EML 2013

Exercice 1

Partie I - Calcul d'une intégrale dépendant d'un paramètre.

On considère l'application $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie, pour tout $t \in [0,1]$, par :

$$g : t \mapsto \begin{cases} -t\ln t & \text{si } 0 < t \leqslant 1 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que g est continue sur $[0,1]$.

2. À l'aide d'une intégration par parties, calculer, pour tout $x \in \,]0,1[$, l'intégrale $\displaystyle\int_x^1 g(t)\ dt$.

3. En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 g(t)\ dt$ converge et :

$$\int_0^1 g(t)\ dt \ = \ \frac{1}{4}$$

Partie II - Exemple de densité.

On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie, pour tout $t \in \mathbb{R}$ par :

$$f : t \mapsto \begin{cases} -t\ln(t) + t^{\frac{1}{3}} & \text{si } 0 < t < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

4. Montrer que f est continue sur $]-\infty,1[$ et sur $]1,+\infty[$.
Est-ce que f est continue en 1 ?

5. Établir que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt$ converge et : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt = 1$.

6. Montrer que f est une densité.

7. ***a)*** Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,1[$ et calculer $f'(t)$ et $f''(t)$ pour tout $t \in \,]0,1[$.

b) En déduire que l'équation $f'(t) = 0$, d'inconnue $t \in \,]0,1[$, admet une solution et une seule, notée α, et montrer : $\dfrac{1}{\mathrm{e}} < \alpha < 1$.

c) Écrire un programme en **Scilab** qui calcule et affiche une valeur approchée de α à 10^{-3} près, mettant en oeuvre l'algorithme de dichotomie.

Partie III - Calcul d'une fonction de répartition.

On admet qu'il existe une variable aléatoire réelle X ayant f pour densité (l'application f a été définie au début de la **Partie II**) et on note F la fonction de répartition de X.

8. Calculer, pour tout $x \in]0,1[$, l'intégrale $\displaystyle\int_x^1 f(t)\ dt$.
(On pourra utiliser le résultat obtenu à la question ***I-2.***)

9. Calculer $F(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

10. Tracer l'allure de la courbe représentative de F.

Partie IV - Étude d'extremum local pour une fonction de deux variables réelles.

On note D l'ensemble des couples (x, y) appartenant à $]0, +\infty[^2$ tels que : $x + y < 1$ et $2x < 1$.
On considère l'application $G : D \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert D, définie, pour tout $(x, y) \in D$ par :

$$G(x, y) = f(x + y) - \frac{1}{2}\ f(2x)$$

l'application f ayant été définie au début de la partie ***II***.

11. Représenter l'ensemble D.

12. Calculer, pour tout $(x, y) \in D$, les dérivées partielles premières de G en (x, y), en fonction de x, y, f'.

13. Soit $(x, y) \in D$. Montrer que (x, y) est un point critique de G si et seulement si :

$$f'(2x) = 0 \qquad \text{et} \qquad f'(x + y) = 0$$

14. En déduire que G admet un point critique et un seul, et qu'il s'agit de $\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}\right)$, le réel α ayant été défini en ***II.4.b)***.

15. Est-ce que G admet un extremum local ?

Exercice 2

On note $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R})$.

1. Est-ce que A est diagonalisable dans $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$?

2. Déterminer les valeurs propres de A et, pour chaque valeur propre de A, déterminer une base du sous-espace propre associé.

3. En déduire une matrice $D \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R})$, à coefficients diagonaux rangés dans l'ordre croissant, et une matrice inversible $P \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R})$, à coefficients diagonaux tous égaux à 1, telles que $A = PDP^{-1}$, et calculer P^{-1}.

On appelle commutant de A, et on note C_A, l'ensemble des matrices M de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ telles que :

$$AM = MA$$

On appelle commutant de D, et on note C_D, l'ensemble des matrices N de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ telles que :

$$DN = ND$$

4. Montrer que C_A est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$.

5. Soit $M \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R})$. On note $N = P^{-1}MP$. Montrer :

$$M \in C_A \Leftrightarrow N \in C_D$$

6. Déterminer C_D, en utilisant les coefficients des matrices.

7. En déduire :

$$C_A = \{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & d & c & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \mid (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \}$$

8. Déterminer une base de C_A et la dimension de C_A.

Exercice 3

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
On considère une urne $\mathcal{U}$ contenant n boules numérotées de 1 à n et indiscernables au toucher.
On effectue une suite de tirages d'une boule avec remise de la boule dans l'urne $\mathcal{U}$.

Partie I

Soit k un entier supérieur ou égal à 1. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on note X_i la variable aléatoire égale au nombre d'obtentions de la boule numéro i au cours des k premiers tirages.

1. Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Donner la loi de X_i. Rappeler l'espérance et la variance de X_i.

2. Les variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont-elles indépendantes ?

3. Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ tel que $i \neq j$.

   a) Déterminer la loi de la variable $X_i + X_j$. Rappeler la variance de $X_i + X_j$.

   b) En déduire la covariance du couple (X_i, X_j).

Pour tout entier k supérieur ou égal à 1, on note Z_k la variable aléatoire égale au nombre de numéros distincts obtenus au cours des k premiers tirages et on note $\mathbb{E}(Z_k)$ l'espérance de Z_k.

Partie II

4. Déterminer la loi de la variable Z_1 et la loi de la variable Z_2.
En déduire $\mathbb{E}(Z_1)$ et $\mathbb{E}(Z_2)$.

5. Soit k un entier supérieur ou égal à 1.

   a) Déterminer $\mathbb{P}([Z_k = 1])$ et déterminer $\mathbb{P}([Z_k = k])$.

   b) Montrer, pour tout $\ell \in [\![1, n]\!]$: $\mathbb{P}([Z_{k+1} = \ell]) = \dfrac{\ell}{n}\,\mathbb{P}([Z_k = \ell]) + \dfrac{n - \ell + 1}{n}\,\mathbb{P}([Z_k = \ell - 1])$.

   c) En déduire : $\mathbb{E}(Z_{k+1}) = \dfrac{n-1}{n}\,\mathbb{E}(Z_k) + 1$.

6. ***a)*** Montrer que la suite $(v_k)_{k \geqslant 1}$ de terme général $v_k = \mathbb{E}(Z_k) - n$ est une suite géométrique.

   b) En déduire, pour tout entier k supérieur ou égal à 1 : $\mathbb{E}(Z_k) = n\left(1 - \left(\dfrac{n-1}{n}\right)^k\right)$.

Partie III

On suppose maintenant que $n = 4$; ainsi l'urne $\mathcal{U}$ contient 4 boules numérotées de 1 à 4.
Soit k un entier supérieur ou égal à 4. On se propose de déterminer la loi de Z_k.

7. Rappeler la valeur de $\mathbb{P}([Z_k = 1])$. Déterminer $\mathbb{P}([Z_k \geqslant 5])$.

8. Montrer : $\mathbb{P}([Z_k = 2]) = 6\,\dfrac{2^k - 2}{4^k}$.

9. On note, pour tout i de $[\![1, 4]\!]$, A_i l'événement :
« la boule numéro i n'a pas été obtenue au cours des k premiers tirages ».

a) Montrer : $\mathbb{P}([Z_k \leqslant 3]) = 4\,\mathbb{P}(A_1) - 6\,\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) + 4\,\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$.

b) Calculer $\mathbb{P}(A_1)$, $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2)$ et $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$.

c) En déduire : $\mathbb{P}([Z_k \leqslant 3])$, puis $\mathbb{P}([Z_k = 3])$ et $\mathbb{P}([Z_k = 4])$.