HEC 2012

Exercice

Soit m un réel donné strictement positif et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice M dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est donnée par :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{m} & \frac{1}{m^2} \\ m & 0 & \frac{1}{m} \\ m^2 & m & 0 \end{pmatrix}$$

On note I la matrice identité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$.

Pour tout endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ on pose $g^0 = \mathrm{Id}$ et pour tout k de $\mathbb{N}^*$, $g^k = g \circ g^{k-1}$.

1. Déterminer le noyau $\mathrm{Ker}(f)$ et l'image $\mathrm{Im}(f)$ de l'endomorphisme f.
La matrice M est-elle inversible ?

2. ***a)*** Montrer que la matrice M^2 est une combinaison linéaire de I et de M.

b) Déterminer un polynôme annulateur non nul de la matrice M.

c) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de M.
La matrice M est-elle diagonalisable ?

3. À l'aide des résultats de la question ***2.c)***, indiquer une méthode, sans faire les calculs, qui permettrait d'obtenir pour tout n de $\mathbb{N}$, l'expression de M^n en fonction de n.

4. On pose : $p = \dfrac{1}{3}\,(f + \mathrm{Id})$ et $q = -\dfrac{1}{3}\,(f - 2\mathrm{Id})$.

a) Calculer $p \circ q$ et $q \circ p$, puis pour tout n de $\mathbb{N}$, p^n et q^n.

b) En déduire pour tout n de $\mathbb{N}$, l'expression de f^n en fonction de p et q.

c) Déterminer les deux suites réelles telles que pour tout n de $\mathbb{N}$, on ait : $M^n = a_n I + b_n M$.

d) La formule précédente reste-t-elle valable si n appartient à $\mathbb{Z}$?

Problème

Sous réserve d'existence, on note $\mathbb{E}(U)$ et $\mathbb{V}(U)$ respectivement, l'espérance mathématique et la variance d'une variable aléatoire U définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.
Pour p entier supérieur ou égal à 2, on dit que les variables aléatoires à densité $U_1, \ldots, U_p$ sont indépendantes si pour tout p-uplet $(u_1, \ldots, u_p)$ de réels, les événements $[U_1 \leqslant u_1], \ldots, [U_p \leqslant u_p]$ sont indépendants.

L'objet du problème est l'étude de quelques propriétés d'une loi de probabilité utilisée notamment en fiabilité.

Les parties **I** et **II** sont largement indépendantes. La partie **III** est indépendante des parties **I** et **II**.

Partie I : Loi à 1 paramètre.

On note λ un paramètre réel strictement positif. On considère la fonction f_λ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f_\lambda : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{\lambda}{2\sqrt{x}}\ \mathrm{e}^{-\lambda\sqrt{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

1. ***a)*** Montrer que la fonction f_λ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) Dresser le tableau de variation de f_λ sur $\mathbb{R}_+^*$ et préciser les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0^+} f_\lambda(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} f_\lambda(x)$$

c) Établir la convexité de la fonction f_λ sur $\mathbb{R}_+^*$.

d) Tracer l'allure de la courbe représentative de f_λ dans le plan rapporté à un repère orthogonal.

2. ***a)*** Vérifier que la fonction $x \mapsto -\mathrm{e}^{-\lambda\sqrt{x}}$ est une primitive de f_λ sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) Établir la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_\lambda(x)\ dx$ et calculer sa valeur.

c) En déduire que la fonction f_λ est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, à valeurs strictement positives, ayant f_λ pour densité. On note F_λ la fonction de répartition de X et on pose : $Y = \lambda\sqrt{X}$.

a) Calculer pour tout x réel, $F_\lambda(x)$.

b) Montrer que Y suit la loi exponentielle de paramètre 1.

c) Établir pour tout r de $\mathbb{N}^*$, l'existence de $\mathbb{E}(Y^r)$.

