ESSEC I 2012

Ce problème comporte deux parties relativement indépendantes.
Dans la première partie on étudie les lois log-normales. On s'intéresse dans la partie II à une modélisation du cours d'une action appelée modèle binomial ou de Cox-Ross-Rubinstein et à son comportement asymptotique.

Notations et définitions

- Les variables aléatoires qui interviennent dans ce problème sont toutes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.
- On note Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.
- On note respectivement $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$ l'espérance et la variance d'une variable aléatoire X, lorsque celles-ci existent.
- Soit m un réel et σ un réel strictement positif. On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi log-normale de paramètres (m, σ^2) si X est à valeurs strictement positives et si $\ln(X)$ suit la loi normale de paramètres (m, σ^2). On écrit alors $X \hookrightarrow \mathcal{LN}(m, \sigma^2)$.

Partie I - Quelques propriétés des lois log-normales

On note dans cette partie m un réel et σ un réel strictement positif.
Soit X une variable aléatoire réelle suivant la loi log-normale de paramètres (m, σ^2).
On pourra dans la suite utiliser la variable aléatoire $Y = \ln(X)$.

1. Soit a et b deux réels, a étant différent de 0. On rappelle que si U est une variable aléatoire qui suit une loi normale de paramètres (m, σ^2), alors $a\,U + b$ suit aussi une loi normale.
Quels en sont les paramètres ?

Démonstration.

- Tout d'abord, par linéarité de l'espérance :

$$\mathbb{E}(a\,U+b) \;=\; a\,\mathbb{E}(U)+b \;=\; am+b$$

- Ensuite :

$$\mathbb{V}(a\,U+b) \;=\; a^2\,\mathbb{V}(U) \;=\; a^2\,\sigma^2$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } aU+b \hookrightarrow \mathcal{N}\left(am+b, a^2\,\sigma^2\right).}$$

□

2. *Cas où $m = 0$.*
On suppose dans cette question 2 que $X \hookrightarrow \mathcal{LN}(0, \sigma^2)$.

a) *Densité.*
Exprimer la fonction de répartition F de X en fonction de Φ .
En déduire que X est une variable aléatoire à densité et que la fonction définie par :

$$x \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{x\,\sigma\,\sqrt{2\pi}}\ \exp\left(-\dfrac{\big(\ln(x)\big)^2}{2\sigma^2}\right) & \text{si } x > 0 \\[2ex] 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

est une densité de probabilité de X.

Démonstration.

- Tout d'abord, comme X suit une loi log-normale, d'après l'énoncé : $X(\Omega) \subset \,]0, +\infty[$.
- Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent :
  - × si $x \in \,]-\infty, 0]$, alors $[X \leqslant x] = \varnothing$ car $X(\Omega) \subset \,]0, +\infty[$ (car $X(\Omega) \subset \,]0, +\infty[$). D'où :

$$F(x) \ = \ \mathbb{P}([X \leqslant x]) \ = \ \mathbb{P}(\varnothing) \ = \ 0$$

  - × si $x \in \,]0, +\infty[$, alors :

$$\begin{aligned} F(x) &= \mathbb{P}([X \leqslant x]) \\ &= \mathbb{P}([\ln(X) \leqslant \ln(x)]) && \textit{(par stricte croissance de la fonction } \ln \textit{ sur }]0,+\infty[\textit{)} \\ &= \mathbb{P}([Y \leqslant \ln(x)]) \\ &= \mathbb{P}\left(\left[\frac{Y}{\sigma} \leqslant \frac{\ln(x)}{\sigma}\right]\right) && \textit{(car } \sigma > 0\textit{)} \\ &= \Phi\left(\frac{\ln(x)}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

En effet, d'après l'énoncé, comme $X \hookrightarrow \mathcal{LN}(0, \sigma^2)$, alors $Y \hookrightarrow \mathcal{N}\left(0, \sigma^2\right)$.
On obtient donc, d'après la question ***1.*** (appliquée à $a = \dfrac{1}{\sigma}$ et $b = 0$) : $\dfrac{Y}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$.
En particulier, la fonction de répartition de la v.a.r. $\dfrac{Y}{\sigma}$ est la fonction Φ.

$$\boxed{\text{Finalement, } F : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \,]-\infty, 0] \\ \Phi\left(\dfrac{\ln(x)}{\sigma}\right) & \text{si } x \in \,]0, +\infty[\end{cases}}$$

- Montrons que X est une v.a.r. à densité.
  - × La fonction F est continue :
    - sur $]-\infty, 0[$ en tant que fonction constante,
    - sur $]0, +\infty[$ en tant que composée de fonctions continues sur des intervalles adéquats (la fonction Φ est bien continue sur $\mathbb{R}$ car c'est la fonction de répartition d'une v.a.r. à densité),
    - en 0. En effet, d'une part : $\lim\limits_{x \to 0^-} F(x) = F(0) = 0$. D'autre part :

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0^+} F(x) &= \lim_{t \to -\infty} \Phi(t) && \textit{(car } \sigma > 0\textit{)} \\ &= 0 && \textit{(car } \Phi \textit{ est une fonction de répartition)} \end{aligned}$$

Finalement :

$$\lim_{x \to 0^-} F(x) \ = \ F(0) \ = \ \lim_{x \to 0^+} F(x)$$

$$\boxed{\text{On en déduit que } F \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$$

× La fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ avec des arguments similaires à ceux de la continuité sur ces intervalles.

$$\boxed{\text{La fonction } F \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ sauf éventuellement en } 0.}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } X \text{ est une v.a.r. à densité.}}$$

Commentaire

Détaillons la continuité de la fonction F sur $]0, +\infty[$.
La fonction F est continue sur $]0, +\infty[$ car elle est la composée $F = \Phi \circ h_1$ de :

× $h_1 : x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{\sigma}$ qui est :
  - continue sur $]0, +\infty[$,
  - telle que $h_1(]0, +\infty[) \subset \mathbb{R}$.

× Φ qui est continue sur $\mathbb{R}$, car c'est la fonction de répartition d'une v.a.r. à densité.

- On détermine une densité f de X en dérivant F sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ (qui sont bien des intervalles ouverts).

× Soit $x \in\,]-\infty, 0[$.

$$f(x) = F'(x) = 0$$

× Soit $x \in\,]0, +\infty[$.

$$\begin{aligned} f(x) &= F'(x) = \frac{1}{\sigma\, x}\, \Phi'\left(\frac{\ln(x)}{\sigma}\right) \\ &= \frac{1}{\sigma\, x}\, \varphi\left(\frac{\ln(x)}{\sigma}\right) \\ &= \frac{1}{\sigma\, x}\, \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\, \exp\left(-\frac{\left(\frac{\ln(x)}{\sigma}\right)^2}{2}\right) \\ &= \frac{1}{\sigma\, x\sqrt{2\,\pi}}\, \exp\left(-\frac{\big(\ln(x)\big)^2}{2\,\sigma^2}\right) \end{aligned}$$

× On choisit la valeur arbitraire : $f(0) = 0$.

$$\boxed{\text{Finalement, } f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in\,]-\infty, 0] \\ \dfrac{1}{\sigma\, x\sqrt{2\,\pi}}\, \exp\left(-\dfrac{\big(\ln(x)\big)^2}{2\,\sigma^2}\right) & \text{si } x \in\,]0, +\infty[\end{cases}.}$$

□

b) *Espérance.*

(i) Établir l'existence de $\mathbb{E}(X)$ et l'égalité : $\mathbb{E}(X) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{y^2}{\sigma^2} - 2y\right)\right)\, dy$.

Démonstration.

- D'après le théorème de transfert, la v.a.r. $X = \mathrm{e}^Y$ admet une espérance si et seulement si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^y\, \varphi_{0,\sigma^2}(y)\, dy$ est absolument convergente.
(on rappelle que φ_{0,σ^2} est une densité de Y car $Y \hookrightarrow \mathcal{N}\left(0, \sigma^2\right)$)

Or, pour tout $y \in \mathbb{R}$: $e^y \, \varphi_{0,\sigma^2}(y) > 0$.
Donc, montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^y \, \varphi_{0,\sigma^2}(y) \, dy$ est absolument convergente, équivaut à montrer qu'elle est convergente.

- Montrons d'abord que l'intégrale $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} e^y \, \varphi_{0,\sigma^2}(y) \, dy$ est convergente.

  × La fonction $y \mapsto e^y \, \varphi_{0,\sigma^2}(y)$ est continue sur $[1, +\infty[$. L'intégrale $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} e^y \, \varphi_{0,\sigma^2}(y) \, dy$ est donc uniquement impropre en $+\infty$.

  × Soit $y \in [1, +\infty[$.

$$e^y \, \varphi_{0,\sigma^2}(y) \; = \; e^y \, \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \, e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} \; = \; \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \, e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}+y}$$

  On a donc :

  - tout d'abord : $\forall y \in [1, +\infty[$, $e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}+y} > 0$ et $\dfrac{1}{y^2} > 0$

  - ensuite : $e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}+y} \underset{y \to +\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{y^2}\right)$. En effet :

$$\frac{e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}+y}}{\frac{1}{y^2}} \; = \; y^2 \, e^{-y^2\left(\frac{1}{2\sigma^2}-\frac{1}{y}\right)} \; = \; y^2 \, e^{-y^2} e^{\frac{1}{2\sigma^2}-\frac{1}{y}}$$

    Or : $\displaystyle\lim_{y \to +\infty} y^2 \, e^{-y^2} = 0$ par croissances comparées. De plus : $\displaystyle\lim_{y \to +\infty} e^{\frac{1}{2\sigma^2}-\frac{1}{y}} = e^{\frac{1}{2\sigma^2}}$.

    D'où : $\displaystyle\lim_{y \to +\infty} \frac{e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}+y}}{\frac{1}{y^2}} = 0$.

  - l'intégrale $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{y^2} \, dy$ est une intégrale de Riemann, impropre en $+\infty$, d'exposant $2 > 1$. Donc elle est convergente.

  Par critère de négligeabilité des intégrales généralisées de fonctions continues positives, l'intégrale $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} e^y \, \varphi_{0,\sigma^2}(y) \, dy$ est convergente.

- De même, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} e^y \, \varphi_{0,\sigma^2}(y) \, dy$ est convergente.

- Enfin, comme la fonction $y \mapsto e^y \, \varphi_{0,\sigma^2}(y)$ est continue sur le segment $[-1, 1]$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{1} e^y \, \varphi_{0,\sigma^2}(y) \, dy$ est bien définie.

$$\boxed{\text{Finalement, l'intégrale } \int_{-\infty}^{+\infty} e^y \, \varphi_{0,\sigma^2}(y) \, dy \text{ converge, la v.a.r. } X \text{ admet donc une espérance.}}$$

- On obtient alors :

$$\mathbb{E}(Y) \; = \; \int_{-\infty}^{+\infty} e^y \, \varphi_{0,\sigma^2}(y) \, dy \; = \; \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^y \, e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} \, dy \; = \; \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y^2}{\sigma^2}-2y\right)} \, dy$$

$$\boxed{\mathbb{E}(Y) \; = \; \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y^2}{\sigma^2}-2y\right)} \, dy}$$

Commentaire

On pouvait également répondre à cette question en utilisant une densité de X : la fonction f trouvée à la question précédente.

- La v.a.r. X admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, dx$ est absolument convergente, ce qui équivaut à démontrer qu'elle est convergente pour un calcul de moment du type $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^r f(x)\, dx$.
- La fonction f est nulle en dehors de $[0,+\infty[$, donc :
$$\int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, dx \ = \ \int_{0}^{+\infty} x\, f(x)\, dx$$
- La fonction $x \mapsto x\, f(x)$ est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$. L'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} x\, f(x)\, dx$ est donc uniquement impropre en $+\infty$.
- De plus, soit $x \in\ ]0,+\infty[$:
$$x\, f(x) \ = \ \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}\, \sigma \sqrt{2\,\pi}} \ \exp\left(-\frac{\big(\ln(x)\big)^2}{2\,\sigma^2}\right) \ = \ \frac{1}{\sigma\sqrt{2\,\pi}} \ \exp\left(-\frac{\big(\ln(x)\big)^2}{2\,\sigma^2}\right)$$
On obtient alors :
  - $\times$ tout d'abord : $\forall x \in [1,+\infty[$, $\exp\left(-\dfrac{\big(\ln(x)\big)^2}{2\,\sigma^2}\right) > 0$ et $\dfrac{1}{x^2} > 0$.
  - $\times$ ensuite : $\exp\left(-\dfrac{\big(\ln(x)\big)^2}{2\,\sigma^2}\right) = \underset{x\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ (à démontrer)
  - $\times$ l'intégrale $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx$ est une intégrale de Riemann, impropre en $+\infty$, d'exposant $2 > 1$. Elle est donc convergente.

  Par critère de négligeabilité des intégrales généralisés de fonctions continues positives, l'intégrale $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} x\, f(x)\, dx$ est convergente.
- De plus, la fonction $x \mapsto x\, f(x)$ est continue sur le segment $[0,1]$. L'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{1} x\, f(x)\, dx$ est donc bien définie.
- Finalement $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} x\, f(x)\, dx$ converge, donc X admet une espérance.
- Montrons enfin : $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} x\, f(x)\, dx \ = \ \frac{1}{\sigma\sqrt{2\,\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{y^2}{2} - 2y\right)\right)\, dy$.

$\times$ Soit $B \in [1,+\infty[$. On effectue le changement de variable $\boxed{y = \ln(x)}$.

$$\left|\begin{array}{l} y = \ln(x) \quad (\text{donc } x = \mathrm{e}^y) \\ \hookrightarrow dy = \dfrac{1}{x}\, dx \quad \text{et} \quad dx = \mathrm{e}^y\, dy \\ \bullet\ x = 1 \ \Rightarrow\ y = 0 \\ \bullet\ x = B \ \Rightarrow\ y = \ln(B) \end{array}\right.$$

Ce changement de variable est valide car $\psi : y \mapsto \mathrm{e}^y$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \ln(B)]$.

