, aucune information n'est donnée sur $X(\Omega)$.
  On peut cependant se permettre de **considérer** : $X(\Omega) \subset \,]0,1[$. En agissant ainsi, on **décrète** que l'on choisira pour la suite de prendre pour $X(\Omega)$ l'intervalle I sur lequel f est strictement positive, c'est-à-dire l'intervalle :

  $$I = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) > 0\}$$

  Pour plus d'information sur cette manière de procéder, on pourra se reporter à la remarque associée à la question ***4.a)*** du Problème (page 28).
- L'avantage de **décréter** : $X(\Omega) \subseteq \,]0,1[$, est la facilité de rédaction que cela produit pour la détermination de la fonction de répartition F_X (notamment pour traiter les cas où $x \notin X(\Omega)$). Plus précisément, on peut alors rédiger comme suit :
  × si $x \in \,]-\infty, 0]$, alors : $[X \leqslant x] = \varnothing$ (car $X(\Omega) \subset \,]0,1[$). Ainsi :

  $$F(x) \;=\; \mathbb{P}([X \leqslant x]) \;=\; \mathbb{P}(\varnothing) \;=\; 0$$

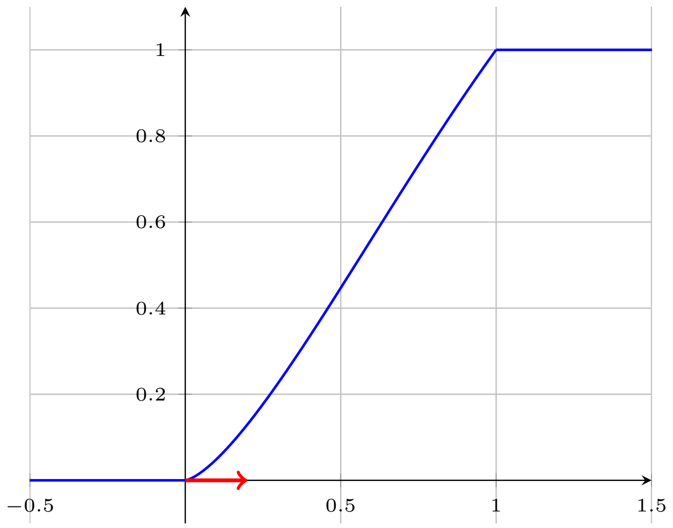
  × si $x \in [1, +\infty[$, alors : $[X \leqslant x] = \Omega$ (car $X(\Omega) \subset \,]0,1[$). Ainsi :

  $$F(x) \;=\; \mathbb{P}([X \leqslant x]) \;=\; \mathbb{P}(\Omega) \;=\; 1$$

  Le cas $x \in \,]0,1[$ se traite de la manière que précédemment. □

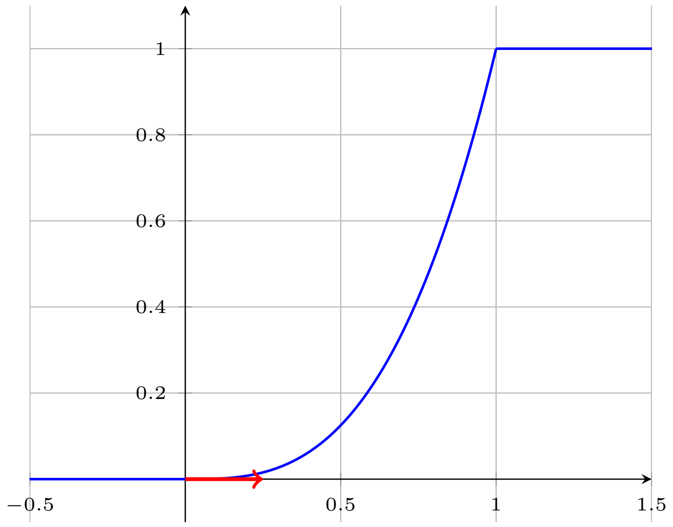
10. Tracer l'allure de la courbe représentative de F.

Démonstration.



Commentaire

Sur le graphe précédent, la demi-tangente à l'origine ne semble pas être correcte.
En effet, comme son étymologie (le verbe latin « tangere ») l'indique, une tangente doit **toucher** la courbe, ce qui ne paraît pas être le cas ici.
Cela est simplement dû à l'échelle de la figure. Sur une copie, il faut bien évidemment accentuer les tangentes à une courbe. C'est l'allure de la courbe qui importe (plus que son exactitude). On s'attend alors plutôt, sur une copie, à la représentation suivante :



□

Exercice 2 - (à reprendre, énoncé bidouillé)

On note $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R})$.

1. a) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer :

$$A - \lambda I_4 \text{ non inversible} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda \in \{-2, -1, 1, 2\}$$

Démonstration.
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}(A - \lambda I_4) &= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}\right) \\
&\overset{L_1 \leftrightarrow L_4}{=} \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -\lambda \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ -\lambda & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\right) \\
&\overset{L_4 \leftarrow 2L_4 + \lambda L_1}{=} \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -\lambda \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4-\lambda^2 \end{pmatrix}\right) \\
&\overset{L_2 \leftrightarrow L_3}{=} \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -\lambda \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4-\lambda^2 \end{pmatrix}\right) \\
&\overset{L_3 \leftarrow L_3 + \lambda L_2}{=} \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -\lambda \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4-\lambda^2 \end{pmatrix}\right)
\end{aligned}$$

La réduite obtenue est triangulaire supérieure.
Elle est donc non inversible si et seulement si l'un de ses coefficients diagonaux est nul.
On en déduit :

$$\begin{aligned}
A - \lambda I_3 \text{ non inversible} &\Leftrightarrow 1 - \lambda^2 = 0 \ \texttt{OU} \ 4 - \lambda^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow (1-\lambda)(1+\lambda) = 0 \ \texttt{OU} \ (2-\lambda)(2+\lambda) = 0 \\
&\Leftrightarrow \lambda = 1 \ \texttt{OU} \ \lambda = -1 \ \texttt{OU} \ \lambda = 2 \ \texttt{OU} \ \lambda = -2 \\
&\Leftrightarrow \lambda \in \{-2, -1, 1, 2\}
\end{aligned}$$

$$\boxed{A - \lambda I_4 \text{ non inversible} \Leftrightarrow \lambda \in \{-2, -1, 1, 2\}}$$

□

b) On définit les ensembles suivants :

$$\begin{array}{rcl} E_{-2}(A) & = & \{X \in \mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R}) \mid AX = -2X\} \\ E_{-1}(A) & = & \{X \in \mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R}) \mid AX = -X\} \\ E_{1}(A) & = & \{X \in \mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R}) \mid AX = X\} \\ E_{2}(A) & = & \{X \in \mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R}) \mid AX = 2X\} \end{array}$$

Montrer que ce sont des espaces vectoriels et déterminer une base de chacun d'entre eux. En déduire leurs dimensions.

Démonstration.

- Déterminons $E_{-2}(A)$. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{array}{rcl} X \in E_{-2}(A) & \Longleftrightarrow & AX = -2X \\ & \Longleftrightarrow & (A + 2\,I_4)\,X = 0_{\mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})} \\ & \Longleftrightarrow & \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} 2x & & & & & + & 2t & = & 0 \\ & & 2y & + & z & & & = & 0 \\ & & y & + & 2z & & & = & 0 \\ 2x & & & & & + & 2t & = & 0 \end{array} \right. \\ & \overset{L_1 \leftarrow \frac{1}{2} L_1}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} x & & & & & + & t & = & 0 \\ & & 2y & + & z & & & = & 0 \\ & & y & + & 2z & & & = & 0 \end{array} \right. \\ & \overset{L_3 \leftarrow 2L_3 - L_2}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} x & & & & & + & t & = & 0 \\ & & 2y & + & z & & & = & 0 \\ & & & & 3z & & & = & 0 \end{array} \right. \\ & \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & & & & & = & -t \\ & & 2y & + & z & = & 0 \\ & & & & 3z & = & 0 \end{array} \right. \\ & \overset{L_2 \leftarrow 3L_2 - L_3}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & & & & & = & -t \\ & & 6y & & & = & 0 \\ & & & & 3z & = & 0 \end{array} \right. \\ & \overset{\substack{L_2 \leftarrow \frac{1}{6} L_2 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{3} L_3}}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & & & & & = & -t \\ & & y & & & = & 0 \\ & & & & z & = & 0 \end{array} \right. \end{array}$$

On en déduit :

$$\begin{array}{rcl} E_{-2}(A) & = & \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R}) \mid AX = -2X \right\} \\ & = & \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \mid x = -t \text{ et } y = 0 \text{ et } z = 0 \right\} \\ & = & \left\{ \begin{pmatrix} -t \\ 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} \ = \ \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} \ = \ \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } E_{-2}(A) \text{ est un espace vectoriel.}}$$

Enfin, la famille $\mathcal{F}_1 = \left(\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$:

- $\times$ engendre $E_{-2}(A)$,
- $\times$ est une famille libre de $\mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})$, car elle est constituée uniquement d'un vecteur non nul.