d) Montrer que pour tout r de $\mathbb{N}^*$, on a : $\mathbb{E}\left(Y^{r+1}\right) = (r+1)\ \mathbb{E}\left(Y^r\right)$.

e) En déduire pour tout r de $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{E}\left(Y^r\right)$ et $\mathbb{E}\left(X^r\right)$. En particulier, calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

4. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.r. définies sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, indépendantes et de même loi que X.
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ deux suites de réels strictement positifs vérifiant :

$$\lim_{n\to+\infty} n^2 a_n = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} n^2 b_n = 0$$

On pose pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $M_n = \min\limits_{1\leqslant k\leqslant n} (X_k)$ et $J_n = \dfrac{M_n - b_n}{a_n}$.
On admet que M_n et J_n sont des variables aléatoires à densité définies sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.
Montrer que la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire dont on précisera la loi.

Partie II : Estimation ponctuelle de λ.

Pour n entier de $\mathbb{N}^*$, on note $(X_1, \cdots, X_n)$ un n-échantillon de variables aléatoires à valeurs strictement positives, indépendantes et de même loi que la variable aléatoire X définie dans la question ***3***.
On rappelle que $Y = \lambda\sqrt{X}$, et on pose pour tout k de $[\![1, n]\!]$: $Y_k = \lambda\sqrt{X_k}$, $S_k = \sum\limits_{j=1}^{k} Y_j$ et g_k une densité de S_k.
On admet que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, les variables aléatoires $Y_1; \ldots; Y_n$ sont indépendantes et que pour tout k de $[\![1, n]\!]$, les variables aléatoires S_k et Y_{k+1} sont indépendantes.

On admet que si T et Z sont deux variables aléatoires à densité indépendantes définies sur le même espace probabilisé, de densités respectives f_T et f_Z telles que f_T et f_Z soient bornées, alors la variable aléatoire $T+Z$ admet une densité f_{T+Z} définie pour tout x réel par :

$$f_{T+Z}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_T(y)\ f_Z(x-y)\ dy$$

1. a) En utilisant les propriétés admises, montrer que $g_2(x) = \begin{cases} x\mathrm{e}^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$.

b) À l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a :

$$g_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(n-1)!}\ x^{n-1}\ \mathrm{e}^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

c) On admet que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{S_n}$ est une variable aléatoire à densité. Pour quelles valeurs de n, l'espérance $\mathbb{E}\left(\dfrac{1}{S_n}\right)$ et la variance $\mathbb{V}\left(\dfrac{1}{S_n}\right)$ existent-elles ?
Calculer alors leurs valeurs respectives.

2. On note $(x_1, \ldots, x_n)$ un n-uplet de $\left(\mathbb{R}_+^*\right)^n$ constituant une réalisation du n-échantillon $(X_1, \cdots, X_n)$.
On suppose que le paramètre λ est inconnu. Soit H la fonction de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$H(\lambda) = \ln\left(\prod_{k=1}^{n} f_\lambda(x_k)\right)$$

Montrer que la fonction H admet un maximum atteint en un unique point λ_0 dont on donnera la valeur.

3. On pose pour tout entier n supérieur ou égal à 3 : $\lambda_n^* = \dfrac{n}{\sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{X_k}}$.

a) Que représente λ_0 pour λ_n^* ?

b) Construire à partir de λ_n^* un estimateur sans biais $\hat{\lambda}_n$ de λ et calculer le risque quadratique $\rho\left(\hat{\lambda}_n\right)$ de $\hat{\lambda}_n$.

c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \rho\left(\hat{\lambda}_n\right)$. Commenter.

Partie III : Loi à 2 paramètres.