Commentaire

On obtient :

$$\begin{aligned}\int_1^B x\,f(x)\,dx &= \int_0^{\ln(B)} \mathrm{e}^y f(\mathrm{e}^y)\,dy \\ &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\,\pi}} \int_0^{\ln(B)} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{y^2}{2}-2y\right)\right)\,dy\end{aligned}$$

Ainsi, par passage à la limite quand B tend vers $+\infty$ (on a déjà montré que $\displaystyle\int_1^{+\infty} x\,f(x)\,dx$ converge) :

$$\int_1^{+\infty} x\,f(x)\,dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\,\pi}} \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{y^2}{2}-2y\right)\right)\,dy$$

× Soit $A \in \,]0,1]$.
On effectue le même changement de variable sur le segment $[A,1]$ et en faisant tendre A vers 0, on obtient :

$$\int_0^1 x\,f(x)\,dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\,\pi}} \int_{-\infty}^0 \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{y^2}{2}-2y\right)\right)\,dy$$

Finalement, on retrouve bien :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \int_0^{+\infty} x\,f(x)\,dx \\ &= \int_0^1 x\,f(x)\,dx + \int_1^{+\infty} x\,f(x)\,dx \\ &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\,\pi}} \int_{-\infty}^0 \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{y^2}{2}-2y\right)\right) + \frac{1}{\sigma\sqrt{2\,\pi}} \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{y^2}{2}-2y\right)\right) \\ &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\,\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{y^2}{2}-2y\right)\right)\end{aligned}$$

□

(ii) En utilisant le changement de variable $t = \dfrac{y}{\sigma} - \sigma$, en déduire $\mathbb{E}(X)$ en fonction de σ.

Démonstration.

Comme suggéré par l'énoncé, on effectue le changement de variable $\boxed{t = \dfrac{y}{\sigma} - \sigma}$.

$t = \dfrac{y}{\sigma} - \sigma$ (donc $y = \sigma(t+\sigma)$)
$\hookrightarrow dt = \dfrac{1}{\sigma}\,dy$ et $dy = \sigma\,dt$

- $y = -\infty \Rightarrow t = -\infty$ (car $\sigma > 0$)
- $y = +\infty \Rightarrow t = +\infty$

Ce changement de variable est valide car $\psi : t \mapsto \sigma\,(t+\sigma)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et les intégrales en présence sont convergentes d'après la question précédente.

On obtient :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{y^2}{2} - 2y\right)\right) \\
&= \frac{1}{\cancel{\sigma}\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\big(\sigma(t+\sigma)\big)^2}{\sigma^2} - 2\sigma(t+\sigma)\right)\right) (\cancel{\sigma}\ dt) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\cancel{\sigma^2}(t+\sigma)^2}{\cancel{\sigma^2}} - 2\sigma\, t - 2\sigma^2\right)\right)\ dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(t^2 + \cancel{2\sigma\, t} + \sigma^2 - \cancel{2\sigma\, t} - 2\sigma^2\right)\right)\ dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}\, t^2 + \frac{1}{2}\, \sigma^2\right)\ dt \\
&= \mathrm{e}^{\frac{\sigma^2}{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}\, t^2\right)\ dt \\
&= \mathrm{e}^{\frac{\sigma^2}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\ dt \\
&= \mathrm{e}^{\frac{\sigma^2}{2}} \times 1 \qquad \textit{(car } \varphi \textit{ est une densité)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = \mathrm{e}^{\frac{\sigma^2}{2}}}$$

Commentaire

- Le programme officiel stipule que « les changements de variables affines pourront être utilisés directement sur des intégrales sur un intervalle quelconque ». Pour autant, ce type de changement de variable ne peut se faire qu'après avoir démontré la convergence (ce qu'on a fait en question précédente).
- Cela signifie aussi que, de manière générale, on ne peut effectuer de changement de variable directement sur une intégrale impropre : on doit se ramener au préalable sur une intégrale sur un segment.

□

c) *Variance.*

(i) Soit α un réel non nul. Montrer que X^α suit une loi log-normale dont on précisera les paramètres.

Démonstration.

- On note $Z = X^\alpha$ et $h : x \mapsto x^\alpha$ de sorte que : $Z = h(X)$.
  On rappelle : $X(\Omega) \subset\ ]0, +\infty[$. Alors :

  $$Z(\Omega) \;=\; \big(h(X)\big)(\Omega) \;=\; h\big(X(\Omega)\big) \;\subset\; h(]0,+\infty[)$$

  Or la fonction h est continue et strictement croissante sur $]0, +\infty[$ (car $\alpha > 0$), donc :

  $$h(]0,+\infty[) \;=\; \left]\lim_{x\to 0} h(x),\ \lim_{x\to+\infty} h(x)\right[\;=\;]0,+\infty[$$

  $$\boxed{\text{Ainsi : } Z(\Omega) \subset\ ]0,+\infty[.}$$

- Montrons maintenant que la v.a.r. $\ln(Z)$ suit une loi normale.
  Tout d'abord :
  $$\ln(Z) \;=\; \ln\left(X^\alpha\right) \;=\; \alpha\,\ln(X) \;=\; \alpha\,Y$$
  Or, comme $X \hookrightarrow \mathcal{LN}(0,\sigma^2)$, alors : $Y \hookrightarrow \mathcal{N}\left(0,\sigma^2\right)$.
  Donc, d'après la question ***1.*** (appliquée à $a=\alpha$ et $b=0$) :
  $$\ln(Z) = \alpha\,Y \hookrightarrow \mathcal{N}\left(0,\alpha^2\,\sigma^2\right)$$

$$\boxed{\text{Par définition d'une loi log-normale, on en déduit : } X^\alpha \hookrightarrow \mathcal{LN}(0,\alpha^2\,\sigma^2).}$$
□

(ii) En déduire que X admet une variance et : $\mathbb{V}(X) = \mathrm{e}^{\sigma^2}\left(\mathrm{e}^{\sigma^2}-1\right)$.

Démonstration.

- La v.a.r. X admet une variance si et seulement si elle admet un moment d'ordre 2.
  Donc X admet une variance si et seulement si la v.a.r. X^2 admet une espérance.
- Or, d'après la question précédente : $X^2 \hookrightarrow \mathcal{LN}(0,2^2\,\sigma^2)$.
  Ainsi, d'après la question ***2.b)(i)***, X^2 admet une espérance.
  $$\boxed{\text{La v.a.r. } X \text{ admet donc une variance.}}$$
- De plus, d'après ***2.b)(ii)*** :
  $$\mathbb{E}(X^2) \;=\; \mathrm{e}^{\frac{4\,\sigma^2}{2}} \;=\; \mathrm{e}^{2\,\sigma^2}$$
- On en déduit, par formule de Koenig-Huygens :
  $$\mathbb{V}(X) \;=\; \mathbb{E}(X^2)-\left(\mathbb{E}(X)\right)^2 \;=\; \mathrm{e}^{2\,\sigma^2}-\left(\mathrm{e}^{\frac{\sigma^2}{2}}\right)^2 \;=\; \mathrm{e}^{2\,\sigma^2}-\mathrm{e}^{\sigma^2} \;=\; \mathrm{e}^{\sigma^2}\left(\mathrm{e}^{\sigma^2}-1\right)$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \mathbb{V}(X) = \mathrm{e}^{\sigma^2}\left(\mathrm{e}^{\sigma^2}-1\right).}$$
□

3. On reprend le cas général : $X \hookrightarrow \mathcal{LN}(m,\sigma^2)$.

a) Soit μ un réel strictement positif.
Montrer que μX suit une loi log-normale de paramètres $\left(m+\ln(\mu),\sigma^2\right)$.

Démonstration.

- On note $S = \mu\,X$ et $h : x \mapsto \mu\,x$ de sorte que : $S = h(X)$.
  On rappelle : $X(\Omega) \subset \,]0,+\infty[$. Ainsi :
  $$S(\Omega) \;=\; \big(h(X)\big)(\Omega) \;=\; h\big(X(\Omega)\big) \;\subset\; h(]0,+\infty[)$$
  Or, la fonction h est continue et strictement croissante sur $]0,+\infty[$ (car $\mu > 0$), donc :
  $$h(]0,+\infty[) \;=\; \left]\lim_{x\to 0} h(x), \lim_{x\to+\infty} h(x)\right[\;=\;]0,+\infty[$$
  $$\boxed{\text{Ainsi : } S(\Omega) \subset \,]0,+\infty[.}$$
- Montrons maintenant : $\ln(S) \hookrightarrow \mathcal{N}\left(m+\ln(\mu),\sigma^2\right)$.
  Tout d'abord :
  $$\ln(S) \;=\; \ln(\mu\,X) \;=\; \ln(X)+\ln(\mu) \;=\; Y+\ln(\mu)$$
  Or, comme $X \hookrightarrow \mathcal{LN}(m,\sigma^2)$, alors : $Y \hookrightarrow \mathcal{N}\left(m,\sigma^2\right)$.
  Donc, d'après la question ***1.*** (appliquée à $a=1$ et $b=\ln(\mu)$) :
  $$\ln(S) = Y+\ln(\mu) \hookrightarrow \mathcal{N}\left(m+\ln(\mu),\sigma^2\right)$$

$$\boxed{\text{Par définition d'une loi log-normale, on en déduit : } \mu\,X \hookrightarrow \mathcal{LN}(m+\ln(\mu),\sigma^2).}$$
□

b) Justifier l'existence de $\mathbb{E}(X)$, de $\mathbb{V}(X)$, et établir :

$$\mathbb{E}(X) = e^{m+\frac{\sigma^2}{2}} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{V}(X) = e^{2m+\sigma^2}\left(e^{\sigma^2} - 1\right)$$

Démonstration.

- Tout d'abord :
  - × d'après les questions ***2.b)*** et ***2.c)***, on sait qu'une v.a.r. Y de loi $\mathcal{LN}(0,\sigma^2)$ admet une variance (et donc une espérance). On cherche donc à se ramener à une telle loi.
  - × d'après la question précédente, pour tout $\mu > 0$, la v.a.r. $\mu\, X$ suit la loi $\mathcal{LN}(m+\ln(\mu),\sigma^2)$.

  On cherche donc un réel $\mu_0 > 0$ tel que $m + \ln(\mu_0) = 0$. Alors :
  - × on saura d'après la question précédente : $\mu_0\, X \hookrightarrow \mathcal{LN}(0,\sigma^2)$,
  - × on pourra alors en déduire l'existence et la valeur de $\mathbb{E}(\mu_0\, X)$ et $\mathbb{V}(\mu_0\, X)$ d'après les questions ***2.b)*** et ***2.c)***,
  - × on obtiendra alors l'existence et la valeur de $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.
- Déterminons donc μ_0 tel que : $m + \ln(\mu_0) = 0$.

$$m + \ln(\mu_0) = 0 \ \Leftrightarrow\ \ln(\mu_0) = -m \ \Leftrightarrow\ \mu_0 = e^{-m}$$

  On pose donc $\mu_0 = e^{-m} > 0$.
- D'après la question précédente, on obtient :

$$e^{-m}\, X \ \hookrightarrow\ \mathcal{LN}(0,\sigma^2)$$

- On en déduit, d'après les questions ***2.b)*** et ***2.c)(ii)***, que la v.a.r. $U = e^{-m}\, X$ admet une espérance et une variance. De plus :

$$\mathbb{E}(U) = e^{\frac{\sigma^2}{2}} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(U) = e^{\sigma^2}\left(e^{\sigma^2} - 1\right)$$

On en déduit que la v.a.r. $X = e^m\, U$ admet une espérance et une variance en tant que multiple d'une v.a.r. qui en admet une.

- De plus, par linéarité de l'espérance :

$$\mathbb{E}(X) \ = \ \mathbb{E}\left(e^m\, U\right) \ = \ e^m\, \mathbb{E}(U) \ = \ e^m\, e^{\frac{\sigma^2}{2}} \ = \ e^{m+\frac{\sigma^2}{2}}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = e^{m+\frac{\sigma^2}{2}}}$$

- Enfin :

$$\mathbb{V}(X) \ = \ \mathbb{V}\left(e^m\, U\right) \ = \ (e^m)^2\ \mathbb{V}(U) \ = \ e^{2m} \times e^{\sigma^2}\left(e^{\sigma^2} - 1\right) \ = \ e^{2m+\sigma^2}\left(e^{\sigma^2} - 1\right)$$

$$\boxed{\mathbb{V}(X) = e^{2m+\sigma^2}\left(e^{\sigma^2} - 1\right)}$$

Commentaire

Revenons sur le choix de $\mu = e^{-m}$.

- Toute la question ***2.*** consiste à démontrer des propriétés sur la loi $\mathcal{LN}(0,\sigma^2)$.
- En question ***3.***, on souhaite maintenant démontrer des propriétés sur la loi $\mathcal{LN}(m,\sigma^2)$. L'objectif est alors :
  1) se ramener à la loi $\mathcal{LN}(0,\sigma^2)$,
  2) exploiter les résultats de la question ***2.***,
  3) en déduire les résultats sur la loi $\mathcal{LN}(m,\sigma^2)$.
- On choisit donc μ de telle sorte à ce que : $m + \ln(\mu) = 0$. Autrement dit : $\mu = e^{-m}$.

□

Partie II - Le modèle binomial de Cox-Ross-Rubinstein

Soit n un entier naturel non nul.
On souhaite modéliser l'évolution du cours d'une action entre les dates 0 et t fixé, strictement positif.
On suppose qu'initialement ce cours est $S_{0,n} = 1$ et si l'on note $S_{k,n}$ la valeur aléatoire de ce cours à la date $\frac{kt}{n}$, $k \in \{1, ..., n\}$, on a la relation :

$$S_{k,n} \;=\; S_{k-1,n} \times \left(1 + \frac{\mu}{n} + \frac{v}{\sqrt{n}}\, Y_k\right)$$

où :

- μ est une constante réelle strictement positive liée au rendement moyen de l'action sur une durée égale à t ;
- v est une constante réelle strictement positive appelée volatilité de l'action sur la durée t ;
- $(Y_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi uniforme sur $\{-1, 1\}$ (autrement dit : $\mathbb{P}([Y_k = 1]) = \mathbb{P}([Y_k = -1]) = \frac{1}{2}$).