$$\boxed{\text{La famille } \mathcal{F}_1 \text{ est donc une base de } E_{-2}(A) \text{ et } \dim\big(E_{-2}(A)\big) = \mathrm{Card}\,(\mathcal{F}_1) = 1.}$$

- Déterminons $E_{-1}(A)$. Soit $X = \begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{array}{rcl}
X \in E_{-1}(A) & \iff & AX = -X \\
& \iff & (A+I_4)\,X = 0_{\mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})} \\
& \iff & \begin{pmatrix}1&0&0&2\\0&1&1&0\\0&1&1&0\\2&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix} \\
& \iff & \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x & & & & & + & 2t & = & 0 \\ & & y & + & z & & & = & 0 \\ & & y & + & z & & & = & 0 \\ 2x & & & & & + & t & = & 0 \end{array}\right. \\
& \iff & \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x & & & & & + & 2t & = & 0 \\ & & y & + & z & & & = & 0 \\ 2x & & & & & + & t & = & 0 \end{array}\right. \\
& \underset{L_3 \leftarrow L_3 - 2\,L_1}{\iff} & \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x & & & & & + & 2t & = & 0 \\ & & y & + & z & & & = & 0 \\ & & & & & - & 3t & = & 0 \end{array}\right. \\
& \iff & \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & & & & 2t & = & 0 \\ & & y & & & = & -z \\ & & & & -3t & = & 0 \end{array}\right. \underset{L_1 \leftarrow 3L_1 + 2\,L_3}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 3x & & & & & = & 0 \\ & & y & & & = & -z \\ & & & & -3t & = & 0 \end{array}\right.
\end{array}$$

On en déduit :

$$\begin{array}{rcl}
E_{-1}(A) & = & \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R}) \mid AX = -X\right\} \\
& = & \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} \mid x = 0 \text{ et } y = -z \text{ et } t = 0\right\} \\
& = & \left\{\begin{pmatrix}0\\-z\\z\\0\end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R}\right\} \;=\; \left\{z \cdot \begin{pmatrix}0\\-1\\1\\0\end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R}\right\} \;=\; \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\0\end{pmatrix}\right)
\end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } E_{-1}(A) \text{ est un espace vectoriel.}}$$

Enfin la famille $\mathcal{F}_2 = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$:

× engendre $E_{-1}(A)$,

× est une famille libre de $\mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})$, car elle est constituée uniquement d'un vecteur non nul.

$$\boxed{\text{La famille } \mathcal{F}_2 \text{ est donc une base de } E_{-1}(A) \text{ et } \dim\big(E_{-1}(A)\big) = \mathrm{Card}\,(\mathcal{F}_2) = 1.}$$

- Déterminons $E_1(A)$. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{array}{rcl}
X \in E_1(A) & \Longleftrightarrow & AX = X \\
& \Longleftrightarrow & (A - I_4)\, X = 0_{\mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})} \\
& \Longleftrightarrow & \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} -x & & & & & + & 2t & = & 0 \\ & - & y & + & z & & & = & 0 \\ & & y & - & z & & & = & 0 \\ 2x & & & & & - & t & = & 0 \end{array} \right. \\
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} -x & & & & & + & 2t & = & 0 \\ & & y & - & z & & & = & 0 \\ 2x & & & & & - & t & = & 0 \end{array} \right. \\
& \underset{L_3 \leftarrow L_3 + 2\,L_1}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} -x & & & & & + & 2t & = & 0 \\ & & y & - & z & & & = & 0 \\ & & & & & & 3t & = & 0 \end{array} \right. \\
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -x & & & + & 2t & = & 0 \\ & & y & & & = & z \\ & & & & 3t & = & 0 \end{array} \right. \quad \underset{L_1 \leftarrow 3\,L_1 - 2\,L_3}{\Longleftrightarrow} \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -3x & & & & & = & 0 \\ & & y & & & = & z \\ & & & & 3t & = & 0 \end{array} \right.
\end{array}$$

On en déduit :

$$\begin{array}{rcl}
E_1(A) & = & \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R}) \mid AX = X \right\} \\
& = & \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \mid x = 0 \text{ et } y = z \text{ et } t = 0 \right\} \\
& = & \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ z \\ z \\ 0 \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\} \ = \ \left\{ z \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\} \ = \ \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)
\end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } E_1(A) \text{ est un espace vectoriel.}}$$

Enfin, la famille $\mathcal{F}_3 = \left(\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}\right)$:

- × engendre $E_1(A)$,
- × est une famille libre de $\mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})$, car elle est constituée uniquement d'un vecteur non nul.

$$\boxed{\text{La famille } \mathcal{F}_3 \text{ est donc une base de } E_1(A) \text{ et } \dim\big(E_1(A)\big) = \mathrm{Card}\,(\mathcal{F}_3) = 1.}$$

- Déterminons $E_2(A)$. Soit $X = \begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{array}{rcl}
X \in E_2(A) & \Longleftrightarrow & AX = 2X \\
& \Longleftrightarrow & (A - 2\,I_4)\,X = 0_{\mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})} \\
& \Longleftrightarrow & \begin{pmatrix}-2 & 0 & 0 & 2\\ 0 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 0\\ 2 & 0 & 0 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix} \\
& \Longleftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} -2x & & & & & + & 2t & = & 0 \\ & - & 2y & + & z & & & = & 0 \\ & & y & - & 2z & & & = & 0 \\ 2x & & & & & - & 2t & = & 0 \end{array}\right. \\
& \underset{L_1 \leftarrow -\frac{1}{2} L_1}{\Longleftrightarrow} & \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x & & & & & - & t & = & 0 \\ & - & 2y & + & z & & & = & 0 \\ & & y & - & 2z & & & = & 0 \end{array}\right. \\
& \underset{L_3 \leftarrow 2 L_3 + L_2}{\Longleftrightarrow} & \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x & & & & & - & t & = & 0 \\ & & 2y & + & z & & & = & 0 \\ & & & - & 3z & & & = & 0 \end{array}\right. \\
& \Longleftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & & & & & = & t \\ & & 2y & + & z & = & 0 \\ & & & - & 3z & = & 0 \end{array}\right. \underset{L_2 \leftarrow 3 L_2 + L_3}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcl} x & & & = & t \\ & 6y & & = & 0 \\ & & -3z & = & 0 \end{array}\right.
\end{array}$$

On en déduit :

$$\begin{array}{rcl}
E_2(A) & = & \{\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R}) \mid AX = 2X\} \\
& = & \{\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} \mid x = t \text{ et } y = 0 \text{ et } z = 0\} \\
& = & \{\begin{pmatrix}t\\0\\0\\t\end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R}\} \;=\; \{t \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R}\} \;=\; \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right)
\end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } E_2(A) \text{ est un espace vectoriel.}}$$

Enfin, la famille $\mathcal{F}_4 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$:

× engendre $E_2(A)$,

× est une famille libre de $\mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})$, car elle est constituée uniquement d'un vecteur non nul.

$$\boxed{\text{La famille } \mathcal{F}_4 \text{ est donc une base de } E_2(A) \text{ et } \dim\big(E_2(A)\big) \ = \ \mathrm{Card}\,(\mathcal{F}_4) \ = \ 1.}$$

Commentaire

- Il faut s'habituer à déterminer les ensembles $E_\lambda(A)$ par lecture de la matrice $A - \lambda\, I$.
- Illustrons la méthode avec la matrice de l'exercice et $\lambda = -2$.

  On cherche les vecteurs $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ de $E_{-2}(A)$ c'est-à-dire les vecteurs tels que : $(A + 2\, I_4)\, X = 0_{\mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})}$. Or :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \quad &= \quad x \cdot C_1 + y \cdot C_2 + z \cdot C_3 + t \cdot C_4 \\ &= \quad x \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

  Pour obtenir le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ l'aide de cette combinaison linéaire, on doit forcément choisir $y = 0$. En effet, si y est non nul, le coefficient en $2^{\text{ème}}$ position est non nul et doit être compensé par le choix $z = -2y$ mais dans ce cas, le coefficient créé en $3^{\text{ème}}$ position est non nul. On doit alors choisir $z = 0$ sinon les coefficients en $2^{\text{ème}}$ et $3^{\text{ème}}$ positions sont non nuls. La combinaison linéaire restante ne contient plus que les vecteurs C_1 et C_4 qui sont égaux. Cette combinaison linéaire est nulle si : $x = -t$. En prenant par exemple $t = 1$, on obtient :

$$E_{-2}(A) \ = \ \mathrm{Vect} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

- On peut procéder de même pour $E_{-1}(A)$, $E_1(A)$ et $E_2(A)$.

