ESSEC II 2012

En psychologie, on s'intéresse à la façon dont un individu est amené à sélectionner une action quand un choix se présente entre différentes actions possibles. Ce choix peut être influencé par un grand nombre de facteurs impondérables, ce qui fait qu'il est légitime de le modéliser à l'aide de variables aléatoires. L'objet du problème est de présenter quelques éléments simples de la théorie des modèles de choix discret. Dans le modèle binaire le plus simple, le choix se fait en fonction de la réaction à un stimulus. Dans une première partie, on étudie la modélisation élémentaire de la réponse à un stimulus. Dans une deuxième partie, on considère une importante modélisation de choix dépendant du hasard, dit *modèle de Luce*, et on étudie ses propriétés. Enfin, dans une troisième partie, on regarde le cas où les différents choix possibles engendrent des réactions aléatoires et on étudie des propriétés de la réaction optimale. **Les trois parties sont indépendantes**.

Toutes les variables aléatoires sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. Si elles existent, on note $\mathbb{E}(T)$ et $\mathbb{V}(T)$ l'espérance et la variance d'une variable aléatoire T.

I. Modèles avec réponse discrète

Soit α un réel (positif ou négatif) représentant un niveau de stimulus. On considère une variable aléatoire réelle X à valeurs dans $\mathbb{R}$ représentant la tolérance de l'individu au stimulus en question. On considère donc que l'individu réagit si $X \leqslant \alpha$ et ne réagit pas si $X > \alpha$. On considère la variable aléatoire Y indicatrice de la réaction définie par :

$$Y = \begin{cases} 1 & \text{si } X \leqslant \alpha \\ 0 & \text{si } X > \alpha \end{cases}$$

Soit F la fonction de répartition de la variable aléatoire X.

1. Déterminer la loi de Y, son espérance θ et sa variance.

Démonstration.

- $Y(\Omega) = \{0, 1\}$. En effet, par définition, la v.a.r. Y ne prend que les valeurs 0 et 1.
- Par définition de Y, $[Y = 1] = [X \leqslant \alpha]$. Donc :

$$\mathbb{P}([Y = 1]) \ = \ \mathbb{P}([X \leqslant \alpha]) \ = \ F(\alpha)$$

Comme $Y(\Omega) = \{0, 1\}$: $\mathbb{P}([Y = 0]) \ = \ 1 - \mathbb{P}([Y = 1]) \ = \ 1 - F(\alpha)$.

$$\boxed{Y \text{ suit une loi de Bernoulli de paramètre } F(\alpha) : Y \hookrightarrow \mathcal{B}\left(F(\alpha)\right).}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \theta = \mathbb{E}(Y) = F(\alpha) \ \text{ et } \ \mathbb{V}(Y) = F(\alpha)(1 - F(\alpha)) = \theta(1 - \theta).}$$

□

2. On considère n individus dont on observe la réaction au stimulus. La tolérance de l'individu i est une variable aléatoire X_i dont on suppose qu'elle suit la même loi que X. En outre, les tolérances pour les différents individus sont supposées indépendantes.

a) Soit N la variable aléatoire égale au nombre d'individus réagissant au stimulus. Déterminer la loi de N, son espérance et sa variance.

Démonstration.

- Tout d'abord : $N(\Omega) = [\![0, n]\!]$. En effet, on considère une population de n individus. Au maximum, tous peuvent réagir au stimulus. Au minimum, il se peut qu'aucun ne réagisse. Toutes les valeurs intermédiaires sont possibles.
- On note Y_i la variable aléatoire définie par :

$$Y_i : \omega \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } X_i(\omega) \leqslant \alpha \\ 0 & \text{si } X_i(\omega) > \alpha \end{cases}$$

  La v.a.r. Y_i prend donc la valeur 1 si l'individu i réagit au stimulus et 0 sinon.

  $\boxed{\text{On obtient alors : } N = \sum\limits_{i=1}^{n} Y_i.}$

- Soit $i \in \mathbb{N}^*$.
  Comme X_i suit la même loi que X, Y_i suit la même loi que Y.

  $\boxed{\text{Ainsi, pour tout } i \in [\![1, n]\!] : Y_i \hookrightarrow \mathcal{B}(\theta).}$

- Comme les tolérances pour les différents individus sont indépendantes, les v.a.r. X_i sont indépendantes.

  $\boxed{\text{On en déduit, par lemme des coalitions, que les v.a.r. } Y_i \text{ sont indépendantes.}}$

- La v.a.r. N est donc une somme de n v.a.r. :
  × indépendantes,
  × de loi $\mathcal{B}(\theta)$.

  $\boxed{\text{Par stabilité des lois binomiales : } N \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \theta).}$

  $\boxed{\text{En particulier : } \mathbb{E}(N) = n\theta \text{ et } \mathbb{V}(N) = n\theta(1-\theta).}$

Commentaire

On introduit ici les v.a.r. Y_i suite à l'introduction des v.a.r. X_i par l'énoncé. Cependant, on pouvait également répondre à cette question de façon plus classique en décrivant l'expérience étudiée :

× L'expérience consiste en la succession de n épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre de succès. En effet :
  - les épreuves sont sont indépendantes, car les tolérances des individus sont supposées indépendantes,
  - le succès de chaque épreuve se produit avec probabilité :

$$\mathbb{P}([X \leqslant \alpha]) \;=\; \theta$$

× La v.a.r. N correspond au nombre de succès de cette expérience.