1. Soit λ et α deux paramètres réels strictement positifs et $f_{(\lambda,\alpha)}$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_{(\lambda;\alpha)}(x) = \begin{cases} \lambda\alpha x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-\lambda x^\alpha} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

a) Montrer que $f_{(\lambda,\alpha)}$ est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.
Soit W une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, à valeurs strictement positives, de densité $f_{(\lambda,\alpha)}$. On dit que W suit la loi $\mathcal{WB}(\lambda, \alpha)$.

b) On note $F_{(\lambda,\alpha)}$ la fonction de répartition de W. Calculer pour tout x réel, $F_{(\lambda,\alpha)}(x)$.

c) Montrer que la variable aléatoire $F_{(\lambda,\alpha)}(x)$ suit la loi uniforme sur $[0, 1]$.

d) Écrire une fonction **Scilab** permettant de simuler W.

2. Soit K une variable aléatoire à densité définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, à valeurs strictement positives, de densité f_K nulle sur $\mathbb{R}_-$, continue sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$. On note F_K la fonction de répartition de K. On pose pour tout x réel $R(x) = -\ln(1 - F_K(x))$ et $r(x) = R'(x)$, où R' est la fonction dérivée de R.

a) On suppose dans cette question que K suit la loi $\mathcal{WB}(\lambda, 2)$ avec $\lambda > 0$.
Établir les propriétés *(i)* et *(ii)* suivantes :

(i) la fonction r est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, et $r(0) = 0$.

(ii) la variable aléatoire $r(K)$ suit la loi $\mathcal{WB}\left(\dfrac{1}{4\lambda}, 2\right)$.

b) Réciproquement, on suppose dans cette question que les propriétés *(i)* et *(ii)* sont vérifiées.
Montrer que K suit la loi $\mathcal{WB}(\lambda, 2)$. Conclusion ?

Dans les questions *3.* et *4.*, l'entier n est supérieur ou égal à 2. On note $w_1, \ldots, w_n$ des réels strictement positifs et non tous égaux.

3. Soit φ la fonction de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\varphi(x) = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} (w_k)^x \ \ln(w_k)}{\sum\limits_{k=1}^{n} (w_k)^x} - \frac{1}{x}$$

a) Soit $y_1, \ldots, y_n$ des réels non tous nuls et $z_1, \ldots, z_n$ des réels quelconques.
En étudiant la fonction polynomiale du second degré Q définie sur $\mathbb{R}$ par $Q(t) = \sum\limits_{k=1}^{n} (z_k - t y_k)^2$, établir l'inégalité :

$$\left(\sum_{k=1}^{n} y_k z_k\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} z_k^2\right)$$

b) Montrer que la fonction φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

c) On note n_0 le nombre d'entiers k_0 de $[\![1, n]\!]$ vérifiant $w_{k_0} = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} (w_k)$.
Montrer que $1 \leqslant n_0 \leqslant n - 1$.

d) Donner un équivalent de $\sum\limits_{k=1}^{n} (w_k)^x$ en fonction de n_0 et w_{k_0}, lorsque x tend vers $+\infty$.

e) Calculer en fonction de w_{k_0}, la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
(on distinguera les deux cas $w_{k_0} = 1$ et $w_{k_0} \neq 1$)

f) En déduire que sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation $\varphi(x) = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \ln(w_k)$ admet une unique solution.

4. On note $(W_1, \ldots, W_n)$ un n-échantillon de variables aléatoires à valeurs strictement positives, indépendantes et de même loi $\mathcal{WB}(\lambda, \alpha)$ définie dans la question **III.1.** dont une réalisation est le n-uplet $(w_1, \ldots, w_n)$.
On suppose que les paramètres λ et α sont inconnus.
Soit G la fonction de $(\mathbb{R}_+^*)^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $G(\lambda, \alpha) = \ln\left(\prod\limits_{k=1}^{n} f_{(\lambda,\alpha)}(w_k)\right)$.

a) Montrer que la fonction G admet un unique point critique $\left(\hat{\lambda}, \hat{\alpha}\right)$ sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$.

b) Montrer que la fonction G admet un maximum local au point $\left(\hat{\lambda}, \hat{\alpha}\right)$.