□

2. Montrer que la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et déterminer P^{-1}.

Démonstration.
On applique l'algorithme du pivot de Gauss.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue l'opération $\{ \; L_4 \leftarrow L_4 + L_1$. On obtient alors :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue l'opération $\{ \; L_3 \leftarrow L_3 + L_2$. On obtient alors :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

La réduite obtenue est triangulaire supérieure et ses coefficients diagonaux sont tous non nuls.
Donc P est inversible.
On effectue l'opération $\{ \; L_1 \leftarrow 2\, L_1 - L_4$. On obtient alors :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue l'opération $\{ \; L_2 \leftarrow 2\, L_2 - L_3$. On obtient alors :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue les opérations $\left\{ \begin{array}{l} L_1 \leftarrow \frac{1}{2}\, L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{2}\, L_2 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{2}\, L_3 \\ L_4 \leftarrow \frac{1}{2}\, L_4 \end{array} \right.$ On obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right.$$

$$\boxed{\text{On en conclut que } P \text{ et inversible et } P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$

$\square$

3. Montrer : $A = PDP^{-1}$, où D est une matrice à définir.

Démonstration.
Il s'agit ici de calculer $D = P^{-1}AP$.

- Tout d'abord :

$$AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- Ensuite :

$$P^{-1}AP = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } A = PDP^{-1} \text{ avec } D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.}$$

□

On appelle commutant de A, et on note C_A, l'ensemble des matrices M de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ telles que :

$$AM = MA$$

On appelle commutant de D, et on note C_D, l'ensemble des matrices N de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ telles que :

$$DN = ND$$

4. Montrer que C_A est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$.

Démonstration.
Démontrons que C_A est un sev de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$.

(i) $C_A \subseteq \mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ par définition.

(ii) $C_A \neq \varnothing$. En effet, la matrice nulle $0_{\mathscr{M}_4(\mathbb{R})}$ est élément de C_A puisque :

$$A \times 0_{\mathscr{M}_4(\mathbb{R})} = 0_{\mathscr{M}_4(\mathbb{R})} = 0_{\mathscr{M}_4(\mathbb{R})} \times A$$

(iii) Démontrons enfin que C_A est stable par combinaisons linéaires.

Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et soit $(M, N) \in {C_A}^2$.

- Comme $M \in C_A$, M est une matrice de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ qui vérifie : $AM = MA$.
- Comme $N \in C_A$, N est une matrice de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ qui vérifie : $AN = NA$.

Démontrons alors que $\lambda \cdot M + \mu \cdot N$ est un élément de C_A.

$$\begin{aligned} A\big(\lambda \cdot M + \mu \cdot N\big) &= \lambda \cdot AM + \mu \cdot AN \\ &= \lambda \cdot MA + \mu \cdot NA && \textit{(car } M \in C_A \textit{ et } N \in C_A\textit{)} \\ &= \big(\lambda \cdot M + \mu \cdot N\big)\, A \end{aligned}$$

Et ainsi $\lambda \cdot M + \mu \cdot N \in C_A$.

$$\boxed{C_A \text{ est bien un sous-espace vectoriel de } \mathscr{M}_4(\mathbb{R}).}$$

□

5. Soit $M \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R})$. On note $N = P^{-1}MP$. Montrer :

$$M \in C_A \Leftrightarrow N \in C_D$$

Démonstration.

$$\begin{array}{rcll}
M \in C_A & \Leftrightarrow & AM = MA & \\
& \Leftrightarrow & APNP^{-1} = PNP^{-1}A & \textit{(comme } N = P^{-1}MP \\ & & & \textit{alors } M = PNP^{-1}\textit{)} \\
& \Leftrightarrow & P^{-1}APNP^{-1} = P^{-1}PNP^{-1}A & \textit{(en multipliant} \\ & & & \textit{à gauche par } P^{-1}\textit{)} \\
& \Leftrightarrow & P^{-1}APNP^{-1} = NP^{-1}A & \\
& \Leftrightarrow & P^{-1}APNP^{-1}P = NP^{-1}AP & \textit{(en multipliant} \\ & & & \textit{à droite par } P\textit{)} \\
& \Leftrightarrow & P^{-1}APN = NP^{-1}AP & \\
& \Leftrightarrow & DN = ND & \\
& \Leftrightarrow & N \in C_D &
\end{array}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } M \in C_A \Leftrightarrow N \in C_D.}$$

□

6. Déterminer C_D, en utilisant les coefficients des matrices.

Démonstration.

Soit $N = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_5 & x_6 & x_7 & x_8 \\ x_9 & x_{10} & x_{11} & x_{12} \\ x_{13} & x_{14} & x_{15} & x_{16} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R})$.

Avec cette notation :

$$\begin{array}{rcl}
N \in C_D & \Leftrightarrow & DN = ND \\
& \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_5 & x_6 & x_7 & x_8 \\ x_9 & x_{10} & x_{11} & x_{12} \\ x_{13} & x_{14} & x_{15} & x_{16} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_5 & x_6 & x_7 & x_8 \\ x_9 & x_{10} & x_{11} & x_{12} \\ x_{13} & x_{14} & x_{15} & x_{16} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\
& \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} -2x_1 & -2x_2 & -2x_3 & -2x_4 \\ -x_5 & -x_6 & -x_7 & -x_8 \\ x_9 & x_{10} & x_{11} & x_{12} \\ 2x_{13} & 2x_{14} & 2x_{15} & 2x_{16} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_1 & -x_2 & x_3 & 2x_4 \\ -2x_5 & -x_6 & x_7 & 2x_8 \\ -2x_9 & -x_{10} & x_{11} & 2x_{12} \\ -2x_{13} & -x_{14} & x_{15} & 2x_{16} \end{pmatrix} \\
& \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} -2x_1 = -2x_1 \\ -2x_2 = -x_2 \\ -2x_3 = x_3 \\ -2x_4 = 2x_4 \\ -x_5 = -2x_5 \\ -x_6 = -x_6 \\ -x_7 = x_7 \\ -x_8 = 2x_8 \end{array} \right. \quad \texttt{ET} \quad \left\{ \begin{array}{l} x_9 = -2x_9 \\ x_{10} = -x_{10} \\ x_{11} = x_{11} \\ x_{12} = 2x_{12} \\ 2x_{13} = -2x_{13} \\ 2x_{14} = -x_{14} \\ 2x_{15} = x_{15} \\ 2x_{16} = 2x_{16} \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} x_2 = x_3 = x_4 = 0 \\ x_5 = x_7 = x_8 = 0 \\ x_9 = x_{10} = x_{12} = 0 \\ x_{13} = x_{14} = x_{15} = 0 \end{array} \right.
\end{array}$$

On en déduit :

$$\begin{array}{rcl} C_D & = & \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_6 & x_3 & x_4 \\ x_5 & x_6 & x_7 & x_8 \\ x_9 & x_{10} & x_{11} & x_{12} \\ x_{13} & x_{14} & x_{15} & x_{16} \end{pmatrix} \mid \left\{ \begin{array}{l} x_2 = x_3 = x_4 = 0 \\ x_5 = x_7 = x_8 = 0 \\ x_9 = x_{10} = x_{12} = 0 \\ x_{13} = x_{14} = x_{15} = 0 \end{array} \right. \right\} \\ & = & \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_{16} \end{pmatrix} \mid (x_1, x_6, x_{11}, x_{16}) \in \mathbb{R}^4 \right\} \end{array}$$

$$\boxed{\text{Le commutant de } D \text{ est constitué de l'ensemble des matrices diagonales.}}$$

Commentaire

- L'énoncé suggère d'utiliser les « coefficients des matrices ». L'idée est donc de considérer une matrice $N \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ quelconque et de comprendre comment l'appartenance de N à C_D contraint les coefficients de N.
- En regardant de plus près le calcul, on s'aperçoit que :
  - × multiplier à gauche par une matrice diagonale permet d'agir sur les lignes (la ligne i est multipliée par $D_{i,i}$),
  - × multiplier à droite par une matrice diagonale permet d'agir sur les colonnes (la colonne j est multipliée par $D_{j,j}$).

  Les coefficients diagonaux de D étant différents, les seuls coefficients qui se retrouvent multipliés par le même nombre sont les coefficients diagonaux.
- Formalisons l'idée décrite dans le point précédent.
  On considère une matrice $N \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R})$. Pour tout $(i,j) \in [\![1,4]\!]^2$:

$$\begin{array}{rcccll} (DN)_{i,j} & = & \sum\limits_{k=1}^{4} D_{i,k} N_{k,j} & = & D_{i,i} N_{i,j} & \textit{(car } D_{i,k} = 0 \textit{ si } k \neq i\textit{)} \\ (ND)_{i,j} & = & \sum\limits_{k=1}^{4} N_{i,k} D_{k,j} & = & N_{i,j} D_{j,j} & \textit{(car } D_{k,j} = 0 \textit{ si } k \neq j\textit{)} \end{array}$$

  Ainsi :

$$\begin{array}{rcll} (DN)_{i,j} = (ND)_{i,j} & \Leftrightarrow & D_{i,i} N_{i,j} = N_{i,j} D_{j,j} & \\ & \Leftrightarrow & \big(D_{i,i} - D_{j,j}\big)\ N_{i,j} = 0 & \\ & \Leftrightarrow & D_{i,i} = D_{j,j} \ \texttt{OU} \ N_{i,j} = 0 & \\ & \Leftrightarrow & i = j \ \texttt{OU} \ N_{i,j} = 0 & \textit{(car les coefficients diagonaux de la matrice } D \textit{ sont tous différents)} \end{array}$$

  Ainsi les matrices N qui commutent avec D vérifient toutes :

$$\forall (i,j) \in [\![1,4]\!]^2,\ i \neq j \ \Rightarrow \ N_{i,j} = 0$$

- Cette démonstration est bien plus élégante que la précédente. Elle permet de démontrer que si D est une matrice carrée (d'ordre n quelconque) diagonale dont les coefficients diagonaux sont tous différents alors D ne commute qu'avec les matrices diagonales.