  On suppose que n est assez grand pour que $1 + \frac{\mu}{n} - \frac{v}{\sqrt{n}} > 0$.

On admet que $S_{0,n}, ..., S_{n,n}$ sont des variables aléatoires discrètes.
On note C_n la variable aléatoire $S_{n,n}$, qui modélise le cours de l'action à l'instant t.

4. Simulation de la variable aléatoire C_n.

a) Que renvoie la fonction **Scilab** suivante ?

```
1  function Y = mystere()
2    u = rand()
3    if u < 1/2 then
4      Y = -1
5    else
6      Y = 1
7    end
8  endfunction
```

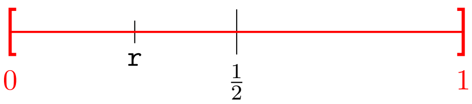
Démonstration.

- La fonction débute par la ligne 2 :

```
2      u = rand()
```

  L'instruction `rand()` renvoie un réel choisi aléatoirement dans $[0, 1]$.
  Plus formellement, il s'agit de simuler une v.a.r. U telle que $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1])$.

- Cette valeur `r` choisie aléatoirement dans $[0, 1]$ permet d'obtenir la valeur `Y`.



  Deux cas se présentent.

  – Si $\texttt{r} \leqslant \frac{1}{2}$: alors, on affecte à la variable `Y` la valeur -1.
    Ce cas se produit avec la probabilité :

$$\mathbb{P}\left(\left[0 \leqslant U \leqslant \frac{1}{2}\right]\right) = \mathbb{P}\left(\left[U \leqslant \frac{1}{2}\right]\right) = \frac{1}{2} = \mathbb{P}([Y = -1])$$

– Si `r` $> \dfrac{1}{2}$: alors, on affecte à la variable `Y` la valeur 1.
Ce cas se produit avec la probabilité :

$$\mathbb{P}\left(\left[\frac{1}{2} < U \leqslant 1\right]\right) = \mathbb{P}\left(\left[\frac{1}{2} < U\right]\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\left[U \leqslant \frac{1}{2}\right]\right) = \frac{1}{2} = \mathbb{P}([Y = 1])$$

On en déduit que la fonction `mystere` simule la v.a.r. Y.

Commentaire

- Plus généralement, cette méthode permet d'obtenir une simulation de n'importe quelle v.a.r. X finie. Détaillons ce résultat. Soit X une v.a.r. telle que :
  × $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$,
  × $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\mathbb{P}([X = x_i]) = p_i$.

  L'idée est alors de découper le segment $[0, 1]$ en n intervalles I_1, ..., I_n.
  La taille du premier intervalle est p_1, celle du deuxième est p_2 et ainsi de suite.
  De sorte que, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$:
  $$\mathbb{P}([U \in I_i]) = p_i = \mathbb{P}([X = x_i])$$
  Il n'y a plus qu'à écrire le programme correspondant.
- Afin de permettre une bonne compréhension des mécanismes en jeu, on a détaillé la réponse à cette question. Cependant, dire simplement que la fonction `mystere` renvoie une simulation de la v.a.r. Y démontre la bonne compréhension de la simulation demandée et permet certainement d'obtenir tous les points alloués à cette question.
  On procédera de même dans les autres questions **Scilab**.

b) Dans la déclaration de fonction qui suit, remplacer les « ··· » par des expressions en **Scilab** pour que la fonction ainsi déclarée simule la variable aléatoire C_n.

```
function C = SimuC(n, mu, v)
  C = 1
  for k = ...
    C = C ⋆ ...
  end
endfunction
```

Démonstration.

- **Début de la fonction**
  On commence par préciser la structure de la fonction :
  × cette fonction se nomme `SimuC`,
  × elle prend en entrée 3 paramètres `n`, `mu` et `v`,
  × elle admet pour variable de sortie `C`.

```
function C = SimuC(n, mu, v)
```

  On initialise la variable `C` à : $S_{0,n} = 1$.

```
  C = 1
```

- **Structure itérative**
  On met ensuite en place une structure itérative (boucle for) pour mettre à jour la variable `C`. Pour cela on utilise la relation :
  $$S_{k,n} \;=\; S_{k-1,n} \times \left(1 + \frac{\mu}{n} + \frac{v}{\sqrt{n}}\, Y_k\right)$$
  On effectue donc une boucle pour `k` variant de 1 à n puisque $C_n = S_{n,n}$.
  On rappelle qu'on simule la v.a.r. Y_k à l'aide de la fonction `mystere`. On complète donc la fonction `SimuC` de la façon suivante :

```
for k = 1:n
  C = C * (1 + mu / n + (v / sqrt(n)) * mystere())
end
```

□

5. a) Calculer l'espérance et la variance commune aux Y_k.

Démonstration.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

- La v.a.r. Y_k admet une variance (donc une espérance), car c'est une v.a.r. finie.
- Par définition de l'espérance :
  $$\mathbb{E}(Y_k) \;=\; -1 \times \mathbb{P}([Y_k = -1]) + 1 \times \mathbb{P}([Y_k = 1]) \;=\; -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \;=\; 0$$
- Par théorème de transfert :
  $$\mathbb{E}(Y_k^2) \;=\; (-1)^2 \times \mathbb{P}([Y_k = -1]) + 1^2 \times \mathbb{P}([Y_k = 1]) \;=\; \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \;=\; 1$$
  Par formule de Koenig-Huygens :
  $$\mathbb{V}(Y_k) \;=\; \mathbb{E}(Y_k^2) - \big(\mathbb{E}(Y_k)\big)^2 \;=\; 1 - 0^2 \;=\; 1$$
  $$\boxed{\mathbb{E}(Y_k) = 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(Y_k) = 1.}$$

□

b) (i) Montrer l'égalité : $C_n = \prod\limits_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{\mu}{n} + \frac{v}{\sqrt{n}}\, Y_k\right)$.

Démonstration.
Démontrons par récurrence : $\forall m \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(m)$ où $\mathcal{P}(m)$: $S_{m,n} = \prod\limits_{k=1}^{m} \left(1 + \frac{\mu}{n} + \frac{v}{\sqrt{n}}\, Y_k\right)$

▸ **Initialisation**
D'une part :
$$\begin{aligned} S_{1,n} &= S_{1-1,n} \times \left(1 + \frac{\mu}{n} + \frac{v}{\sqrt{n}}\, Y_1\right) \quad \textit{(d'après l'énoncé)} \\ &= S_{0,n} \times \left(1 + \frac{\mu}{n} + \frac{v}{\sqrt{n}}\, Y_1\right) \\ &= 1 \times \left(1 + \frac{\mu}{n} + \frac{v}{\sqrt{n}}\, Y_1\right) \end{aligned}$$
D'autre part :
$$\prod_{k=1}^{1} \left(1 + \frac{\mu}{n} + \frac{v}{\sqrt{n}}\, Y_k\right) \;=\; \left(1 + \frac{\mu}{n} + \frac{v}{\sqrt{n}}\, Y_1\right)$$
D'où $\mathcal{P}(1)$.

▸ **Hérédité** : soit $m \in \mathbb{N}^*$.

Supposons $\mathcal{P}(m)$ et démontrons $\mathcal{P}(m+1)$ (*i.e.* $S_{m+1,n} = \prod\limits_{k=1}^{m+1} \left(1 + \frac{\mu}{n} + \frac{v}{\sqrt{n}}\, Y_k\right)$).

$$\begin{array}{rcll} S_{m+1,n} & = & S_{m,n} \times \left(1 + \frac{\mu}{n} + \frac{v}{\sqrt{n}}\, Y_{m+1}\right) & \textit{(d'après l'énoncé)} \\ & = & \left(1 + \frac{\mu}{n} + \frac{v}{\sqrt{n}}\, Y_{m+1}\right) \prod\limits_{k=1}^{m} \left(1 + \frac{\mu}{n} + \frac{v}{\sqrt{n}}\, Y_k\right) & \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\ & = & \prod\limits_{k=1}^{m+1} \left(1 + \frac{\mu}{n} + \frac{v}{\sqrt{n}}\, Y_k\right) & \end{array}$$

D'où $\mathcal{P}(m+1)$.

Ainsi, par principe de récurrence : $\forall m \in \mathbb{N}^*$, $S_{m,n} = \prod\limits_{k=1}^{m} \left(1 + \frac{\mu}{n} + \frac{v}{\sqrt{n}}\, Y_k\right)$.

$$\boxed{\text{En particulier : } C_n = S_{n,n} = \prod\limits_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{\mu}{n} + \frac{v}{\sqrt{n}}\, Y_k\right).}$$

Commentaire

Remarquons que l'on démontre bien ici une égalité entre variables aléatoires.

□

(ii) En déduire : $\mathbb{E}(C_n) = \left(1 + \frac{\mu}{n}\right)^n$ et $\mathbb{V}(C_n) = \left(\left(1 + \frac{\mu}{n}\right)^2 + \frac{v^2}{n}\right)^n - \left(1 + \frac{\mu}{n}\right)^{2n}$.

Démonstration.

- La v.a.r. C_n admet une variance (donc une espérance) en tant que v.a.r. finie (C_n est un produit de v.a.r. finies).
- Tout d'abord :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{E}(C_n) & = & \mathbb{E}\left(\prod\limits_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{\mu}{n} + \frac{v}{\sqrt{n}}\, Y_k\right)\right) \\ & = & \prod\limits_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left(1 + \frac{\mu}{n} + \frac{v}{\sqrt{n}}\, Y_k\right) \end{array}$$

  où la dernière égalité est obtenue car les v.a.r. $1 + \frac{\mu}{n} + \frac{v}{\sqrt{n}}\, Y_1$, $\dots$, $1 + \frac{\mu}{n} + \frac{v}{\sqrt{n}}\, Y_n$ sont indépendantes par lemme des coalitions.
- Or, soit $k \in [\![1, n]\!]$:

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{E}\left(1 + \frac{\mu}{n} + \frac{v}{\sqrt{n}}\, Y_k\right) & = & 1 + \frac{\mu}{n} + \frac{v}{\sqrt{n}}\, \mathbb{E}(Y_k) & \textit{(par linéarité de l'espérance)} \\ & = & 1 + \frac{\mu}{n} + \cancel{\frac{v}{\sqrt{n}} \times 0} & \textit{(d'après }\textbf{5.a)}\textit{)} \\ & = & 1 + \frac{\mu}{n} & \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathbb{E}(C_n) = \prod\limits_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{\mu}{n}\right) = \left(1 + \frac{\mu}{n}\right)^n.}$$

- Ensuite :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(C_n^2) &= \mathbb{E}\left(\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{\mu}{n}+\frac{v}{\sqrt{n}}\,Y_k\right)\right)^2\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{\mu}{n}+\frac{v}{\sqrt{n}}\,Y_k\right)^2\right) \\
&= \prod_{k=1}^{n}\mathbb{E}\left(\left(1+\frac{\mu}{n}+\frac{v}{\sqrt{n}}\,Y_k\right)^2\right)
\end{aligned}$$

où la dernière égalité est obtenue car les v.a.r. $\left(1+\frac{\mu}{n}+\frac{v}{\sqrt{n}}\,Y_1\right)^2, \ldots, \left(1+\frac{\mu}{n}+\frac{v}{\sqrt{n}}\,Y_n\right)^2$ sont indépendantes par lemme des coalitions.

- Or, soit $k \in [\![1,n]\!]$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\left(1+\frac{\mu}{n}+\frac{v}{\sqrt{n}}\,Y_k\right)^2\right) &= \mathbb{E}\left(\left(1+\frac{\mu}{n}\right)^2+2\left(1+\frac{\mu}{n}\right)\frac{v}{\sqrt{n}}\,Y_k+\frac{v^2}{n}\,Y_k^2\right) \\
&= \left(1+\frac{\mu}{n}\right)^2+2\left(1+\frac{\mu}{n}\right)\frac{v}{\sqrt{n}}\,\mathbb{E}(Y_k)+\frac{v^2}{n}\,\mathbb{E}(Y_k^2) && \textit{(par linéarité de l'espérance)} \\
&= \left(1+\frac{\mu}{n}\right)^2+\cancel{2\left(1+\frac{\mu}{n}\right)\frac{v}{\sqrt{n}}\times 0}+\frac{v^2}{n}\times 1 && \textit{(d'après } \textbf{5.a)}\textit{)} \\
&= \left(1+\frac{\mu}{n}\right)^2+\frac{v^2}{n}
\end{aligned}$$

- D'où :

$$\mathbb{E}(C_n^2) = \prod_{k=1}^{n}\left(\left(1+\frac{\mu}{n}\right)^2+\frac{v^2}{n}\right) = \left(\left(1+\frac{\mu}{n}\right)^2+\frac{v^2}{n}\right)^n$$

- Par formule de Koenig-Huygens :

$$\mathbb{V}(C_n) = \mathbb{E}(C_n^2)-\big(E(C_n)\big)^2 = \left(\left(1+\frac{\mu}{n}\right)^2+\frac{v^2}{n}\right)^n-\left(\left(1+\frac{\mu}{n}\right)^n\right)^2$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathbb{V}(C_n) = \left(\left(1+\frac{\mu}{n}\right)^2+\frac{v^2}{n}\right)^n-\left(1+\frac{\mu}{n}\right)^{2n}.}$$

□

c) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}(C_n)$ et montrer : $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{V}(C_n) = \mathrm{e}^{2\mu}\big(\mathrm{e}^{v^2}-1\big)$.
Déterminer les paramètres de la loi log-normale ayant pour espérance la première limite et pour variance la seconde.