Ainsi : $N \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \theta)$.

□

b) Construire à l'aide de N un estimateur sans biais de θ.

Démonstration.

- D'après la question précédente : $\mathbb{E}(N) = n\,\theta$. Or :

$$\mathbb{E}(N) = n\,\theta \ \Leftrightarrow\ \frac{1}{n}\,\mathbb{E}(N) = \theta \ \Leftrightarrow\ \mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\,N\right) = \theta \quad \textit{(par linéarité de l'espérance)}$$

- La v.a.r. $\overline{Y}_n = \frac{1}{n}\,N = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} Y_i$ s'exprime :
  - × à l'aide d'un n-échantillon $(Y_1, \ldots, Y_n)$ de la v.a.r. Y.
  - × sans mention du paramètre θ.

$$\boxed{\text{La v.a.r. } \overline{Y}_n = \frac{1}{n}\,N \text{ est donc un estimateur de } \theta. \text{ De plus, par construction, } \overline{Y}_n \text{ est sans biais.}}$$

□

3. Soient m un réel et σ un réel strictement positif.
On suppose que la tolérance X est obtenue comme résultante d'un « grand nombre » n de facteurs indépendants de petite taille c'est-à-dire $X = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$, où les X_i sont supposées être des variables aléatoires de même loi d'espérance $\frac{m}{n}$ et de variance $\frac{\sigma^2}{n}$.

a) Déterminer l'espérance et l'écart-type de X.

Démonstration.

- La v.a.r. X admet une espérance en tant que somme de v.a.r. qui en admettent une.
- On obtient :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i) && \textit{(par linéarité de l'espérance)} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{m}{n} && \textit{(car, d'après l'énoncé : } \forall i \in [\![1, n]\!],\ \mathbb{E}(X_i) = \frac{m}{n}\textit{)} \\
&= \cancel{n}\,\frac{m}{\cancel{n}}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \mathbb{E}(X) = m}$$

- La v.a.r. X admet une variance en tant que somme de v.a.r. qui en admettent une.
- Déterminons d'abord $\mathbb{V}(X)$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(X) &= \mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}(X_i) && \textit{(car } X_1, \ldots, X_n \textit{ sont indépendantes)} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{\sigma^2}{n} && \textit{(car, d'après l'énoncé : } \forall i \in [\![1, n]\!],\ \mathbb{V}(X_i) = \frac{\sigma^2}{n}\textit{)} \\
&= \cancel{n}\,\frac{\sigma^2}{\cancel{n}} \ = \ \sigma^2
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \sigma(X) \ = \ \sqrt{\mathbb{V}(X)} \ = \ \sqrt{\sigma^2} \ = \ \sigma.}$$

Commentaire

La notation $X = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ est assez surprenante puisqu'elle ne fait pas apparaître la dépendance en n. C'est pourquoi, traditionnellement, on note plutôt : $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$.

□

b) Montrer, pour tout réel a :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left[\frac{X-m}{\sigma} \leqslant a\right]\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{a} \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\, du$$

Démonstration.

- La suite $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ est constituée de v.a.r. :
  - × indépendantes,
  - × de même loi,
  - × admettant la même espérance $\frac{m}{n}$,
  - × admettant la même variance $\frac{\sigma^2}{n} \neq 0$.

  On note $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i = X$. Ainsi, la v.a.r. centrée réduite associée à S_n est :

$$S_n^* = \frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{\sqrt{\mathbb{V}(S_n)}} = \frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sqrt{\mathbb{V}(X)}} = \frac{X-m}{\sigma}$$

  d'après les calculs précédents.

- Alors, d'après le théorème central limite :

$$S_n^* \underset{n\to+\infty}{\xrightarrow{\mathscr{L}}} Z \quad \text{où} \quad Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$$

  On a donc : $\forall a \in \mathbb{R}, \ \lim\limits_{n\to+\infty} F_{S_n^*}(a) = F_Z(a)$.

  Ou encore, en notant Φ la fonction de répartition de Z :

$$\forall a \in \mathbb{R}, \ \lim_{n\to+\infty} F_{\frac{X-m}{\sigma}}(a) = \Phi(a)$$

$$\boxed{\text{Finalement, pour tout } a \in \mathbb{R} : \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left[\frac{X-m}{\sigma} \leqslant a\right]\right) = \Phi(a) = \int_{-\infty}^{a} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\, du.}$$

□

c) Le résultat précédent justifie que pour n grand on peut considérer que la variable aléatoire $\dfrac{X-m}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite.
Trouver dans ce cas l'expression de θ en fonction de α, m et σ.