□

7. En déduire :

$$C_A = \{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & d & c & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \mid (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \}$$

Démonstration.
Soit $M \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R})$.

- Tout d'abord :

$$\begin{array}{cll} & M \in C_A & \\ \Leftrightarrow & N = P^{-1}MP \in C_D & \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{5.}}\textit{)} \\ \Leftrightarrow & \exists (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4,\ N = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{pmatrix} & \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{6.}}\textit{)} \\ \Leftrightarrow & \exists (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4,\ P^{-1}MP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{pmatrix} & \\ \Leftrightarrow & \exists (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4,\ M = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{pmatrix} P^{-1} & \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } C_A = \{ P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{pmatrix} P^{-1} \mid (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4 \}.}$$

- On s'intéresse alors à la forme des matrices de cet ensemble.
  Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4$.

$$\begin{aligned} P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{pmatrix} P^{-1} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \lambda_4 \\ 0 & \lambda_2 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & -\lambda_2 & \lambda_3 & 0 \\ -\lambda_1 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_4 & 0 & 0 & -\lambda_1 + \lambda_4 \\ 0 & \lambda_2 + \lambda_3 & -\lambda_2 + \lambda_3 & 0 \\ 0 & -\lambda_2 + \lambda_3 & \lambda_2 + \lambda_3 & 0 \\ -\lambda_1 + \lambda_4 & 0 & 0 & \lambda_1 + \lambda_4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

  En notant $a = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_4)$, $b = \frac{1}{2}(-\lambda_1 + \lambda_4)$, $c = \frac{1}{2}(\lambda_2 + \lambda_3)$ et $d = \frac{1}{2}(-\lambda_2 + \lambda_3)$, on obtient une matrice de la forme annoncée.

$$\boxed{\text{Cela démontre : } C_A \subseteq \{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & d & c & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \mid (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \}.}$$

- Il reste alors à démontrer l'inclusion réciproque.
  Soit $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$.
  × Tout d'abord :
  $$A \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & d & c & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & d & c & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2b & 0 & 0 & 2a \\ 0 & d & c & 0 \\ 0 & c & d & 0 \\ 2a & 0 & 0 & 2b \end{pmatrix}$$
  × Ensuite :
  $$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & d & c & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & d & c & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2b & 0 & 0 & 2a \\ 0 & d & c & 0 \\ 0 & c & d & 0 \\ 2a & 0 & 0 & 2b \end{pmatrix}$$
  On en déduit : $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & d & c & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \in C_A$.

$$\boxed{\text{Et ainsi : } C_A \supseteq \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & d & c & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \mid (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \right\}.}$$

Commentaire

- La première partie de la question illustre un procédé fréquent en mathématiques. On cherche à obtenir l'ensemble C_A, le commutant de A. Pour cela, on pourrait procéder comme en question ***6.***, à savoir partir d'une matrice M quelconque et de voir comment l'appartenance de M à C_A (*i.e.* le fait que la propriété $AM = MA$ soit vérifié) contraint les coefficients de M. S'il est possible de procéder ainsi, cette manière de faire peut se révéler longue et fastidieuse pour certaines matrices A. Il est par contre simple de déterminer C_D lorsque D est une matrice diagonale. On cherche donc initialement une matrice diagonale D permettant, en quelque sorte, de représenter la matrice A. Plus précisément, on trouve une matrice D telle que $A = PDP^{-1}$. Puis on détermine C_D. Enfin, on détermine C_A à l'aide de C_D en écrivant :
  $$C_A = \left\{ P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{pmatrix} P^{-1} \mid (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4 \right\}$$
- La deuxième partie de la résolution n'a que peu d'intérêt. Il aurait été préférable que l'énoncé demande de démontrer que C_A s'écrit :
  $$C_A = \left\{ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a+d & 0 & 0 & -a+d \\ 0 & b+c & -b+c & 0 \\ 0 & -b+c & b+c & 0 \\ -a+d & 0 & 0 & a+d \end{pmatrix} \mid (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \right\}$$
  L'énoncé choisit une autre forme matricielle. Cela correspond à écrire l'espace vectoriel C_A à l'aide d'une autre base. On reviendra sur ce point à la question suivante.

□

8. Déterminer une base de C_A et la dimension de C_A.

Démonstration.

- D'après la question précédente :

$$\begin{aligned} C_A &= \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & d & c & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \mid (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \right\} \\ &= \left\{ a \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + d \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \right\} \\ &= \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

- La famille $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$:

  × engendre C_A,

  × est une famille libre de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$. Démontrons ce point.
  Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4$.
  Supposons : $\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_4 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_{\mathscr{M}_4(\mathbb{R})}$.
  Autrement dit :
  $$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \lambda_2 \\ 0 & \lambda_3 & \lambda_4 & 0 \\ 0 & \lambda_4 & \lambda_3 & 0 \\ \lambda_2 & 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
  Par identification, cette égalité est équivalente à : $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$.

$$\boxed{\text{La famille } \mathcal{F} \text{ est donc une base de } C_A \text{ et } \dim\big(C_A\big) = \text{Card}(\mathcal{F}) = 4.}$$

Commentaire

- Si l'on s'en tient à la première écriture de C_A de la question précédente, on obtient :
$$C_A = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$$
  Nommons $\mathcal{G}$ la famille génératrice de C_A correspondant à cette égalité.
  Il est simple de démontrer : $\text{Vect}(\mathcal{G}) = \text{Vect}(\mathcal{F})$ par des opérations sur les éléments de la famille $\mathcal{G}$ qui laissent inchangées l'espace vectoriel engendré. Par exemple, en ajoutant la deuxième matrice de $\mathcal{G}$ à la première, on obtien la première matrice de $\mathcal{F}$.
- Les familles $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont deux bases différentes de C_A. L'énoncé a privilégié la famille $\mathcal{F}$. Mais la famille $\mathcal{G}$ est celle qui apparaît naturellement dans la question ***7.*** □

Exercice 3

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
On considère une urne $\mathcal{U}$ contenant n boules numérotées de 1 à n et indiscernables au toucher.
On effectue une suite de tirages d'une boule avec remise de la boule dans l'urne $\mathcal{U}$.

Partie I

Soit k un entier supérieur ou égal à 1. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on note X_i la variable aléatoire égale au nombre d'obtentions de la boule numéro i au cours des k premiers tirages.

1. Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Donner la loi de X_i. Rappeler l'espérance et la variance de X_i.

Démonstration.

- L'expérience consiste en la succession de k épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre de succès $\frac{1}{n}$ (probabilité d'obtenir la boule numérotée i dans l'urne $\mathcal{U}$ de manière équiprobable parmi les n boules disponibles).
- La variable X_i correspond au nombre de succès obtenus lors de cette expérience.

$$\boxed{\text{Ainsi : } X_i \hookrightarrow \mathcal{B}\left(k, \frac{1}{n}\right).}$$

$$\boxed{\text{De plus : } \mathbb{E}(X_i) = k \times \frac{1}{n} = \frac{k}{n} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X_i) = k \times \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{k}{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right).}$$

□

2. Les variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont-elles indépendantes ?

Démonstration.
Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ tel que $i \neq j$.

- On commence par remarquer :
$$[X_i = k] \cap [X_j = k] = \varnothing$$
En effet, en k tirages, on ne peut pas obtenir à la fois k fois la boule numéro i et k fois la boule numéro j. On obtient donc :
$$\mathbb{P}([X_i = k] \cap [X_j = k]) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$$
- D'autre part, d'après la question ***1.***, on sait que :
$$\mathbb{P}([X_i = k]) = \mathbb{P}([X_j = k]) = \binom{k}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{k-k} = 1 \times \frac{1}{n^k} \times 1 = \frac{1}{n^k}$$
Donc :
$$\mathbb{P}([X_i = k])\,\mathbb{P}([X_j = k]) = \frac{1}{n^k} \times \frac{1}{n^k} = \frac{1}{n^{2k}} \neq 0$$

On obtient finalement :

$$\mathbb{P}([X_i = k] \cap [X_j = k]) \ \neq\ \mathbb{P}([X_i = k])\,\mathbb{P}([X_j = k])$$

$$\boxed{\text{Les variables aléatoires } X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n \text{ ne sont pas indépendantes.}}$$

Commentaire

- On cherche ici à démontrer que les v.a.r. $X_1, \ldots, X_n$ ne sont pas mutuellement indépendantes. Si elles l'étaient, alors toute paire de variables X_i, X_j (avec $i \neq j$) serait indépendante :

$$\begin{array}{c} X_1, \ldots, X_n \text{ mutuellement} \\ \text{indépendantes} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} X_1, \ldots, X_n \text{ indépendantes} \\ \text{deux à deux} \end{array}$$

- Ainsi, en démontrant que les v.a.r. $X_1, \ldots, X_n$ ne sont pas deux à deux indépendantes, on démontre qu'elles ne sont pas mutuellement indépendantes. On utilise en fait la contraposée de l'implication précédente :

$$\begin{array}{c} X_1, \ldots, X_n \texttt{ NON} \\ \text{indépendantes deux à deux} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} X_1, \ldots, X_n \texttt{ NON} \\ \text{mutuellement indépendantes} \end{array}$$

□

3. Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ tel que $i \neq j$.

a) Déterminer la loi de la variable $X_i + X_j$. Rappeler la variance de $X_i + X_j$.