Démonstration.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\mathbb{E}(C_n) = \left(1+\frac{\mu}{n}\right)^n = \exp\left(\ln\left(\left(1+\frac{\mu}{n}\right)^n\right)\right) = \exp\left(n\,\ln\left(1+\frac{\mu}{n}\right)\right)$$

Par ailleurs, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\mu}{n} = 0$, on a : $\ln\left(1+\frac{\mu}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\mu}{n}$. D'où :

$$n\,\ln\left(1+\frac{\mu}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\,\frac{\mu}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \cancel{n}\frac{\mu}{\cancel{n}} = \mu \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mu$$

Or la fonction exp est continue en μ, donc, par composition de **limites**, $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}(C_n) = \mathrm{e}^{\mu}$.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(C_n) = \mathrm{e}^{\mu}}$$

Commentaire

- On rappelle que pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, on a :

$$\ln(1+u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$$

Ce résultat est obtenu par composition des limites à partir du résultat : $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$.

- Lorsqu'on étudie une suite de la forme $\left({u_n}^{a_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, il est classique d'utiliser l'écriture :

$${u_n}^{a_n} \; = \; \exp\left(a_n \; \ln(u_n)\right)$$

(il faut évidemment vérifier au préalable : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$)
Cette écriture n'est autre que la définition de ${u_n}^{a_n}$ si a_n n'est pas un entier. Il faut donc systématiquement penser à cette écriture dans ce cas. Comme le démontre la question précédente, cette écriture peut aussi être utile dans le cas où a_n est entier.

- Déterminons, si elle existe, $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{V}(C_n)$.

  × Tout d'abord, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\dfrac{\mu}{n}\right)^n = e^{\mu}$, on en déduit :

$$\left(1+\frac{\mu}{n}\right)^{2n} \; = \; \left(\left(1+\frac{\mu}{n}\right)^n\right)^2 \; \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \; (e^{\mu})^2 = e^{2\mu}$$

  × Ensuite :

$$\begin{aligned}\left(\left(1+\frac{\mu}{n}\right)^2 + \frac{v^2}{n}\right)^n \; &= \; \exp\left(n \ln\left(\left(1+\frac{\mu}{n}\right)^2 + \frac{v^2}{n}\right)\right) \\ &= \; \exp\left(n \ln\left(1 + 2\,\frac{\mu}{n} + \frac{\mu^2}{n^2} + \frac{v^2}{n}\right)\right) \\ &= \; \exp\left(n \ln\left(1 + (2\,\mu + v^2)\,\frac{1}{n} + \frac{\mu^2}{n^2}\right)\right)\end{aligned}$$

Par ailleurs, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} (2\mu+v^2)\,\dfrac{1}{n} + \dfrac{\mu^2}{n^2} = 0$, on a :

$$\ln\left(1 + (2\,\mu + v^2)\,\frac{1}{n} + \frac{\mu^2}{n^2}\right) \; \underset{n\to+\infty}{\sim} \; \left((2\,\mu + v^2)\,\frac{1}{n} + \frac{\mu^2}{n^2}\right)$$

D'où :

$$\begin{aligned}n \ln\left(1 + (2\,\mu + v^2)\,\frac{1}{n} + \frac{\mu^2}{n^2}\right) \; &\underset{n\to+\infty}{\sim} \; n\left((2\,\mu + v^2)\,\frac{1}{n} + \frac{\mu^2}{n^2}\right) \\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} \; \cancel{n} \times \frac{1}{\cancel{n}}\left(2\,\mu + v^2 + \frac{\mu^2}{n}\right) \\ &\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \; 2\,\mu + v^2\end{aligned}$$

Or la fonction exp est continue en $2\,\mu + v^2$, donc, par composition de **limites** :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\left(1+\frac{\mu}{n}\right)^2 + \frac{v^2}{n}\right)^n = e^{2\,\mu + v^2}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \lim_{n\to+\infty} \mathbb{V}(C_n) \; = \; e^{2\,\mu+v^2} - e^{2\,\mu} \; = \; e^{2\,\mu}\left(e^{v^2} - 1\right).}$$

- D'après la question ***3.b)***, on cherche des paramètres m et σ^2 tels que :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \mathrm{e}^{m+\frac{\sigma^2}{2}} & = & \mathrm{e}^{\mu} \\[2ex] \mathrm{e}^{2m+\sigma^2}\left(\mathrm{e}^{\sigma^2}-1\right) & = & \mathrm{e}^{2\mu}\left(\mathrm{e}^{v^2}-1\right) \end{array}\right.$$

On souhaite donc résoudre le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcccl} m & + & \dfrac{\sigma^2}{2} & = & \mu \\[1ex] 2m & + & \sigma^2 & = & 2\mu \\[1ex] & & \sigma^2 & = & v^2 \end{array}\right. \quad \underset{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1}{\Longleftrightarrow} \quad \left\{\begin{array}{rcccl} m & + & \dfrac{\sigma^2}{2} & = & \mu \\[1ex] & & \sigma^2 & = & v^2 \end{array}\right.$$

$$\underset{L_1 \leftarrow 2L_1 - L_2}{\Longleftrightarrow} \quad \left\{\begin{array}{rcl} 2m & = & 2\mu - v^2 \\ \sigma^2 & = & v^2 \end{array}\right.$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Ainsi, en choisissant } X \hookrightarrow \mathcal{LN}\left(\dfrac{2\mu - v^2}{2}, v^2\right)\text{, on obtient, d'après } \textbf{\textit{3.b)}} : \\ \mathbb{E}(X) = \mathrm{e}^{\mu} \text{ et } \mathbb{V}(X) = \mathrm{e}^{2\mu}\left(\mathrm{e}^{v^2}-1\right). \end{array}}$$

□

6. a) Expliciter un couple de réels (a_n, b_n) tel que :

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad \ln\left(1 + \frac{\mu}{n} + \frac{v}{\sqrt{n}}\, Y_k\right) = a_n + b_n\, Y_k$$

Démonstration.
Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Soit $\omega \in \Omega$. Deux cas se présentent :

× si $\omega \in [Y_k = -1]$, alors $Y_k(\omega) = -1$. On obtient d'une part :

$$\ln\left(1 + \frac{\mu}{n} + \frac{v}{\sqrt{n}}\, Y_k\right) \; = \; \ln\left(1 + \frac{\mu}{n} - \frac{v}{\sqrt{n}}\right)$$

D'autre part :

$$a_n + b_n\, Y_k \; = \; a_n - b_n$$

On obtient : $a_n - b_n \; = \; \ln\left(1 + \dfrac{\mu}{n} - \dfrac{v}{\sqrt{n}}\right)$.

× si $\omega \in [Y_k = 1]$, alors $Y_k(\omega) = 1$. Alors, en raisonnant comme précédemment :

$$a_n + b_n \; = \; \ln\left(1 + \frac{\mu}{n} + \frac{v}{\sqrt{n}}\right)$$

Comme $([Y_k = -1], [Y_k = 1])$ forme un système complet d'événements, on en déduit :

$$\ln\left(1 + \frac{\mu}{n} + \frac{v}{\sqrt{n}}\, Y_k\right) = a_n + b_n\, Y_k$$

$$\iff \quad \left\{\begin{array}{rcl} a_n - b_n & = & \ln\left(1 + \frac{\mu}{n} - \frac{v}{\sqrt{n}}\right) \\ a_n + b_n & = & \ln\left(1 + \frac{\mu}{n} + \frac{v}{\sqrt{n}}\right) \end{array}\right.$$

$$\underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\iff} \quad \left\{\begin{array}{rcl} a_n - b_n & = & \ln\left(1 + \frac{\mu}{n} - \frac{v}{\sqrt{n}}\right) \\ 2b_n & = & \ln\left(1 + \frac{\mu}{n} + \frac{v}{\sqrt{n}}\right) - \ln\left(1 + \frac{\mu}{n} - \frac{v}{\sqrt{n}}\right) \end{array}\right.$$

$$\underset{L_1 \leftarrow 2\,L_1 + L_2}{\iff} \quad \left\{\begin{array}{rcl} 2a_n & = & \ln\left(1 + \frac{\mu}{n} + \frac{v}{\sqrt{n}}\right) + \ln\left(1 + \frac{\mu}{n} - \frac{v}{\sqrt{n}}\right) \\ 2b_n & = & \ln\left(1 + \frac{\mu}{n} + \frac{v}{\sqrt{n}}\right) - \ln\left(1 + \frac{\mu}{n} - \frac{v}{\sqrt{n}}\right) \end{array}\right.$$

Finalement : $\ln\left(1 + \frac{\mu}{n} + \frac{v}{\sqrt{n}}\, Y_k\right) = a_n + b_n\, Y_k$ si et seulement si $a_n = \frac{1}{2}\left(\ln\left(1 + \frac{\mu}{n} + \frac{v}{\sqrt{n}}\right) + \ln\left(1 + \frac{\mu}{n} - \frac{v}{\sqrt{n}}\right)\right)$ et $b_n = \frac{1}{2}\left(\ln\left(1 + \frac{\mu}{n} + \frac{v}{\sqrt{n}}\right) - \ln\left(1 + \frac{\mu}{n} - \frac{v}{\sqrt{n}}\right)\right)$.

Commentaire

On peut noter que $\ln\left(1 + \frac{\mu}{n} - \frac{v}{\sqrt{n}}\right)$ et $\ln\left(1 + \frac{\mu}{n} + \frac{v}{\sqrt{n}}\right)$ sont bien définis car, d'après l'énoncé (en début de ***Partie II***) : $1 + \frac{\mu}{n} - \frac{v}{\sqrt{n}} > 0$.

Et on a donc : $1 + \frac{\mu}{n} + \frac{v}{\sqrt{n}} \geqslant 1 + \frac{\mu}{n} - \frac{v}{\sqrt{n}} > 0$

□

b) En déduire : $\ln(C_n) = n\, a_n + b_n \sum\limits_{k=1}^{n} Y_k$.

Démonstration.

- Tout d'abord, d'après ***5.b)(i)*** : $C_n = \prod\limits_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{\mu}{n} + \frac{v}{\sqrt{n}}\, Y_k\right)$.
  Or $1 + \frac{\mu}{n} + \frac{v}{\sqrt{n}} > 0$ et $1 + \frac{\mu}{n} - \frac{v}{\sqrt{n}} > 0$, on en déduit : $C_n(\Omega) \subset \,]0, +\infty[$.
  Donc la v.a.r. $\ln(C_n)$ est bien définie.
- Ensuite :

$$\begin{array}{rcll} \ln(C_n) & = & \ln\left(\prod\limits_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{\mu}{n} + \frac{v}{\sqrt{n}}\, Y_k\right)\right) & \textit{(d'après } \textbf{\textit{5.b)(i)}}\textit{)} \\ & = & \sum\limits_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{\mu}{n} + \frac{v}{\sqrt{n}}\, Y_k\right) & \\ & = & \sum\limits_{k=1}^{n} (a_n + b_n\, Y_k) & \textit{(d'après } \textbf{\textit{6.a)}}\textit{)} \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \ln(C_n) = n\, a_n + b_n \sum\limits_{k=1}^{n} Y_k}$$

□

c) Établir la convergence en loi, quand n tend vers $+\infty$, de $\dfrac{1}{\sqrt{n}}\,(Y_1 + \cdots + Y_n)$ vers la loi normale centrée réduite. On énoncera précisément le théorème utilisé.

Démonstration.

- La suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de v.a.r. :
  - × indépendantes,
  - × de même loi,
  - × de même variance non nulle (d'après ***5.a)***, elle vaut 1)

  Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note :

$$S_n = Y_1 + \cdots + Y_n \quad \text{et} \quad S_n^* = \frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{\sqrt{\mathbb{V}(S_n)}}$$

  (notons que la v.a.r. S_n admet une variance (et donc une espérance) en tant que somme de v.a.r. qui en admettent une)
  Alors, par théorème central limite : $S_n^* \underset{n\to+\infty}{\overset{\mathscr{L}}{\longrightarrow}} Z$, où $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$.

- Démontrons : $S_n^* = \dfrac{1}{\sqrt{n}}\,(Y_1 + \cdots + Y_n)$.
  - × Tout d'abord :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{E}(S_n) & = & \mathbb{E}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} Y_i\right) & \\ & = & \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{E}(Y_i) & \textit{(par linéarité de l'espérance)} \\ & = & \sum\limits_{i=1}^{n} 0 & \textit{(d'après } \textbf{\textit{5.a)}}\textit{)} \\ & = & 0 & \end{array}$$

  - × Ensuite :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{V}(S_n) & = & \mathbb{E}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} Y_i\right) & \\ & = & \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{V}(Y_i) & \textit{(car } Y_1,\ \ldots,\ Y_n \textit{ sont mutuellement indépendantes)} \\ & = & \sum\limits_{i=1}^{n} 1 & \textit{(d'après } \textbf{\textit{5.a)}}\textit{)} \\ & = & n & \end{array}$$

  - × Ainsi :

$$S_n^* \;=\; \frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{\sqrt{\mathbb{V}(S_n)}} \;=\; \frac{S_n}{\sqrt{n}} \;=\; \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} Y_i$$

$$\boxed{\text{On obtient bien : } \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} Y_i \underset{n\to+\infty}{\overset{\mathscr{L}}{\longrightarrow}} Z, \text{ où } Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1).}$$

□

7. a) Rappeler le développement limité à l'ordre 2 de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ au voisinage de 0.

Démonstration.

$$\boxed{\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)}$$

□

b) Déterminer les développements limités à l'ordre 2 au voisinage de 0 des fonctions $x \mapsto \ln(1 + vx + \mu x^2)$ et $x \mapsto \ln(1 - vx + \mu x^2)$.

Démonstration.

- D'après la question précédente, il existe une fonction ε définie dans un voisinage de 0, telle que, au voisinage de 0 :

$$\ln(1+u) \ = \ u - \frac{1}{2}\, u^2 + u^2\, \varepsilon(u) \qquad (*)$$

où : $\lim\limits_{u\to 0} \varepsilon(u) = 0$.