Démonstration.

- L'expérience consiste en la succession de k épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre de succès $\frac{2}{n}$ (probabilité d'obtenir la boule numérotée i ou la boule numérotée j dans l'urne $\mathcal{U}$ de manière équiprobable parmi les n boules disponibles).
- La variable $X_i + X_j$ correspond au nombre de succès obtenus lors de cette expérience.

$$\boxed{\text{Ainsi : } X_i + X_j \hookrightarrow \mathcal{B}\left(k, \frac{2}{n}\right)}$$

$$\boxed{\text{De plus : } \mathbb{V}(X_i + X_j) = k \times \frac{2}{n}\left(1 - \frac{2}{n}\right) = \frac{2k}{n}\left(1 - \frac{2}{n}\right).}$$

□

b) En déduire la covariance du couple (X_i, X_j).

Démonstration.
D'après la formule de la variance d'une somme de variables aléatoires, on obtient :

$$\mathbb{V}(X_i + X_j) = \mathbb{V}(X_i) + 2\ \mathrm{Cov}(X_i, X_j) + \mathbb{V}(X_j)$$

Donc :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Cov}(X_i, X_j) & = & \frac{1}{2}\left(\mathbb{V}(X_i + X_j) - \mathbb{V}(X_i) - \mathbb{V}(X_j)\right) \\ & = & \frac{1}{\cancel{2}}\left(\frac{\cancel{2}\,k}{n}\left(1 - \frac{2}{n}\right) - \cancel{2}\,\frac{k}{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right) \quad \textit{(d'après \textbf{1.} et \textbf{3.a)})} \\ & = & \frac{k}{n}\left(\cancel{1} - \frac{2}{n} - \left(\cancel{1} - \frac{1}{n}\right)\right) \\ & = & \frac{k}{n} \times \left(-\frac{1}{n}\right) \;=\; -\frac{k}{n^2} \end{array}$$

$$\boxed{\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = -\frac{k}{n^2}}$$

□

Pour tout entier k supérieur ou égal à 1, on note Z_k la variable aléatoire égale au nombre de numéros distincts obtenus au cours des k premiers tirages et on note $\mathbb{E}(Z_k)$ l'espérance de Z_k.

Partie II

4. Déterminer la loi de la variable Z_1 et la loi de la variable Z_2.
En déduire $\mathbb{E}(Z_1)$ et $\mathbb{E}(Z_2)$.

Démonstration.

- Si $k = 1$, alors on effectue un unique tirage. On ne peut donc obtenir qu'un seul numéro (celui de la boule choisie à cet unique tirage). Ainsi :

$$\left\{ \begin{array}{l} Z_1(\Omega) = \{1\} \\ \mathbb{P}([Z_1 = 1]) = 1 \end{array} \right.$$

$$\boxed{\text{La v.a.r. } Z_1 \text{ suit la loi certaine égale à 1 et : } \mathbb{E}(Z_1) = 1.}$$

- Déterminons maintenant la loi de la variable Z_2.
  - × Tout d'abord : $Z_2(\Omega) = \{1, 2\}$.
    En effet, en $k = 2$ tirages, on peut :
    - soit obtenir deux fois la même boule, on observe alors 1 seul numéro.
    - soit obtenir deux boules différentes, on observe alors 2 numéros distincts.
  - × On déduit du premier item du point précédent :

$$[Z_2 = 1] = \bigcup_{i=1}^{n} [X_i = 2]$$

Les événements $[X_1 = 2]$, ..., $[X_n = 2]$ sont incompatibles. Ainsi :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([Z_2 = 1]) & = & \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{P}([X_i = 2]) & \\ & = & \sum\limits_{i=1}^{n} \binom{2}{2} \left(\dfrac{1}{n}\right)^2 \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{2-2} & \textit{(d'après } \textbf{\textit{1.}}\textit{)} \\ & = & \cancel{n} \, \dfrac{1}{n^{\cancel{2}}} \;=\; \dfrac{1}{n} & \end{array}$$

  - × La famille $([Z_2 = 1], [Z_2 = 2])$ est un système complet d'événements. D'où :

$$\mathbb{P}([Z_2 = 2]) \;=\; 1 - \mathbb{P}([Z_2 = 1]) \;=\; 1 - \frac{1}{n}$$

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{l} Z_2(\Omega) = \{1, 2\} \\ \mathbb{P}([Z_2 = 1]) = \dfrac{1}{n} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}([Z_2 = 2]) = 1 - \dfrac{1}{n} \end{array} \right.}$$

  - × La v.a.r. Z_2 admet une espérance, car c'est une v.a.r. finie. De plus :

$$\mathbb{E}(Z_2) \;=\; 1 \times \mathbb{P}([Z_2 = 1]) + 2 \times \mathbb{P}([Z_2 = 2]) \;=\; \frac{1}{n} + 2\left(1 - \frac{1}{n}\right) \;=\; 2 - \frac{1}{n}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(Z_2) = 2 - \frac{1}{n}}$$

□

5. Soit k un entier supérieur ou égal à 1.

a) Déterminer $\mathbb{P}([Z_k = 1])$ et déterminer $\mathbb{P}([Z_k = k])$.

Démonstration.

- L'événement $[Z_k = 1]$ est réalisé si et seulement si on a obtenu un seul numéro lors de k tirages. Autrement dit lorsqu'on a tiré la même boule lors des k tirages. Ainsi :

$$[Z_k = 1] \ = \ \bigcup_{i=1}^{n} \ [X_i = k]$$

Comme les événements $[X_1 = k]$, …, $[X_n = k]$ sont incompatibles, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([Z_k = 1]) &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}([X_i = k]) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \binom{k}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^{k} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{k-k} \qquad \textit{(d'après } \textbf{\textit{1.}}\textit{)} \\ &= n \, \frac{1}{n^k} \ = \ \frac{1}{n^{k-1}} \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}([Z_k = 1]) = \frac{1}{n^{k-1}}}$$

- Deux cas se présentent pour le calcul de $\mathbb{P}([Z_k = k])$:
  - si $k > n$, alors : $[Z_k = k] = \varnothing$.
    En effet, on ne peut obtenir strictement plus de n boules différentes lors de k tirages successifs dans une urne contenant n boules.

    $$\boxed{\text{Si } k > n \text{ alors : } \mathbb{P}([Z_k = k]) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0.}$$

  - si $k \leqslant n$.
    L'univers Ω est muni de la probabilité uniforme $\mathbb{P}$. On procède alors par dénombrement.

    L'univers Ω est l'ensemble des k-uplets d'éléments de $[\![1, n]\!]$. D'où : $\text{Card}(\Omega) = n^k$.

    Un k-tirage qui réalise l'événement $[Z_k = k]$ est un k-tirage lors duquel on a obtenu k boules distinctes. Un tel k-tirage est entièrement déterminé par :

    × le numéro de la première boule : n possibilités,

    × le numéro de la deuxième boule : $n - 1$ possibilités,

    × ···

    × le numéro de la $k^{\text{ème}}$ boule : $n - (k - 1)$ possibilités.

    Il y a donc en tout : $n \times (n-1) \times \cdots \times (n - (k-1)) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$ tels k-tirages.

$$\boxed{\text{On en conclut : } \mathbb{P}([Z_k = k]) = \frac{\text{Card}([Z_k = k])}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{\frac{n!}{(n-k)!}}{n^k} = \frac{n!}{(n-k)!} \, \frac{1}{n^k}.}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \mathbb{P}([Z_k = k]) = \begin{cases} 0 & \text{si } k > n \\ \dfrac{n!}{(n-k)!} \, \dfrac{1}{n^k} & \text{si } k \leqslant n \end{cases}.}$$

Commentaire

- La première étape de la question consiste à écrire $[Z_k = 1]$ comme une réunion d'événements plus simples. On ne raisonne sur les probabilités qu'après avoir effectué cette étape primordiale de décomposition de l'événement.
- On pouvait également mettre en place un dénombrement pour répondre à la première question. Détaillons cette rédaction.

  Un k-tirage qui réalise $[Z_k = 1]$ est un k-tirage lors duquel la même boule a toujours été tirée. Un tel k-tirage est entièrement déterminé par :

  × le numéro de la boule qui est toujours tirée : n possibilités.

  Ainsi, il y a n tels k-tirages.
  On en conclut que : $\mathbb{P}([Z_k = 1]) = \dfrac{\text{Card}([Z_k = k])}{\text{Card}(\Omega)} = \dfrac{n}{n^k} = \dfrac{1}{n^{k-1}}$.
- On peut aussi faire la deuxième démonstration à l'aide des termes du chapitre dénombrement. L'événement $[Z_k = k]$ est réalisé par tous les k-tirages lors desquels on a obtenu k numéros distincts. Un tel k-tirage est un k-uplet d'éléments distincts de $[\![1, n]\!]$.
  Autrement dit, un tel k-tirage est un k-arrangement de $[\![1, n]\!]$.
  Ainsi : $\text{Card}([Z_k = k]) = A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$.