- Comme $\lim\limits_{x\to 0} vx + \mu x^2 = 0$, on peut appliquer cette égalité $(*)$ à $u = vx + \mu x^2$, pour x dans un voisinage de 0. On obtient :

$$\begin{aligned}
& \ln(1 + vx + \mu x^2) \\
= \ & \left(vx + \mu x^2\right) - \frac{1}{2}\left(vx + \mu x^2\right)^2 + \left(vx + \mu x^2\right)^2 \varepsilon\left(vx + \mu x^2\right) \\
= \ & vx + \mu x^2 - \frac{1}{2}\left(v^2\, x^2 + 2\, v\, \mu\, x^3 + \mu^2\, x^4\right) + \left(v^2\, x^2 + 2\, v\, \mu\, x^3 + \mu^2\, x^4\right) \varepsilon\left(vx + \mu\, x^2\right) \\
= \ & vx + \left(\mu - \frac{v^2}{2}\right) x^2 + x^2 \left(-v\, \mu\, x - \frac{1}{2}\, \mu^2\, x^2 + (v^2 + 2\, v\, \mu\, x + \mu^2\, x^2)\, \varepsilon(vx + \mu\, x^2)\right)
\end{aligned}$$

On note alors ε_1 la fonction définie au voisinage de 0 par :

$$\varepsilon_1 : x \mapsto -v\, \mu\, x - \frac{1}{2}\, \mu^2\, x^2 + (v^2 + 2\, v\, \mu\, x + \mu^2\, x^2)\, \varepsilon(vx + \mu\, x^2)$$

On obtient :

$$\ln(1 + vx + \mu x^2) \ = \ vx + \left(\mu - \frac{v^2}{2}\right) x^2 + x^2\, \varepsilon_1(x)$$

Il reste à démontrer $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_1(x) = 0$ pour en déduire :

$$\ln(1 + vx + \mu x^2) \ = \ vx + \left(\mu - \frac{v^2}{2}\right) x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$$

× Tout d'abord : $\lim\limits_{x\to 0} \ - v\, \mu\, x - \frac{1}{2}\, \mu^2\, x^2 = 0$.

× De plus, comme $\lim\limits_{x\to 0} vx + \mu\, x^2 = 0$, par théorème de composition des limites :

$$\lim_{x\to 0} \varepsilon(vx + \mu\, x^2) \ = \ \lim_{u\to 0} \varepsilon(u) \ = \ 0$$

× Enfin : $\lim\limits_{x\to 0} v^2 + 2\, v\, \mu\, x + \mu^2\, x^2 = v^2$.

On obtient bien : $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_1(x) = 0$.

$$\boxed{\text{Finalement : } \ln(1 + vx + \mu x^2) \ = \ vx + \left(\mu - \frac{v^2}{2}\right) x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2).}$$

- On procède de même pour la fonction $x \mapsto \ln(1 - vx + \mu x^2)$.
Comme $\lim\limits_{x \to 0} \ -vx + \mu x^2 = 0$, on peut appliquer l'égalité $(*)$ à $u = -vx + \mu x^2$, pour x dans un voisinage de 0. On obtient :

$$\begin{aligned}
& \ln(1 - vx + \mu x^2) \\
= \ & \left(-vx + \mu x^2\right) - \frac{1}{2}\left(-vx + \mu x^2\right)^2 + \left(-vx + \mu x^2\right)^2 \varepsilon\left(-vx + \mu x^2\right) \\
= \ & -vx + \mu x^2 - \frac{1}{2}\left(v^2\, x^2 - 2\, v\, \mu\, x^3 + \mu^2\, x^4\right) + \left(v^2\, x^2 - 2\, v\, \mu\, x^3 + \mu^2\, x^4\right) \varepsilon\left(-vx + \mu\, x^2\right) \\
= \ & -vx + \left(\mu - \frac{v^2}{2}\right) x^2 + x^2 \left(v\, \mu\, x - \frac{1}{2}\ \mu^2\, x^2 + (v^2 - 2\, v\, \mu\, x + \mu^2\, x^2)\, \varepsilon(-vx + \mu\, x^2)\right)
\end{aligned}$$

On note alors ε_2 la fonction définie au voisinage de 0 par :

$$\varepsilon_1 : x \mapsto v\, \mu\, x - \frac{1}{2}\ \mu^2\, x^2 + (v^2 - 2\, v\, \mu\, x + \mu^2\, x^2)\, \varepsilon(-vx + \mu\, x^2)$$

On obtient :

$$\ln(1 - vx + \mu x^2) \ = \ -vx + \left(\mu - \frac{v^2}{2}\right) x^2 + x^2\, \varepsilon_2(x)$$

Il reste à démontrer $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon_2(x) = 0$ pour en déduire :

$$\ln(1 - vx + \mu x^2) \ = \ -vx + \left(\mu - \frac{v^2}{2}\right) x^2 + \underset{x \to 0}{o}(x^2)$$

× Tout d'abord : $\lim\limits_{x \to 0} v\, \mu\, x - \dfrac{1}{2}\ \mu^2\, x^2 = 0$.

× De plus, comme $\lim\limits_{x \to 0} \ -vx + \mu\, x^2 = 0$, par théorème de composition des limites :

$$\lim_{x \to 0} \varepsilon(-vx + \mu\, x^2) \ = \ \lim_{u \to 0} \varepsilon(u) \ = \ 0$$

× Enfin : $\lim\limits_{x \to 0} v^2 - 2\, v\, \mu\, x + \mu^2\, x^2 = v^2$.

On obtient bien : $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon_2(x) = 0$.

$$\boxed{\text{Finalement : } \ln(1 - vx + \mu x^2) \ = \ -vx + \left(\mu - \frac{v^2}{2}\right) x^2 + \underset{x \to 0}{o}(x^2).}$$

□

c) Démontrer : $\lim\limits_{n \to +\infty} n\, a_n = \mu - \dfrac{v^2}{2}$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n}\, b_n = v$.
En déduire que b_n est strictement positif à partir d'un certain rang.
On suppose dans la suite que cette condition est réalisée.

Démonstration.

- Commençons par étudier la suite $(n\, a_n)$.

× Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après ***6.a)*** :

$$a_n \ = \ \frac{1}{2}\left(\ln\left(1 + v\ \frac{1}{\sqrt{n}} + \mu\ \frac{1}{n}\right) + \ln\left(1 - v\ \frac{1}{\sqrt{n}} + \mu\ \frac{1}{n}\right)\right)$$

× Rappelons que, d'après la question précédente, pour x dans un voisinage de 0 :

$$\ln(1+vx+\mu x^2) \ = \ vx + \left(\mu - \frac{v^2}{2}\right) x^2 + x^2\, \varepsilon_1(x)$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$, on peut appliquer cette égalité à $x = \frac{1}{\sqrt{n}}$ pour n dans un voisinage de $+\infty$. On obtient :

$$\ln\left(1+v\, \frac{1}{\sqrt{n}} + \mu\, \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2\right) \ = \ v\, \frac{1}{\sqrt{n}} + \left(\mu - \frac{v^2}{2}\right) \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2 \varepsilon_1\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_1\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_1(x) = 0$ par théorème de composition des limites.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \ln\left(1+\frac{v}{\sqrt{n}}+\frac{\mu}{n}\right) = \frac{v}{\sqrt{n}} + \left(\mu-\frac{v^2}{2}\right)\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\,\varepsilon_1\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).}$$

× De même :

$$\ln\left(1-v\, \frac{1}{\sqrt{n}} + \mu\, \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2\right) \ = \ -v\, \frac{1}{\sqrt{n}} + \left(\mu - \frac{v^2}{2}\right) \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2 \varepsilon_2\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_2\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_2(x) = 0$ par théorème de composition des limites.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \ln\left(1-\frac{v}{\sqrt{n}}+\frac{\mu}{n}\right) = -\frac{v}{\sqrt{n}} + \left(\mu-\frac{v^2}{2}\right)\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\,\varepsilon_2\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).}$$

× On en déduit :

$$\begin{aligned}
n\, a_n \ &= \ \frac{n}{2}\left(\cancel{\frac{v}{\sqrt{n}}} + \left(\mu-\frac{v^2}{2}\right)\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\,\varepsilon_1\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \cancel{\frac{v}{\sqrt{n}}} + \left(\mu-\frac{v^2}{2}\right)\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\,\varepsilon_2\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) \\
&= \ \frac{n}{2}\left(2\left(\mu-\frac{v^2}{2}\right)\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\left(\varepsilon_1\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) + \varepsilon_2\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)\right) \\
&= \ \mu - \frac{v^2}{2} + \frac{1}{2}\left(\varepsilon_1\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) + \varepsilon_2\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en conclut : } \lim_{n\to+\infty} n\, a_n = \mu - \frac{v^2}{2}.}$$

- On procède de même pour la suite $(\sqrt{n}\, b_n)$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après ***6.a)*** :

$$\begin{aligned}
\sqrt{n}\, b_n \ &= \ \frac{\sqrt{n}}{2}\left(\ln\left(1+v\,\frac{1}{\sqrt{n}}+\mu\,\frac{1}{n}\right) - \ln\left(1-v\,\frac{1}{\sqrt{n}}+\mu\,\frac{1}{n}\right)\right) \\
&= \ \frac{\sqrt{n}}{2}\left(\frac{v}{\sqrt{n}} + \cancel{\left(\mu-\frac{v^2}{2}\right)\frac{1}{n}} + \frac{1}{n}\,\varepsilon_1\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \left(-\frac{v}{\sqrt{n}} + \cancel{\left(\mu-\frac{v^2}{2}\right)\frac{1}{n}} + \frac{1}{n}\,\varepsilon_2\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)\right) \\
&= \ \frac{\sqrt{n}}{2}\left(\frac{2v}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}\left(\varepsilon_1\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \varepsilon_2\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)\right) \\
&= \ v + \frac{1}{2\sqrt{n}}\left(\varepsilon_1\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \varepsilon_2\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en conclut : } \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}\, b_n = 0.}$$

- Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n}\, b_n = v$ et $v \neq 0$, on a :

$$\sqrt{n}\, b_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v \qquad \text{donc} \qquad b_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{v}{\sqrt{n}}$$

Or :
× la suite $\left(\frac{v}{\sqrt{n}}\right)$ est à termes strictement positifs (car $v > 0$),
× deux suites équivalentes ont même signe à partir d'un certain rang.

$$\boxed{\text{On en déduit que les termes de la suite } (b_n) \text{ sont strictement positifs à partir d'un certain rang.}}$$

□

8. On note F_n la fonction de répartition de $\frac{1}{\sqrt{n}}(Y_1 + \cdots + Y_n)$ et G_n la fonction de répartition de $\ln(C_n)$.

Soit x un réel. On pose $y = \dfrac{x - \mu + \frac{v^2}{2}}{v}$.

a) Soit ε un réel strictement positif.

(i) Établir l'existence d'un réel η strictement positif tel que :

$$\Phi(y) - \frac{\varepsilon}{2} \ \leqslant\ \Phi(y-\eta) \ \leqslant\ \Phi(y+\eta) \ \leqslant\ \Phi(y) + \frac{\varepsilon}{2}$$

Démonstration.
La fonction Φ est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction de répartition d'une v.a.r. à densité.
En particulier, Φ est continue en y. Donc il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout $z \in \mathbb{R}$:

$$|z - y| \leqslant \eta \ \Rightarrow\ |\Phi(z) - \Phi(y)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

- En particulier, en choisissant $z = y + \eta$, on a bien :

$$|z - y| \ = \ |(\cancel{y} + \eta) - \cancel{y}| \ = \ \eta \ \leqslant\ \eta$$

Donc : $|\Phi(y+\eta) - \Phi(y)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.
Or, Φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (en effet : $\forall z \in \mathbb{R}$, $\Phi'(z) = \varphi(z) > 0$). Donc : $\Phi(y+\eta) - \Phi(y) > 0$. D'où :

$$|\Phi(y+\eta) - \Phi(y)| \ = \ \Phi(y+\eta) - \Phi(y)$$

Ainsi : $\Phi(y+\eta) \ \leqslant\ \Phi(y) + \frac{\varepsilon}{2}$.

- De même, en choisissant $z = y - \eta$, on a bien : $|(y-\eta) - y| \leqslant \eta$. Et donc, par stricte croissance de Φ sur $\mathbb{R}$:

$$\underbrace{|\Phi(y-\eta) - \Phi(y)|}_{= -(\Phi(y-\eta) - \Phi(y))} \quad \leqslant \quad \frac{\varepsilon}{2}$$

D'où : $\Phi(y) - \frac{\varepsilon}{2} \ \leqslant\ \Phi(y-\eta)$.

$$\boxed{\text{Finalement, il existe bien } \eta > 0 \text{ tel que : } \Phi(y) - \frac{\varepsilon}{2} \ \leqslant\ \Phi(y-\eta) \ \leqslant\ \Phi(y+\eta) \ \leqslant\ \Phi(y) + \frac{\varepsilon}{2}.}$$

□

(ii) Montrer qu'il existe un entier naturel n_1 tel que, pour tout $n \geqslant n_1$:

$$y - \eta \ \leqslant\ \frac{x - na_n}{\sqrt{n}\, b_n} \ \leqslant\ y + \eta$$

Démonstration.

- Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} n\, a_n = \mu - \dfrac{v^2}{2}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n}\, b_n = v$:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x - n\, a_n}{\sqrt{n}\, b_n} \ =\ \frac{x - \left(\mu - \frac{v^2}{2}\right)}{v} \ =\ \frac{x - \mu + \frac{v^2}{2}}{v} \ =\ y$$

- On en déduit que, pour tout $\varepsilon_0 > 0$, il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_1$:

$$\left| \frac{x - n\, a_n}{\sqrt{n}\, b_n} - y \right| \ \leqslant\ \varepsilon_0$$

- Or :

$$\begin{aligned} \left| \frac{x - n\, a_n}{\sqrt{n}\, b_n} - y \right| \ \leqslant\ \varepsilon_0 \quad &\Leftrightarrow \quad -\varepsilon_0 \leqslant \frac{x - n\, a_n}{\sqrt{n}\, b_n} - y \leqslant \varepsilon_0 \\ &\Leftrightarrow \quad y - \varepsilon_0 \leqslant \frac{x - n\, a_n}{\sqrt{n}\, b_n} \leqslant y + \varepsilon_0 \end{aligned}$$

Ainsi, en choisissant $\varepsilon_0 = \eta > 0$, il existe bien $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_1$:
$$y - \eta \ \leqslant\ \frac{x - n\, a_n}{\sqrt{n}\, b_n} \ \leqslant\ y + \eta.$$

□

(iii) Montrer qu'il existe un entier naturel n_2 tel que, pour tout $n \geqslant n_2$:

$$F_n(y + \eta) \leqslant \Phi(y + \eta) + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad F_n(y - \eta) \geqslant \Phi(y - \eta) - \frac{\varepsilon}{2}$$

Démonstration.

- D'après ***6.c)***, pour tout $z \in \mathbb{R}$: $\lim\limits_{n\to+\infty} F_n(z) \ =\ \Phi(z)$.

  Soit $z \in \mathbb{R}$. On obtient alors, pour tout $\varepsilon_1 > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$:

$$|F_n(z) - \Phi(z)| \ \leqslant\ \varepsilon_1$$

  c'est-à-dire :

$$-\varepsilon_1 \ \leqslant\ F_n(z) - \Phi(z) \ \leqslant\ \varepsilon_1$$

  ou encore :

$$\Phi(z) - \varepsilon_1 \ \leqslant\ F_n(z) \ \leqslant\ \Phi(z) + \varepsilon_1$$

- En appliquant cette relation à $\varepsilon_1 = \dfrac{\varepsilon}{2}$ et $z = y + \eta$, on obtient qu'il existe $n_3 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_3$:

$$\Phi(y + \eta) - \frac{\varepsilon}{2} \ \leqslant\ F_n(y + \eta) \ \leqslant\ \Phi(y + \eta) + \frac{\varepsilon}{2}$$

- En appliquant cette relation à $\varepsilon_1 = \dfrac{\varepsilon}{2}$ et $z = y - \eta$, on obtient qu'il existe $n_4 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_4$:

$$\Phi(y - \eta) - \frac{\varepsilon}{2} \ \leqslant\ F_n(y - \eta) \ \leqslant\ \Phi(y - \eta) + \frac{\varepsilon}{2}$$

En particulier, en choisissant $n_2 = \max(n_3, n_4)$, pour tout $n \geqslant n_2$:
$$F_n(y + \eta) \ \leqslant\ \Phi(y + \eta) + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad F_n(y - \eta) \ \geqslant\ \Phi(y - \eta) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

□

(iv) Montrer : $G_n(x) = F_n\left(\dfrac{x - na_n}{\sqrt{n}\, b_n}\right)$, et en déduire que, pour n assez grand, on a :

$$\left| G_n(x) - \Phi\left(\frac{x - \mu + \frac{v^2}{2}}{v}\right) \right| \leqslant \varepsilon$$

Démonstration.

$$\begin{array}{rcll} G_n(x) & = & \mathbb{P}([\ln(C_n) \leqslant x]) & \\ & = & \mathbb{P}\left(\left[n\, a_n + b_n \sum\limits_{k=1}^{n} Y_k \leqslant x\right]\right) & \text{(d'après } \textbf{6.b)}\text{)} \\ & = & \mathbb{P}\left(\left[b_n \sum\limits_{k=1}^{n} Y_k \leqslant x - n\, a_n\right]\right) & \\ & = & \mathbb{P}\left(\left[\dfrac{1}{\sqrt{n}} \sum\limits_{k=1}^{n} Y_k \leqslant \dfrac{x - n\, a_n}{\sqrt{n}\, b_n}\right]\right) & \text{(car } \sqrt{n} > 0 \text{ et } b_n > 0 \text{ à partir d'un certain rang (énoncé de la question } \textbf{7.a)(ii)}\text{))} \\ & = & F_n\left(\dfrac{x - n\, a_n}{\sqrt{n}\, b_n}\right) & \text{(par définition de } F_n\text{)} \end{array}$$

$$\boxed{G_n(x) \;=\; F_n\left(\frac{x - n\, a_n}{\sqrt{n}\, b_n}\right)}$$

□

(v) En déduire que, pour n assez grand, on a :

$$\left| G_n(x) - \Phi\left(\frac{x - \mu + \frac{v^2}{2}}{v}\right) \right| \leqslant \varepsilon$$

Démonstration.
On note $N = \max(n_1, n_2)$. Soit $n \geqslant N$.

- Tout d'abord, d'après ***8.a)(iii)*** :

$$\left| G_n(x) - \Phi\left(\frac{x - \mu + \frac{v^2}{2}}{v}\right) \right| = \left| F_n\left(\frac{x - n\, a_n}{\sqrt{n}\, b_n}\right) - \Phi(y) \right|$$

- Comme $n \geqslant N \geqslant n_1$, d'après ***8.a)(ii)*** :

$$y - \eta \leqslant \frac{x - n\, a_n}{\sqrt{n}\, b_n} \leqslant y + \eta$$

- De plus, la fonction F_n est croissante sur $\mathbb{R}$, car c'est une fonction de répartition. Donc :

$$\begin{array}{ccccl} F_n(y - \eta) & \leqslant & F_n\left(\dfrac{x - n\, a_n}{\sqrt{n}\, b_n}\right) & \leqslant & F_n(y + \eta) \\ \rotatebox{90}{$\geqslant$} & & & & \rotatebox{90}{$\leqslant$} \\ \Phi(y - \eta) - \dfrac{\varepsilon}{2} & & & & \Phi(y + \eta) + \dfrac{\varepsilon}{2} \quad \text{(d'après } \textbf{7.a)(iv)} \text{ car } n \geqslant N \geqslant n_2\text{)} \\ \rotatebox{90}{$\geqslant$} & & & & \rotatebox{90}{$\leqslant$} \\ \left(\Phi(y) - \dfrac{\varepsilon}{2}\right) - \dfrac{\varepsilon}{2} & & & & \left(\Phi(y) + \dfrac{\varepsilon}{2}\right) + \dfrac{\varepsilon}{2} \quad \text{(d'après } \textbf{7.a)(i)}\text{)} \end{array}$$

Finalement :

$$\Phi(y) - \varepsilon \leqslant F_n\left(\frac{x - n\, a_n}{\sqrt{n}\, b_n}\right) \leqslant \Phi(y) + \varepsilon$$

Ainsi : $-\varepsilon \ \leqslant \ F_n\left(\dfrac{x - n\,a_n}{\sqrt{n}\,b_n}\right) - \Phi(y) \ \leqslant \ \varepsilon$. D'où :

$$\left|F_n\left(\dfrac{x - n\,a_n}{\sqrt{n}\,b_n}\right) - \Phi(y)\right| \quad \leqslant \quad \varepsilon$$

$$\shortparallel$$

$$\left|G_n(x) - \Phi\left(\dfrac{x - \mu + \frac{v^2}{2}}{v}\right)\right|$$

> On en déduit qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant N$:
> $$\left|G_n(x) - \Phi\left(\dfrac{x - \mu + \frac{v^2}{2}}{v}\right)\right| \ \leqslant \ \varepsilon.$$

□

b) En conclure que la suite de variables aléatoires $\big(\ln(C_n)\big)_{n \geqslant 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire suivant une loi normale dont on précisera les paramètres.

Démonstration.

- On a démontré en question ***7.a)***, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists N \in \mathbb{N}, \ (n \geqslant N) \Rightarrow \left(\left|G_n(x) - \Phi\left(\dfrac{x - \mu + \frac{v^2}{2}}{v}\right)\right| \ \leqslant \ \varepsilon\right)$$

Donc, par définition de la limite, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{n \to +\infty} G_n(x) \ = \ \Phi\left(\dfrac{x - \mu + \frac{v^2}{2}}{v}\right)$$

- On note Z une v.a.r. de loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\Phi\left(\dfrac{x - \mu + \frac{v^2}{2}}{v}\right) &= \mathbb{P}\left(\left[Z \leqslant \dfrac{x - \mu + \frac{v^2}{2}}{v}\right]\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\left[v\,Z \leqslant x - \mu + \tfrac{v^2}{2}\right]\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\left[v\,Z + \mu - \dfrac{v^2}{2} \leqslant x\right]\right) \\
&= \mathbb{P}([T \leqslant x]) \qquad \textit{(où } T = v\,Z + \mu - \dfrac{v^2}{2}\textit{)}
\end{aligned}$$

Or, comme $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$, d'après la question ***1.*** (appliquée à $a = v$ et $b = \mu - \dfrac{v^2}{2}$) : $T \hookrightarrow \mathcal{N}\left(\mu - \dfrac{v^2}{2}, v^2\right)$.

Ainsi : $\Phi\left(\dfrac{x - \mu + \frac{v^2}{2}}{v}\right) = \Phi_{\mu - \frac{v^2}{2}, v^2}(x)$.

On reconnaît la fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}\left(\mu - \dfrac{v^2}{2}, v^2\right)$.

> On en déduit que $\big(\ln(C_n)\big)_{n \geqslant 1}$ converge en loi vers la v.a.r. T de loi $\mathcal{N}\left(\mu - \dfrac{v^2}{2}, v^2\right)$.

□

9. Démontrer que $(C_n)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire de loi log-normale de paramètres $\left(\mu - \dfrac{v^2}{2}, v^2\right)$.

Démonstration.

- Déterminons tout d'abord l'expression de la fonction de répartition d'une loi $\mathcal{LN}\left(\mu - \dfrac{v^2}{2}, v^2\right)$.

  On note D une v.a.r. de loi $\mathcal{LN}\left(\mu - \dfrac{v^2}{2}, v^2\right)$.
  Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent :
  - si $x \in \,]-\infty, 0]$, alors $[D \leqslant x] = \varnothing$ car $D(\Omega) \subset \,]0, +\infty[$. Donc :
  $$F_D(x) \ = \ \mathbb{P}([D \leqslant x]) \ = \ \mathbb{P}(\varnothing) \ = \ 0$$
  - si $x \in \,]0, +\infty[$.
  D'après la question ***3.*** : $G = \mathrm{e}^{-\left(\mu - \frac{v^2}{2}\right)} D \ \hookrightarrow \ \mathcal{LN}(0, v^2)$.
  Ainsi, d'après ***2.a)*** : $F_G(x) \ = \ \Phi\left(\dfrac{\ln(x)}{v^2}\right)$.
  D'où :
  $$\begin{aligned} F_D(x) &= \mathbb{P}\left(\left[\mathrm{e}^{\mu - \frac{v^2}{2}} \, G \leqslant x\right]\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\left[G \leqslant x \ \mathrm{e}^{-\left(\mu - \frac{v^2}{2}\right)}\right]\right) \\ &= \Phi\left(\dfrac{\ln\left(x \ \mathrm{e}^{-\left(\mu - \frac{v^2}{2}\right)}\right)}{v^2}\right) \\ &= \Phi\left(\dfrac{\ln(x) - \mu + \frac{v^2}{2}}{v^2}\right) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } F_D : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \,]-\infty, 0] \\ \Phi\left(\dfrac{\ln(x) - \mu + \frac{v^2}{2}}{v^2}\right) & \text{si } x \in \,]0, +\infty[\end{cases}.}$$

- Montrons maintenant que (C_n) converge en loi vers D.
  - On a déjà remarqué en question ***6.b)*** : $C_n(\Omega) \subset \,]0, +\infty[$.
  - Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent :
    - si $x \in \,]-\infty, 0]$, alors $[C_n \leqslant x] = \varnothing$, car $C_n(\Omega) \subset \,]0, +\infty[$. Donc :
    $$F_{C_n}(x) \ = \ \mathbb{P}([C_n \leqslant x]) \ = \ \mathbb{P}(\varnothing) \ = \ 0$$
    Or : $F_D(x) = 0$.
    On a donc bien : $\lim\limits_{n \to +\infty} F_{C_n}(x) = F_D(x)$.

- si $x \in \,]0, +\infty[$, alors :

$$\begin{array}{rcll} F_{C_n}(x) & = & \mathbb{P}([C_n \leqslant x]) & \\ & = & \mathbb{P}([\ln(C_n) \leqslant \ln(x)]) & \textit{(par stricte croissance de } \ln \textit{ sur }]0,+\infty[\textit{)} \\ & = & G_n\big(\ln(x)\big) & \end{array}$$

Or, d'après la question ***7.b)*** :

$$\begin{array}{ccc} \lim\limits_{n\to+\infty} G_n\big(\ln(x)\big) & = & \Phi\left(\dfrac{\ln(x) - \mu + \frac{v^2}{2}}{v^2}\right) \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ \lim\limits_{n\to+\infty} F_{C_n}(x) & & F_D(x) \end{array}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall x \in \mathbb{R}, \lim\limits_{n\to+\infty} F_{C_n}(x) = F_D(x).}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que } (C_n) \text{ converge en loi vers la v.a.r. } D \text{ qui suit la loi } \mathcal{LN}\left(\mu - \dfrac{v^2}{2}, v^2\right).}$$ $\square$

Partie III - La formule de Black et Scholes

Soit t un réel strictement positif. À la date 0, un investisseur achète sur un marché une option sur une action dont la date d'échéance est t et le prix d'exercice K, un réel strictement positif.

- Si à la date t, le cours C de l'action est supérieur ou égal à K, il peut acheter l'action au prix K et la revendre au prix C ;
- dans le cas contraire, son option n'a plus de valeur à la date t.