□

b) Montrer, pour tout $\ell \in [\![1, n]\!]$: $\mathbb{P}([Z_{k+1} = \ell]) = \dfrac{\ell}{n}\, \mathbb{P}([Z_k = \ell]) + \dfrac{n - \ell + 1}{n}\, \mathbb{P}([Z_k = \ell - 1])$.

Démonstration.

- On remarque que $Z_k(\Omega) \subset [\![1, n]\!]$.
  En effet, en k tirages, on peut obtenir :

  × au minimum 1 seule boule distincte (on obtient la même boule aux k tirages),

  × au maximum n boules distinctes (on a obtenu toutes les boules de l'urne).
  Ce cas ne peut se produire que lorsque $k \geqslant n$.
- La famille $\Big([Z_k = i] \Big)_{i \in [\![1,n]\!]}$ est un système complet d'événements.
  Ainsi, d'après la formule des probabilités totales, pour tout $\ell \in [\![1, n]\!]$:

$$\mathbb{P}([Z_{k+1} = \ell]) \;=\; \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}([Z_k = i] \cap [Z_{k+1} = \ell])$$

- Soit $\ell \in [\![1, n]\!]$ et soit $i \in [\![1, n]\!]$. Étudions l'événement $[Z_k = i] \cap [Z_{k+1} = \ell]$.
  Cet événement est réalisé si et seulement si les événements $[Z_k = i]$ et $[Z_{k+1} = \ell]$ sont tous les deux réalisés. L'événement $[Z_k = i]$ est réalisé si et seulement si on a obtenu i numéros distincts lors des i tirages. Lorsqu'on procède à 1 tirage supplémentaire, deux cas se présentent :

  × soit on tire un numéro de boule déjà obtenu lors des k premiers tirages.
  Dans ce cas, au cours de ces $k+1$ premiers tirages, on a obtenu i numéros distincts.
  L'événement $[Z_{k+1} = i]$ est alors réalisé.

  × soit on tire un numéro non obtenu lors des k premiers tirages.
  Dans ce cas, au cours de ces $k+1$ premiers tirages, on a obtenu $i+1$ numéros distincts.
  L'événement $[Z_{k+1} = i + 1]$ est alors réalisé.

  Ainsi, l'événement $[Z_k = i] \cap [Z_{k+1} = \ell]$ n'est réalisé que si $i = \ell$ ou $i + 1 = \ell$.

$$\boxed{\text{Pour tout } i \neq \ell \text{ et } i \neq \ell - 1 : [Z_k = i] \cap [Z_{k+1} = \ell] = \varnothing.}$$

- Ainsi, pour tout $\ell \in [\![2, n]\!]$ (on écarte le cas $\ell = 2$ pour assurer que $\ell - 1 \geqslant 1$) :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{P}([Z_{k+1} = \ell]) & = & \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{P}([Z_k = i] \cap [Z_{k+1} = \ell]) & \\
 & = & \sum\limits_{i=\ell-1}^{\ell} \mathbb{P}([Z_k = i] \cap [Z_{k+1} = \ell]) & \\
 & = & \sum\limits_{i=\ell-1}^{\ell} \mathbb{P}([Z_k = i])\ \mathbb{P}_{[Z_k=i]}([Z_{k+1} = \ell]) & \textit{(avec } \mathbb{P}([Z_k = \ell - 1]) \neq 0 \\
 & & & \textit{et } \mathbb{P}([Z_k = \ell]) \neq 0\textit{)} \\
 & = & \mathbb{P}([Z_k = \ell - 1])\ \mathbb{P}_{[Z_k=\ell-1]}([Z_{k+1} = \ell]) + \mathbb{P}([Z_k = \ell])\ \mathbb{P}_{[Z_k=\ell]}([Z_{k+1} = \ell]) &
\end{array}$$

  Il reste alors à déterminer chacune de ces deux probabilités conditionnelles.

  × Si l'événement $[Z_k = \ell - 1]$ est réalisé, c'est qu'on a obtenu $\ell - 1$ boules distinctes au cours des k premiers tirages. Alors, l'événement $[Z_{k+1} = \ell]$ est réalisé si et seulement si on a pioché au $(k + 1)^{\text{ème}}$ tirage un numéro distinct des $\ell - 1$ numéros déjà obtenus lors les k tirages précédents. Il y a $n - (\ell - 1)$ tels numéros.

Chacune des n boules ayant la même probabilité d'être tirée, on obtient : $\mathbb{P}_{[Z_k=\ell-1]}([Z_{k+1} = \ell]) = \dfrac{n - \ell + 1}{n}$

  × Si l'événement $[Z_k = \ell]$ est réalisé, c'est qu'on a obtenu ℓ boules distinctes au cours des k premiers tirages. Alors l'événement $[Z_{k+1} = \ell]$ est réalisé si et seulement si on a pioché au $(k+1)^{\text{ème}}$ tirage l'une des ℓ numéros déjà obtenus lors des k tirages précédents. Il y a ℓ tels numéros.

Chacune des n boules ayant la même probabilité d'être tirée, on obtient : $\mathbb{P}_{[Z_k=\ell]}([Z_{k+1} = \ell]) = \dfrac{\ell}{n}$

- En combinant ces deux résultats, on obtient la fomule souhaitée.

Pour tout $\ell \in [\![2, n]\!]$, $\mathbb{P}([Z_{k+1} = \ell]) = \dfrac{\ell}{n}\ \mathbb{P}([Z_k = \ell]) + \dfrac{n - \ell + 1}{n}\ \mathbb{P}([Z_k = \ell - 1])$

- Il reste alors à vérifier que la formule reste vraie si $\ell = 1$.

  × D'une part, d'après la question ***5.a)*** :

$$\mathbb{P}([Z_{k+1} = 1]) \ = \ \frac{1}{n^k} \ = \ \frac{1}{n}\ \frac{1}{n^{k-1}} \ = \ \frac{1}{n}\ \mathbb{P}([Z_k = 1])$$

  × Enfin, comme $[Z_k = 0] = \varnothing$, on a : $\mathbb{P}([Z_k = 0]) = 0$. D'où :

$$\frac{1}{n}\ \mathbb{P}([Z_k = 1]) + \frac{n - 1 + 1}{n}\ \mathbb{P}([Z_k = 0]) \ = \ \frac{1}{n}\ \mathbb{P}([Z_k = 1])$$

Ainsi, la formule est aussi vérifiée pour $\ell = 1$.

□

c) En déduire : $\mathbb{E}(Z_{k+1}) = \dfrac{n-1}{n}\, \mathbb{E}(Z_k) + 1$.

Démonstration.

- D'après la question ***5.b)***, $Z_k(\Omega) \subset [\![1, n]\!]$, et $Z_{k+1}(\Omega) \subset [\![1, n]\!]$.
  Ainsi, Z_k et Z_{k+1} sont des v.a.r. finies. Elles admettent donc une espérance.
- Par définition de l'espérance, on a :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}(Z_{k+1}) \\
= \ & \sum_{\ell=1}^{n} \ell \ \mathbb{P}([Z_{k+1} = \ell]) \\
= \ & \sum_{\ell=1}^{n} \ell \left(\frac{\ell}{n}\, \mathbb{P}([Z_k = \ell]) + \frac{n-\ell+1}{n}\, \mathbb{P}([Z_k = \ell - 1]) \right) && \textit{(d'après } \textbf{\textit{5.b)}}\textit{)} \\
= \ & \sum_{\ell=1}^{n} \frac{\ell^2}{n}\, \mathbb{P}([Z_k = \ell]) + \sum_{\ell=1}^{n} \frac{\ell(n-\ell+1)}{n}\, \mathbb{P}([Z_k = \ell - 1]) \\
= \ & \sum_{\ell=1}^{n} \frac{\ell^2}{n}\, \mathbb{P}([Z_k = \ell]) + \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{(\ell+1)(n-(\ell+\cancel{1})+\cancel{1})}{n}\, \mathbb{P}([Z_k = \ell]) && \textit{(par décalage d'indice)} \\
= \ & \sum_{\ell=1}^{n} \frac{\ell^2}{n}\, \mathbb{P}([Z_k = \ell]) + \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{(\ell+1)(n-\ell)}{n}\, \mathbb{P}([Z_k = \ell]) \\
= \ & \sum_{\ell=1}^{n} \frac{\ell^2}{n}\, \mathbb{P}([Z_k = \ell]) + \sum_{\ell=1}^{n-1} \frac{n\ell - \ell^2 + n - \ell}{n}\, \mathbb{P}([Z_k = \ell]) && \textit{(car } [Z_k = 0] = \varnothing\textit{)} \\
= \ & \left(\sum_{\ell=1}^{n-1} \frac{\ell^2}{n}\, \mathbb{P}([Z_k = \ell]) + \frac{n^2}{n}\, \mathbb{P}([Z_k = n]) \right) + \sum_{\ell=1}^{n-1} \frac{(n-1)\ell - \ell^2 + n}{n}\, \mathbb{P}([Z_k = \ell]) \\
= \ & \frac{n^2}{n}\, \mathbb{P}([Z_k = n]) + \sum_{\ell=1}^{n-1} \frac{\cancel{\ell^2} + (n-1)\ \ell - \cancel{\ell^2} + n}{n}\, \mathbb{P}([Z_k = \ell]) \\
= \ & n\ \mathbb{P}([Z_k = n]) + \frac{n-1}{n} \sum_{\ell=1}^{n-1} \ell\ \mathbb{P}([Z_k = \ell]) + \sum_{\ell=1}^{n-1} \mathbb{P}([Z_k = \ell]) \\
= \ & \left((n-1)\ \mathbb{P}([Z_k = n]) + \frac{n-1}{n} \sum_{\ell=1}^{n-1} \ell\ \mathbb{P}([Z_k = \ell]) \right) + \left(\mathbb{P}([Z_k = n]) + \sum_{\ell=1}^{n-1} \mathbb{P}([Z_k = \ell]) \right) \\
= \ & \frac{n-1}{n} \sum_{\ell=1}^{n} \ell\ \mathbb{P}([Z_k = \ell]) + \sum_{\ell=1}^{n} \mathbb{P}([Z_k = \ell]) \ = \ \frac{n-1}{n}\, \mathbb{E}(Z_k) + 1
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que : } \mathbb{E}(Z_{k+1}) = \frac{n-1}{n}\, \mathbb{E}(Z_k) + 1}$$