Le but de cette partie est de donner une valeur raisonnable au prix d'achat de l'option, que l'on note π_K.
On fait les hypothèses suivantes :

- On choisit comme unité le cours de l'action à la date 0 c'est-à-dire qu'à cet instant le cours de l'action vaut 1.
- Le cours de l'action à la date t est une variable aléatoire C qui suit une loi log-normale de paramètres (m, v^2).
- On suppose qu'il existe sur le marché un actif non risqué dont le taux de rentabilité entre les dates 0 et t vaut $e^r - 1$, où r est un réel strictement positif.
- On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par, pour tout x réel, $f(x) = \max(0, x)$.

10. a) Justifier que la valeur de l'option à la date t est $f(C - K)$.

Démonstration.
Soit $\omega \in \Omega$. À la date t, deux cas se présentent :

- si $C(\omega) \geqslant K$:
  - × d'une part, d'après l'énoncé, un investisseur peut acheter l'action au prix K et la revendre au prix $C(\omega)$.
    Ainsi la valeur de l'option à la date t est : $C(\omega) - K$.
  - × d'autre part :

$$\begin{array}{rcll} f\big(C(\omega) - K\big) & = & \max\big(0, C(\omega) - K\big) & \\ & = & C(\omega) - K & \textit{(car } C(\omega) - K \geqslant 0\textit{)} \end{array}$$

  Ainsi, la valeur de l'option à la date t est $f\big(C(\omega) - K\big)$.

- si $C(\omega) < K$:
  - × d'une part, toujours d'après l'énoncé, l'option n'a plus de valeur. Autrement dit, sa valeur à la date t est : 0.
  - × d'autre part :

$$\begin{array}{rcll} f\big(C(\omega) - K\big) & = & \max\big(0, C(\omega) - K\big) & \\ & = & 0 & \textit{(car } C(\omega) - K < 0\textit{)} \end{array}$$

  Ainsi, la valeur de l'option à la date t est bien $f\big(C(\omega) - K\big)$.

$$\boxed{\text{Finalement Ainsi, la valeur de l'option à la date } t \text{ est } f(C - K).}$$

□

b) Si au lieu d'acheter l'option, l'investisseur avait placé à la date 0 son prix d'achat π_K sur l'actif non risqué, quel serait la valeur de son placement à la date t ?

Démonstration.
Si l'investisseur a placé un prix π_K sur l'actif non risqué, alors, d'après l'énoncé, l'actif lui a rapporté à la date t : $\pi_K \times (\mathrm{e}^r - 1)$.

$$\boxed{\text{Ainsi, à la date } t\text{, la valeur de son placement est : } \pi_K + \pi_K\,(\mathrm{e}^r - 1) = \pi_K\,\mathrm{e}^r.}$$

□

c) En déduire qu'il convient de poser $\pi_K = \mathrm{e}^{-r}\,\mathbb{E}\big(f(C-K)\big)$ si l'on veut que ces deux stratégies aient la même rentabilité moyenne.
Dans les questions suivantes, c'est cette valeur de π_K que l'on utilise.

Démonstration.

- D'après la question ***10.a)***, la rentabilité moyenne de l'action à la date t est : $\mathbb{E}\big(f(C-K)\big)$.
- D'après la question ***10.b)***, la rentabilité de l'actif non risqué est : $\mathrm{e}^r\,\pi_K$.

Ainsi, ces 2 stratégies ont la même rentabilité si et seulement si :

$$\mathbb{E}\big(f(C-K)\big) \;=\; \mathrm{e}^r\,\pi_K$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Autrement dit, ces stratégies ont même rentabilité si et seulement si :}\\ \pi_K = \mathrm{e}^{-r}\,\mathbb{E}\big(f(C-K)\big).\end{array}}$$

□

11. a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

Démonstration.

- Commençons par simplifier l'expression de f.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent :
  × si $x < 0$, alors :
$$f(x) \;=\; \max(0,x) \;=\; 0$$
  × si $x \geqslant 0$, alors :
$$f(x) \;=\; \max(0,x) \;=\; x$$

$$\boxed{\text{Finalement : } f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}}$$

- La fonction f est donc continue :
  × sur $]-\infty, 0[$ en tant que fonction constante,
  × sur $]0, +\infty[$ en tant que fonction polynomiale,
  × en 0. En effet :
    - d'une part : $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 0$,
    - d'autre part : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = 0$.

  Ainsi : $\lim\limits_{x\to O^-} f(x) = f(0) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$.

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$$

□

b) Établir l'existence de $\mathbb{E}\big(f(C-K)\big)$ et l'égalité :

$$\mathbb{E}\big(f(C-K)\big) \;=\; \frac{1}{v\sqrt{2\pi}} \int_{\ln(K)}^{+\infty} (\mathrm{e}^x - K)\, \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2v^2}\right)\, dx$$

Démonstration.

- Par théorème de transfert, la v.a.r. $f(C-K)$ admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t-K)\, f_C(t)\, dt$ est absolument convergente.
  Or, pour tout $x \in \,]0,+\infty[$: $f(t-K)\, f_C(t) \geqslant 0$.
  Démontrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t-K)\, f_C(t)\, dt$ est absolument convergente équivaut donc à montrer qu'elle est convergente.
- Soit $t \in \,]0,+\infty[$. Calculons $f(t-K)$. Deux cas se présentent :
  × si $t < K$, alors : $t-K<0$. D'où, par définition de f :
  $$f(t-K) \;=\; 0$$
  × si $t \geqslant K$, alors : $t-K \geqslant 0$. D'où, toujours par définition de f :
  $$f(t-K) \;=\; t-K$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall t \in \,]0,+\infty[,\ f(t-K) = \begin{cases} 0 & \text{si } t<K \\ t-K & \text{si } t \geqslant K \end{cases}}$$

- Ainsi, comme $t \mapsto f(t-K)\, f_C(t)$ est nulle en dehors de $[K,+\infty[$:
  $$\int_0^{+\infty} f(t-K)\, f_C(t)\, dt \;=\; \int_K^{+\infty} f(t-K)\, f_C(t)\, dt$$
- Par ailleurs, on sait :
  × pour tout $t \in [K,+\infty[$:
  $$\begin{array}{lccccl} & 0 & \leqslant & f(t-K) & \leqslant & t-K \\ \text{donc} & 0 & \leqslant & f(t-K)\, f_C(t) & \leqslant & (t-K)\, f_C(t) \qquad \textit{(car } f_C(t) \geqslant 0\textit{)} \\ \text{d'où} & 0 & \leqslant & f(t-K)\, f_C(t) & \leqslant & t\, f_C(t) - K\, f_C(t) \end{array}$$
  × l'intégrale $\displaystyle\int_K^{+\infty} t\, f_C(t) - K\, f_C(t)\, dt$ est convergente. En effet :
    - l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\, f_C(t)\, dt$ est convergente car c'est le moment d'ordre 1 de C, et C admet une espérance d'après ***3.b)***,
    - l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_C(t)\, dt$ est convergente (et vaut 1) car c'est le moment d'ordre 0 de C.

  Par critère des intégrales généralisées de fonctions continues positives, $\displaystyle\int_K^{+\infty} f(t-K)\, f_C(t)\, dt$ est convergente.

$$\boxed{\text{On en déduit que la v.a.r. } f(C-K) \text{ admet une espérance.}}$$

- Comme $C \hookrightarrow \mathcal{LN}(m, v^2)$, alors il existe une v.a.r. D telle que : $C = \mathrm{e}^D$ (et $D \hookrightarrow \mathcal{N}\left(m, v^2\right)$).
Ainsi, par théorème de transfert, comme on sait déjà que $f(C-K) = f(\mathrm{e}^D - K)$ admet une espérance :

$$\mathbb{E}\big(f(C-K)\big) \; = \; \mathbb{E}\big(f(\mathrm{e}^D-K)\big) \; = \; \int_{-\infty}^{+\infty} f(\mathrm{e}^x - K)\, \varphi_{m,v^2}(x) \; dx$$

- De plus, d'après les calculs des points précédents, pour tout $x \in \mathbb{R}$:
  × si $\mathrm{e}^x < K$ (*i.e.* si $x < \ln(K)$), alors : $f(\mathrm{e}^x - K) \; = \; 0$.
  × si $\mathrm{e}^x \geqslant K$ (*i.e.* si $x \geqslant \ln(K)$), alors : $f(\mathrm{e}^x - K) \; = \; \mathrm{e}^x - K$.
  On en déduit :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\mathrm{e}^x - K)\, \varphi_{m,v^2}(x) \; dx \; = \; \int_{\ln(K)}^{+\infty} (\mathrm{e}^x - K)\, \varphi_{m,v^2}(x) \; dx$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \mathbb{E}\big(f(C-K)\big) = \frac{1}{v\sqrt{2\pi}} \int_{\ln(K)}^{+\infty} (\mathrm{e}^x - K) \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\,v^2}\right) \; dx.}$$

□

12. a) Montrer l'égalité :

$$\pi_K \; = \; \exp\left(m - r + \frac{v^2}{2}\right) \Phi\left(\frac{v^2 + m - \ln(K)}{v}\right) - K\,\mathrm{e}^{-r}\,\Phi\left(\frac{m - \ln(K)}{v}\right)$$

Démonstration.

- Tout d'abord, d'après ***10.c)*** :

$$\pi_K \; = \; \mathrm{e}^{-r}\; \mathbb{E}\big(f(C-K)\big)$$

- Or, d'après la question précédente :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\big(f(C-K)\big) \; &= \; \int_{\ln(K)}^{+\infty} (\mathrm{e}^x - K)\, \varphi_{m,v^2}(x) \; dx \\ &= \; \int_{\ln(K)}^{+\infty} \mathrm{e}^x\, \varphi_{m,v^2}(x) \; dx - K \int_{\ln(K)}^{+\infty} \varphi_{m,v^2}(x) \; dx \end{aligned}$$

- Étudions tout d'abord l'intégrale $\displaystyle\int_{\ln(K)}^{+\infty} \varphi_{m,v^2}(x) \; dx$.
  × On remarque d'abord :

$$\int_{\ln(K)}^{+\infty} \varphi_{m,v^2}(x) \; dx \; = \; 1 - \Phi_{m,v^2}\big(\ln(K)\big)$$

  × Exprimons alors Φ_{m,v^2} en fonction de Φ.
  D'après la question ***1.***, comme $D \hookrightarrow \mathcal{N}\left(m, v^2\right)$, alors $U = \dfrac{D-m}{v} \hookrightarrow \mathcal{N}\left(0, 1\right)$. On en déduit, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \Phi_{m,v^2}(x) \; &= \; \mathbb{P}\big(\, [D \leqslant x]\,\big) \\ &= \; \mathbb{P}\big(\, [D - m \leqslant x - m]\,\big) \\ &= \; \mathbb{P}\left(\left[\frac{D-m}{v} \leqslant \frac{x-m}{v}\right]\right) \quad \textit{(car } v > 0\textit{)} \\ &= \; \mathbb{P}\left(\left[U \leqslant \frac{x-m}{v}\right]\right) \\ &= \; \Phi\left(\frac{x-m}{v}\right) \end{aligned}$$

× On obtient alors :

$$1 - \Phi\big(\ln(K)\big) \;=\; 1 - \Phi\left(\frac{\ln(K)-m}{v}\right) \;=\; \Phi\left(-\frac{\ln(K)-m}{v}\right) \;=\; \Phi\left(\frac{m-\ln(K)}{v}\right)$$

(la 2^{nde} égalité est obtenue à l'aide de la propriété : $\forall x \in \mathbb{R},\ \Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$)

$$\boxed{\text{On en conclut : } \int_{\ln(K)}^{+\infty} \varphi_{m,v^2}(x)\ dx = \Phi\left(\frac{m-\ln(K)}{v}\right).}$$

- Étudions maintenant l'intégrale $\displaystyle\int_{\ln(K)}^{+\infty} \mathrm{e}^x\ \varphi_{m,v^2}(x)\ dx$.

× Pour tout $x \in [\ln(K), +\infty[$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^x\ \varphi_{m,v^2}(x) &= \frac{1}{v\sqrt{2\pi}}\ \mathrm{e}^x\ \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2v^2}\right)\\
&= \frac{1}{v\sqrt{2\pi}}\ \mathrm{e}^x\ \exp\left(-\frac{x^2-2mx+m^2}{2v^2}\right)\\
&= \frac{1}{v\sqrt{2\pi}}\ \exp\left(-\frac{m^2}{2v^2}\right)\ \exp\left(x-\frac{x^2-2mx}{2v^2}\right)\\
&= \frac{1}{v\sqrt{2\pi}}\ \exp\left(-\frac{m^2}{2v^2}\right)\ \exp\left(-\frac{x^2-2mx-2v^2x}{2v^2}\right)\\
&= \frac{1}{v\sqrt{2\pi}}\ \exp\left(-\frac{m^2}{2v^2}\right)\ \exp\left(-\frac{x^2-2(m+v^2)x}{2v^2}\right)\\
&= \frac{1}{v\sqrt{2\pi}}\ \exp\left(-\frac{m^2}{2v^2}\right)\ \exp\left(-\frac{\big(x-(m+v^2)\big)^2-(m+v^2)^2}{2v^2}\right)\\
&= \exp\left(-\frac{m^2}{2v^2}\right)\ \exp\left(\frac{(m+v^2)^2}{2v^2}\right) \times \frac{1}{v\sqrt{2\pi}}\ \exp\left(-\frac{\big(x-(m+v^2)\big)^2}{2v^2}\right)\\
&= \exp\left(\frac{-m^2+(m+v^2)^2}{2v^2}\right) \times \varphi_{m+v^2,v^2}(x)\\
&= \exp\left(\frac{-\cancel{m^2}+\cancel{m^2}+2mv^2+v^4}{2v^2}\right) \times \varphi_{m+v^2,v^2}(x)\\
&= \exp\left(m+\frac{v^2}{2}\right)\ \varphi_{m+v^2,v^2}(x)
\end{aligned}$$