□

6. a) Montrer que la suite $(v_k)_{k \geqslant 1}$ de terme général $v_k = \mathbb{E}(Z_k) - n$ est une suite géométrique.

Démonstration.
Soit $k \geqslant 1$. D'après la question ***5.c)***, on obtient :

$$v_{k+1} = \mathbb{E}(Z_{k+1}) - n = \frac{n-1}{n}\, \mathbb{E}(Z_k) + 1 - n = \frac{n-1}{n}\, \mathbb{E}(Z_k) - (n-1) = \frac{n-1}{n}\, (\mathbb{E}(Z_k) - n) = \frac{n-1}{n}\, v_k$$

$$\boxed{\text{La suite } (v_k)_{k \geqslant 1} \text{ est géométrique de raison } \frac{n-1}{n}.}$$

Commentaire

Cette question est l'occasion de faire un point sur la notion de variable muette.
Dans une expression mathématique, on dit qu'une variable est **muette** (on parle aussi de variable **liée**) si elle est portée par un quantificateur ou un symbole mathématique qui permet d'introduire la variable et son ensmble d'appartenance.

- Ainsi, dans l'expression « $(v_k)_{k \geqslant 1}$ », la variable k est muette (k parcourt $\mathbb{N}^*$). On peut la renommer sans que cela change l'objet considéré :

$$(v_i)_{i \geqslant 1} \qquad (v_\ell)_{\ell \geqslant 1} \qquad (v_m)_{m \geqslant 1}$$

- Par contre, dans l'expression $\dfrac{n-1}{n}$, la variable n n'est sous la portée d'aucun quantificateur ou symbole mathématique. L'objet $\dfrac{n-1}{n}$ dépend donc de ce n particulier. On dit que la variable n est **libre**.

Les deux objets ci-dessus (la suite $(v_k)_{k \geqslant 1}$ et sa raison, le réel $\dfrac{n-1}{n}$) :

- ne dépendent pas de la variable k (muette),
- dépendent de la variable n (libre).

□

b) En déduire, pour tout entier k supérieur ou égal à 1 : $\mathbb{E}(Z_k) = n \left(1 - \left(\dfrac{n-1}{n}\right)^k\right)$.

Démonstration.
Soit $k \geqslant 1$.

- D'après la question ***6.a)***, la suite (v_k) est géométrique de raison $\dfrac{n-1}{n}$, donc :

$$v_k = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1} v_1$$

Or $v_1 = \mathbb{E}(Z_1) - n = 1 - n = -(n-1)$ d'après la question ***4.*** D'où :

$$v_k = -(n-1) \left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1} = -(n-1) \frac{(n-1)^{k-1}}{n^{k-1}} = -\frac{(n-1)^k}{n^{k-1}} = -n \frac{(n-1)^k}{n^k} = -n \left(\frac{n-1}{n}\right)^k$$

- Par définition, $v_k = \mathbb{E}(Z_k) - n$, donc :

$$\mathbb{E}(Z_k) = v_k + n = -n \left(\frac{n-1}{n}\right)^k + n = n \left(1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^k\right)$$

$$\boxed{\forall k \geqslant 1,\ \mathbb{E}(Z_k) = n \left(1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^k\right)}$$

□

Partie III

On suppose maintenant que $n = 4$; ainsi l'urne $\mathcal{U}$ contient 4 boules numérotées de 1 à 4.
Soit k un entier supérieur ou égal à 4. On se propose de déterminer la loi de Z_k.

7. Rappeler la valeur de $\mathbb{P}([Z_k = 1])$. Déterminer $\mathbb{P}([Z_k \geqslant 5])$.

Démonstration.

$$\boxed{\text{D'après la question } \textbf{\textit{5.a)}}, \mathbb{P}([Z_k = 1]) = \frac{1}{4^{k-1}}.}$$

Par ailleurs, l'urne $\mathcal{U}$ ne contenant que 4 boules, on peut obtenir au maximum 4 numéros différentes en k tirages. Ainsi : $[Z_k \geqslant 5] = \varnothing$.

$$\boxed{\text{On en conclut que : } \mathbb{P}([Z_k \geqslant 5]) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0}$$

□

8. Montrer : $\mathbb{P}([Z_k = 2]) = 6\,\dfrac{2^k - 2}{4^k}$.

Démonstration.

- L'univers de cette expérience est l'ensemble des k-uplets de $[\![1,4]\!]$.
  Donc, en particulier, $\text{Card}(\Omega) = 4^k$.
- Un k-tirage qui réalise l'événement $[Z_k = 2]$ est entièrement déterminé par :
  - × le choix des 2 numéros distincts parmi les 4 de l'urne : $\dbinom{4}{2}$ possibilités,
  - × les positions possibles pour les boules portant le 1er numéro (sur les 2) :
    - s'il n'y a qu'une unique boule portant le 1er numéro sur les k tirages : $\dbinom{k}{1}$ possibilités,
    - s'il y a 2 boules portant le 1er numéro sur les k tirages : $\dbinom{k}{2}$ possibilités,
    - $\cdots$
    - s'il y a ℓ boules portant le 1er numéro sur les k tirages : $\dbinom{k}{\ell}$ possibilités,
    - $\cdots$
    - s'il y a $(k-1)$ boules portant le 1er numéro sur les k tirages : $\dbinom{k}{k-1}$ possibilités.

  On obtient donc :

$$\begin{aligned}
\text{Card}([Z_k = 2]) &= \binom{4}{2} \sum_{\ell=1}^{k-1} \binom{k}{\ell} \\
&= \binom{4}{2} \left(\left(\sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} \right) - \binom{k}{k} - \binom{0}{k} \right) \\
&= \binom{4}{2} \left(\left(\sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} 1^\ell\, 1^{k-\ell} \right) - 2 \right)
\end{aligned}$$

  Or, d'après la formule du binôme de Newton, on a :

$$\sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} 1^\ell\, 1^{k-\ell} = 2^k$$

  On obtient alors :

$$\text{Card}([Z_k = 2]) = \binom{4}{2} (2^k - 2) = 6\,(2^k - 2)$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \mathbb{P}([Z_k = 2]) = \frac{\text{Card}([Z_k = 2])}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{6\,(2^k - 2)}{4^k}}$$

Commentaire

- On pouvait alléger cette présentation : une fois les deux numéros choisis ($\binom{4}{2}$ possibilités), on peut affirmer qu'à chaque tirage, on a le choix entre l'une de ces deux boules. Ce qui conduit à penser qu'il y a $\binom{4}{2}\ 2^k$ k-tirages convenables.
- Attention : si l'on procède ainsi, on peut ne tirer que la boule portant le 1er numéro (resp. l'autre numéro). Il y a donc 2 k tirages à exclure. On retrouve bien les $\binom{4}{2}\ (2^k-2)$ k-tirages convenables.

□

9. On note, pour tout i de $[\![1,4]\!]$, A_i l'événement :
« la boule numéro i n'a pas été obtenue au cours des k premiers tirages ».

a) Montrer : $\mathbb{P}([Z_k \leqslant 3]) = 4\,\mathbb{P}(A_1) - 6\,\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) + 4\,\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$.