× Ainsi :

$$\begin{aligned}
\int_{\ln(K)}^{+\infty} \mathrm{e}^x\ \varphi_{m,v^2}(x)\ dx &= \exp\left(m+\frac{v^2}{2}\right)\ \int_{\ln(K)}^{+\infty} \varphi_{m+v^2,v^2}(x)\ dx\\
&= \exp\left(m+\frac{v^2}{2}\right)\ \Big(1-\Phi_{m+v^2,v^2}\big(\ln(K)\big)\Big)
\end{aligned}$$

× Or, en raisonnant comme dans l'un des points précédents, on démontre :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \Phi_{m+v^2,v^2}(x) \ = \ \Phi\left(\frac{x-(m+v^2)}{v}\right)$$

On obtient :

$$\begin{aligned}\int_{\ln(K)}^{+\infty} \mathrm{e}^x \, \varphi_{m,v^2}(x) \, dx &= \exp\left(m+\frac{v^2}{2}\right) \ \left(1-\Phi_{m+v^2,v^2}\big(\ln(K)\big)\right) \\ &= \exp\left(m+\frac{v^2}{2}\right)\left(1-\Phi\left(\frac{\ln(K)-(m+v^2)}{v}\right)\right) \\ &= \exp\left(m+\frac{v^2}{2}\right) \ \Phi\left(-\frac{\ln(K)-(m+v^2)}{v}\right)\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en conclut : } \int_{\ln(K)}^{+\infty} \mathrm{e}^x \, \varphi_{m,v^2}(x) \, dx = \exp\left(m+\frac{v^2}{2}\right) \ \Phi\left(-\frac{v^2+m-\ln(K)}{v}\right).}$$

- On en déduit :

$$\begin{aligned}\pi_K &= \mathrm{e}^{-r} \ \mathbb{E}\big(f(C-K)\big) \\ &= \mathrm{e}^{-r}\left(\exp\left(m+\frac{v^2}{2}\right) \ \Phi\left(\frac{v^2+m-\ln(K)}{v}\right) - K \ \Phi\left(\frac{m-\ln(K)}{v}\right)\right)\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \pi_K = \exp\left(m-r+\frac{v^2}{2}\right) \ \Phi\left(\frac{v^2+m-\ln(K)}{v}\right) - K \ \mathrm{e}^{-r} \ \Phi\left(\frac{m-\ln(K)}{v}\right).}$$

□

b) On suppose que $m = r - \dfrac{v^2}{2}$, ce qui signifie que le rendement moyen de l'action et de l'actif non risqué sont identiques.
Établir la formule de Black-Scholes :

$$\pi_K \ = \ \Phi\left(\frac{r-\ln(K)}{v}+\frac{v}{2}\right) - K\,\mathrm{e}^{-r}\,\Phi\left(\frac{r-\ln(K)}{v}-\frac{v}{2}\right)$$

Démonstration.
D'après la question précédente :

$$\begin{aligned}\pi_K &= \exp\left(m-r+\frac{v^2}{2}\right) \ \Phi\left(\frac{v^2+m-\ln(K)}{v}\right) - K \ \mathrm{e}^{-r} \ \Phi\left(\frac{m-\ln(K)}{v}\right) \\ &= \exp\left(r-\frac{v^2}{2}-r+\frac{v^2}{2}\right) \ \Phi\left(\frac{v^2+r-\frac{v^2}{2}-\ln(K)}{v}\right) - K\,\mathrm{e}^{-r}\,\Phi\left(\frac{r-\frac{v^2}{2}-\ln(K)}{v}\right) \\ &= \mathrm{e}^0 \ \Phi\left(\frac{r-\ln(K)+\frac{v^2}{2}}{v}\right) - K\,\mathrm{e}^{-r}\,\Phi\left(\frac{r-\ln(K)-\frac{v^2}{2}}{v}\right)\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{D'où : } \pi_K = \Phi\left(\frac{r-\ln(K)}{v}+\frac{v}{2}\right) - K\,\mathrm{e}^{-r}\,\Phi\left(\frac{r-\ln(K)}{v}-\frac{v}{2}\right).}$$

□

13. Dans la pratique, le prix de l'option est fixé par le marché et vaut x, où x est un réel strictement positif. On pose $\theta = r - \ln(K)$, de sorte que le prix d'échéance vaut $K = \exp(r - \theta)$.
On appelle alors volatilité implicite de l'action, tout réel positif v, s'il en existe, tel que :

$$x \;=\; \Phi\left(\frac{\theta}{v} + \frac{v}{2}\right) - \mathrm{e}^{-\theta}\,\Phi\left(\frac{\theta}{v} - \frac{v}{2}\right)$$

On définit alors la fonction $\Psi : v \mapsto \Phi\left(\frac{\theta}{v} + \frac{v}{2}\right) - \mathrm{e}^{-\theta}\,\Phi\left(\frac{\theta}{v} - \frac{v}{2}\right)$ sur $]0, +\infty[$.

a) Montrer que Ψ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et que pour tout $v > 0$:

$$\Psi'(v) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\theta}{v} + \frac{v}{2}\right)^2\right)$$

Dresser le tableau de variations de Ψ en y faisant figurer les limites en 0 et en $+\infty$.
On distinguera les cas $\theta > 0$ et $\theta \leqslant 0$.

Démonstration.

- La fonction Ψ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ car elle est la combinaison linéaire $\Psi = \Phi \circ f_1 - \mathrm{e}^{-\theta}\,\Phi \circ f_2$ où :
  - × $\Phi \circ f_1$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ car :
    - $f_1 : v \mapsto \frac{\theta}{v} + \frac{v}{2}$ est :
      - ▸ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ en tant que somme de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$,
      - ▸ telle que : $f_1(]0, +\infty[) \subset \mathbb{R}$.
    - Φ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ car elle est une primitive de $\varphi : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)$ qui est continue sur $\mathbb{R}$.
  - × $\Phi \circ f_2$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ pour des raisons similaires.

$$\boxed{\text{La fonction } \Psi \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}_+^*.}$$

- Soit $v \in]0, +\infty[$.

$$\begin{aligned}
\Psi'(v) &= f_1'(v) \times \Phi' \circ f_1(v) - \mathrm{e}^{-\theta}\,f_2'(v) \times \Phi' \circ f_2(v) \\
&= \left(-\frac{\theta}{v^2} + \frac{1}{2}\right) \times \varphi\left(\frac{\theta}{v} + \frac{v}{2}\right) - \mathrm{e}^{-\theta}\left(-\frac{\theta}{v^2} - \frac{1}{2}\right) \times \varphi\left(\frac{\theta}{v} - \frac{v}{2}\right)
\end{aligned}$$

  × Or :

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{-\theta}\,\varphi\left(\frac{\theta}{v} - \frac{v}{2}\right) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\theta}\,\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\theta}{v} - \frac{v}{2}\right)^2\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\theta}\,\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\theta^2}{v^2} - \theta + \frac{v^2}{4}\right)\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\exp\left(-\theta - \frac{1}{2}\left(\frac{\theta^2}{v^2} - \theta + \frac{v^2}{4}\right)\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\exp\left(-\frac{2\theta}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{\theta^2}{v^2} - \theta + \frac{v^2}{4}\right)\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\exp\left(-\frac{1}{2}\left(2\theta + \frac{\theta^2}{v^2} - \theta + \frac{v^2}{4}\right)\right)
\end{aligned}$$

On obtient alors :

$$e^{-\theta}\,\varphi\left(\frac{\theta}{v}-\frac{v}{2}\right) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\theta^2}{v^2}+\theta+\frac{v^2}{4}\right)\right) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\theta}{v}+\frac{v}{2}\right)^2\right) \;=\; \varphi\left(\frac{\theta}{v}+\frac{v}{2}\right)$$

× Ainsi :

$$\begin{aligned}\Psi'(v) &= \left(-\frac{\theta}{v^2}+\frac{1}{2}\right)\varphi\left(\frac{\theta}{v}+\frac{v}{2}\right)-\left(-\frac{\theta}{v^2}-\frac{1}{2}\right)\varphi\left(\frac{\theta}{v}+\frac{v}{2}\right)\\ &= \left(-\cancel{\frac{\theta}{v^2}}+\frac{1}{2}-\left(-\cancel{\frac{\theta}{v^2}}-\frac{1}{2}\right)\right)\varphi\left(\frac{\theta}{v}+\frac{v}{2}\right)\\ &= \varphi\left(\frac{\theta}{v}+\frac{v}{2}\right)\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \Psi' : v \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\theta}{v}+\frac{v}{2}\right)^2\right).}$$

- D'après le point précédent :

$$\forall v>0,\quad \Psi'(v) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\theta}{v}+\frac{v}{2}\right)^2\right) \;>\; 0$$

On obtient le tableau de variations suivant :

v	0		$+\infty$
Signe de $\Psi'(x)$		$+$	
Variations de Ψ	$f(1-e^{-\theta})$	$\nearrow$	1

- Détaillons les éléments de ce tableau.

× Commençons par $\displaystyle\lim_{v\to+\infty}\Psi(v)$.

- Avec le changement de variable $u=\dfrac{\theta}{v}+\dfrac{v}{2}$, on obtient :

$$\lim_{v\to+\infty}\Phi\left(\frac{\theta}{v}+\frac{v}{2}\right) \;=\; \lim_{u\to+\infty}\Phi(u) \;=\; 1$$

où la dernière égalité est obtenue car Φ est une fonction de répartition.

- Avec le changement de variable $w=\dfrac{\theta}{v}-\dfrac{v}{2}$, on obtient :

$$\lim_{v\to+\infty}\Phi\left(\frac{\theta}{v}+\frac{v}{2}\right) \;=\; \lim_{w\to-\infty}\Phi(w) \;=\; 0$$

où la dernière égalité est obtenue car Φ est une fonction de répartition.

- On obtient : $\displaystyle\lim_{v\to+\infty}\Psi(v)=1-e^{-\theta}\times 0=1$.

$$\boxed{\lim_{v\to+\infty}\Psi(v)=1}$$

× Pour l'étude de $\lim\limits_{v\to 0} \Psi(v)$, deux cas se présentent :

- si $\theta \leqslant 0$, alors :

  ▶ avec le changement de variable $u = \dfrac{\theta}{v} + \dfrac{v}{2}$, on obtient :

$$\lim_{v\to 0} \Phi\left(\frac{\theta}{v} + \frac{v}{2}\right) \;=\; \lim_{u\to -\infty} \Phi(u) \;=\; 0$$

  ▶ avec le changement de variable $w = \dfrac{\theta}{v} - \dfrac{v}{2}$, on obtient :

$$\lim_{v\to 0} \Phi\left(\frac{\theta}{v} + \frac{v}{2}\right) \;=\; \lim_{w\to -\infty} \Phi(w) \;=\; 0$$

  ▶ on obtient : $\lim\limits_{v\to 0} \Psi(v) = 0 - \mathrm{e}^{-\theta} \times 0 = 0$.

- si $\theta > 0$, alors, en raisonnant de même :

  ▶ $\lim\limits_{v\to 0} \Phi\left(\dfrac{\theta}{v} + \dfrac{v}{2}\right) \;=\; \lim\limits_{u\to +\infty} \Phi(u) \;=\; 1$

  ▶ $\lim\limits_{v\to 0} \Phi\left(\dfrac{\theta}{v} + \dfrac{v}{2}\right) \;=\; \lim\limits_{w\to +\infty} \Phi(w) \;=\; 1$

  ▶ on obtient : $\lim\limits_{v\to 0} \Psi(v) = 1 - \mathrm{e}^{-\theta} \times 1 = 1 - \mathrm{e}^{-\theta}$.

$$\boxed{\text{Finalement : } \lim_{v\to 0} \Psi(v) = \begin{cases} 0 & \text{si } \theta \leqslant 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-\theta} & \text{si } \theta > 0 \end{cases}.}$$

□

b) Déterminer pour quelles valeurs de x il existe une volatilité implicite et prouver alors qu'elle est unique.
En conclure finalement que l'on peut définir *la* volatilité implicite si et seulement si :

$$f\left(1 - \mathrm{e}^{-\theta}\right) \;<\; x \;<\; 1$$

Démonstration.

- La fonction Ψ est :
  × continue (car de classe $\mathcal{C}^1$) sur $]0, +\infty[$,
  × strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

  Ainsi, Ψ réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur $\Psi(]0, +\infty[)$ où, d'après la question précédente :

$$\Psi(]0, +\infty[) \;=\; \left]\lim_{v\to 0} \Psi(v), \lim_{v\to +\infty} \Psi(v)\right[\;=\; \left]\lim_{v\to 0} \Psi(v), 1\right[$$

- On remarque ensuite : $\lim\limits_{v\to 0} \Psi(v) = f(1 - \mathrm{e}^{-\theta})$. En effet, on remarque :

$$\begin{aligned} 1 - \mathrm{e}^{-\theta} > 0 \;&\Leftrightarrow\; 1 > \mathrm{e}^{-\theta} \\ &\Leftrightarrow\; 0 > -\theta \quad \textit{(par stricte croissance de } \ln \textit{ sur } \mathbb{R}_+^*\textit{)} \\ &\Leftrightarrow\; 0 < \theta \end{aligned}$$

On en déduit, par définition de f :

$$f(1-\mathrm{e}^{-\theta}) \;=\; \begin{cases} 0 & \text{si } \theta \leqslant 0 \\ 1-\mathrm{e}^{-\theta} & \text{si } \theta > 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\lim_{v \to 0} \Psi(v) = f(1-\mathrm{e}^{-\theta})}$$

- On en déduit que la fonction Ψ réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur $\left]f(1-\mathrm{e}^{-\theta}), 1\right[$.
  L'équation $\Psi(v) = x$ admet donc une unique solution si et seulement si $x \in \left]f(1-\mathrm{e}^{-\theta}), 1\right[$.

Autrement dit, il existe une unique volatilité implicite si et seulement si $x \in \left]f(1-\mathrm{e}^{-\theta}), 1\right[$. On peut donc définir *la* volatilité implicite si et seulement si : $f(1-\mathrm{e}^{-\theta}) < x < 1$. $\square$