Démonstration.
L'événement $[Z_k \leqslant 3]$ est réalisé si et seulement si au moins l'une des 4 boules n'a pas été obtenue au cours des k premiers tirages. Donc :

$$[Z_k \leqslant 3] = A_1 \ \cup \ A_2 \ \cup \ A_3 \ \cup \ A_4$$

- D'après la formule du crible :

$$\begin{array}{rl} & \mathbb{P}([Z_k \leqslant 3]) \\ = & \mathbb{P}(A_1 \ \cup \ A_2 \ \cup \ A_3 \ \cup \ A_4) \\ = & \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3) + \mathbb{P}(A_4) \\ - & \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_3) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_4) - \mathbb{P}(A_2 \cap A_3) - \mathbb{P}(A_2 \cap A_4) - \mathbb{P}(A_3 \cap A_4) \\ + & \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_4) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_3 \cap A_4) + \mathbb{P}(A_2 \cap A_3 \cap A_4) \\ - & \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) \end{array}$$

- Les boules jouant un rôle similaire, la probabilité de ne pas en tirer une au cours de k tirages est la même, quelle que soit la boule considérée. Ainsi :

$$\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A_2) = \mathbb{P}(A_3) = \mathbb{P}(A_4)$$

  De même, la probabilité de ne pas en tirer deux au cours de k tirages est la même, quelle que soit les deux boules considérées. Ainsi :

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(A_1 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_1 \cap A_4) = \mathbb{P}(A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_2 \cap A_4) = \mathbb{P}(A_3 \cap A_4)$$

  Et, par le même raisonnement :

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_4) = \mathbb{P}(A_1 \cap A_3 \cap A_4) = \mathbb{P}(A_2 \cap A_3 \cap A_4)$$

- On en déduit que :

$$\mathbb{P}([Z_k \leqslant 3]) \ = \ 4\ \mathbb{P}(A_1) - 6\ \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) + 4\ \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4)$$

- Enfin, on remarque que : $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 = \varnothing$.
  En effet, il n'est pas possible, lors des k tirages, de ne tirer aucune des boules de l'urne. Ainsi :

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = 0$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \mathbb{P}([Z_k \leqslant 3]) = 4\,\mathbb{P}(A_1) - 6\,\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) + 4\,\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3)}$$

□

Commentaire

Dans le programme, il est précisé que la formule du crible ne doit être connu que jusqu'à l'ordre 3. Il faudrait donc, si on suit le programme à la lettre, adopter la rédaction suivante.

- D'après la formule du crible appliquée à A_1 et $A_2 \cup A_3 \cup A_4$, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([Z_k \leqslant 3]) &= \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2 \cup A_3 \cup A_4) - \mathbb{P}(A_1 \ \cap\ (A_2 \cup A_3 \cup A_4)) \\ &= \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2 \cup A_3 \cup A_4) - \mathbb{P}((A_1 \cap A_2) \ \cup\ (A_1 \cap A_3) \ \cup\ (A_1 \cap A_4))\end{aligned}$$

- D'après la formule du crible appliquée à A_2, A_3 et A_4, on obtient :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_2 \cup A_3 \cup A_4) &= \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3) + \mathbb{P}(A_4) \\ &\quad - \mathbb{P}(A_2 \cap A_3) - \mathbb{P}(A_2 \cap A_4) - \mathbb{P}(A_3 \cap A_4) \\ &\quad + \mathbb{P}(A_2 \cap A_3 \cap A_4) \\ &= 3\,\mathbb{P}(A_1) - 3\,\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \quad \textit{(car les boules sont indiscernables)}\end{aligned}$$

- D'après la formule du crible appliquée à $A_1 \cap A_2$, $A_1 \cap A_3$ et $A_1 \cap A_4$, on obtient :

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}((A_1 \cap A_2) \ \cup\ (A_1 \cap A_3) \ \cup\ (A_1 \cap A_4)) \\ =\ &\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_3) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_4) \\ &- \mathbb{P}((A_1 \cap A_2) \ \cap\ (A_1 \cap A_3)) - \mathbb{P}((A_1 \cap A_2) \ \cap\ (A_1 \cap A_4)) \\ &- \mathbb{P}((A_1 \cap A_3) \ \cap\ (A_1 \cap A_4)) \\ &+ \mathbb{P}((A_1 \cap A_2) \ \cap\ (A_1 \cap A_3) \ \cap\ (A_1 \cap A_4)) \\ =\ &\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_3) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_4) \\ &- \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_4) \\ &- \mathbb{P}(A_1 \cap A_3 \cap A_4) \\ &+ \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) \\ =\ &3\,\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) - 3\,\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) \quad \textit{(car les boules sont indiscernables)} \\ =\ &3\,\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) - 3\,\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \quad \textit{(car } \bigcap_{i=1}^{4} A_i = \varnothing\textit{)}\end{aligned}$$

- Finalement : $$\begin{aligned}\mathbb{P}([Z_k \leqslant 3]) &= \mathbb{P}(A_1) \\ &\quad + (3\,\mathbb{P}(A_1) - 3\,\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3)) \\ &\quad - (3\,\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) - 3\,\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3)) \\ &= 4\,\mathbb{P}(A_1) - 6\,\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) + 4\,\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3)\end{aligned}$$

b) Calculer $\mathbb{P}(A_1)$, $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2)$ et $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$.

Démonstration.

- On remarque : $A_1 = [X_1 = 0]$.
  D'après la question ***1.*** : $\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}([X_1 = 0]) = \binom{k}{0} \left(\frac{1}{4}\right)^0 \left(1 - \frac{1}{4}\right)^{k-0} = \left(\frac{3}{4}\right)^k$.

$$\boxed{\mathbb{P}(A_1) = \left(\frac{3}{4}\right)^k}$$

- On remarque que :

$$A_1 \cap A_2 = [X_1 = 0] \cap [X_2 = 0] = [X_1 + X_2 = 0]$$

D'après la question ***3.a)*** :

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}([X_1 + X_2 = 0]) = \binom{k}{0} \left(\frac{2}{4}\right)^0 \left(1 - \frac{2}{4}\right)^{k-0} = \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

$$\boxed{\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \left(\frac{1}{2}\right)^k}$$

- On remarque que :

$$A_1 \cap A_2 \cap A_3 = [X_4 = k]$$

En effet, ne piocher aucune des boules 1 à 3 au cours des k tirages, revient exactement à ne piocher que la boule numéro 4 au cours de ces k tirages.
D'après la question ***1.*** :

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}([X_4 = k]) = \binom{k}{k} \left(\frac{1}{4}\right)^k \left(1 - \frac{1}{4}\right)^{k-k} = \left(\frac{1}{4}\right)^k$$

$$\boxed{\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \left(\frac{1}{4}\right)^k}$$

□

c) En déduire : $\mathbb{P}([Z_k \leqslant 3])$, puis $\mathbb{P}([Z_k = 3])$ et $\mathbb{P}([Z_k = 4])$.

Démonstration.

- On calcule :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([Z_k \leqslant 3]) &= 4\,\mathbb{P}(A_1) - 6\,\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) + 4\,\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) && \textit{(d'après } \textbf{\textit{9.a)}}\textit{)} \\ &= 4\left(\frac{3}{4}\right)^k - 6\left(\frac{1}{2}\right)^k + 4\left(\frac{1}{4}\right)^k && \textit{(d'après } \textbf{\textit{9.b)}}\textit{)} \\ &= \frac{4 \times 3^k - 6 \times 2^k + 4}{4^k} \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}([Z_k \leqslant 3]) = \frac{4 \times 3^k - 6 \times 2^k + 4}{4^k}}$$

- On sait que :

$$[Z_k \leqslant 3] = [Z_k = 1] \cup [Z_k = 2] \cup [Z_k = 3]$$

Les événements $[Z_k = 1]$, $[Z_k = 2]$ et $[Z_k = 3]$ sont 2 à 2 incompatibles. Donc :

$$\mathbb{P}([Z_k \leqslant 3]) = \mathbb{P}([Z_k = 1]) + \mathbb{P}([Z_k = 2]) + \mathbb{P}([Z_k = 3])$$

On obtient donc :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([Z_k = 3]) &= \mathbb{P}([Z_k \leqslant 3]) - \mathbb{P}([Z_k = 1]) - \mathbb{P}([Z_k = 2]) \\ &= \frac{4 \times 3^k - 6 \times 2^k + 4}{4^k} - \frac{1}{4^{k-1}} - \frac{6\,(2^k - 2)}{4^k} && \textit{(d'après } \textbf{\textit{7.}} \textit{ et } \textbf{\textit{8.}}\textit{)} \\ &= \frac{4 \times 3^k - 6 \times 2^k + \cancel{4} - \cancel{4} - 6 \times 2^k + 12}{4^k} \\ &= \frac{4 \times 3^k - 12 \times 2^k + 12}{4^k} \end{aligned}$$

- On remarque que :
$$[Z_k = 4] = \overline{[Z_k \leqslant 3]}$$
On obtient donc :
$$\mathbb{P}([Z_k = 4]) = 1 - \mathbb{P}([Z_k \leqslant 3]) = 1 - \frac{4 \times 3^k - 6 \times 2^k + 4}{4^k} = \frac{4^k - 4 \times 3^k + 6 \times 2^k - 4}{4^k}$$
$$\boxed{\mathbb{P}([Z_k = 3]) = \frac{4 \times 3^k - 12 \times 2^k + 12}{4^k} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}([Z_k = 4]) = \frac{4^k - 4 \times 3^k + 6 \times 2^k - 4}{4^k}}$$
□