Démonstration.
On remarque :

$$\begin{aligned}
\theta &= \mathbb{P}([X \leqslant \alpha]) && \textit{(d'après } \textbf{\textit{1.}}\textit{)} \\
&= \mathbb{P}\left([X-m \leqslant \alpha - m]\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\left[\frac{X-m}{\sigma} \leqslant \frac{\alpha-m}{\sigma}\right]\right) && \textit{(car } \sigma > 0\textit{)} \\
&\simeq \mathbb{P}\left(\left[Z \leqslant \frac{\alpha-m}{\sigma}\right]\right) && \textit{(d'après la question précédente)} \\
&= \Phi\left(\frac{\alpha-m}{\sigma}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{\alpha-m}{\sigma}} \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\, du
\end{aligned}$$

$$\boxed{\theta = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{\alpha-m}{\sigma}} \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\, du.}$$

□

d) Déterminer $\lim\limits_{\sigma \to +\infty} \theta$ et interpréter le résultat.

Démonstration.

- On commence par remarquer : $\lim\limits_{\sigma\to+\infty} \dfrac{\alpha-m}{\sigma} = 0$.
- Comme l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\, du$ converge :

$$\lim_{\sigma\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{\alpha-m}{\sigma}} \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\, du \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\, du \;=\; \mathbb{P}([Z \leqslant 0]) \;=\; \Phi(0) \;=\; \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\lim_{\sigma\to+\infty} \theta = \frac{1}{2}.}$$

Si σ est très grand, alors la variance de X est très grande, c'est-à-dire la variance de la tolérance au stimulus est grande. Dans ce cas $\theta = P(X \leqslant \alpha)$ est proche de $\dfrac{1}{2}$, *i.e.* , un individu a autant de chance de réagir au stimulus que de ne pas réagir.

□

4. Plutôt que d'utiliser la loi normale, on préfère souvent une loi plus simple dont on étudie dans cette question quelques propriétés.

a) Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall y \in \mathbb{R},\ F(y) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-y}}$$

Montrer que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle. On dit alors que cette variable aléatoire suit la *loi logistique*.

Démonstration.

- La fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant qu'inverse d'une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et qui ne s'annule pas sur cet intervalle. Soit $y \in \mathbb{R}$.

$$F'(y) \ = \ -\frac{-\mathrm{e}^{-y}}{(1+\mathrm{e}^{-y})^2} \ = \ \frac{\mathrm{e}^{-y}}{(1+\mathrm{e}^{-y})^2} \ > \ 0$$

$$\boxed{\text{On en déduit que la fonction } F \text{ est (strictement) croissante sur } \mathbb{R}.}$$

- La fonction F est dérivable, donc continue sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\text{En particulier, } F \text{ est continue à droite en tout point de } \mathbb{R}.}$$

- Déterminons, si elles existent, $\lim\limits_{y\to+\infty} F(y)$ et $\lim\limits_{y\to-\infty} F(y)$.
  - × Comme $\lim\limits_{y\to+\infty} \mathrm{e}^{-y} = 0$: $\lim\limits_{y\to+\infty} F(y) \ = \ \dfrac{1}{1+0} \ = \ 1$.
  - × Comme $\lim\limits_{y\to-\infty} \mathrm{e}^{-y} = +\infty$: $\lim\limits_{y\to-\infty} F(y) = 0$.

$$\boxed{\lim_{y\to+\infty} F(y) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{y\to-\infty} F(y) = 0.}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que } F \text{ est la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle.}}$$

Commentaire

- Le programme officiel liste certaines des propriétés d'une fonction de répartition F :

  1) $\forall x \in \mathbb{R},\ 0 \leqslant F(x) \leqslant 1$.

  2) F est croissante sur $\mathbb{R}$.

  3) $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$.

  4) F est continue à droite en tout point $x \in \mathbb{R}$.

  Autrement dit : $\forall x \in \mathbb{R},\ \lim\limits_{\substack{t \to x \\ t > x}} F(t) = F(x)$.

  5) F admet une limite finie à gauche en tout point $x \in \mathbb{R}$.

  En revanche, le programme n'explicite pas la caractérisation suivante : toute fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui vérifie les propriétés ***2)***, ***3)*** et ***4)*** peut être considérée comme une fonction de répartition d'une variable aléatoire.

- À l'époque de ce sujet, la caractérisation ci-dessus était inscrite dans le programme (ce n'est plus le cas). Cependant, son utilisation semble toujours apparaître aux concours. Plus précisément, elle semble nécessaire pour traiter des questions portant sur la convergence en loi présentes dans les sujets `EML 2016` et `2017`. □

b) On suppose que X suit une loi logistique. Déterminer θ.

Démonstration.
D'après la question ***1.*** :

$$\theta \ = \ \mathbb{P}([X \leqslant \alpha]) \ = \ F(\alpha) \ = \ \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-\alpha}}$$

$$\boxed{\theta = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-\alpha}}}$$

□

On considère Z une variable aléatoire suivant la loi logistique.

c) Déterminer une densité de probabilité de Z.

Démonstration.

- La fonction F est :
  - × continue sur $\mathbb{R}$ en tant qu'inverse de la fonction $y \mapsto 1+\mathrm{e}^{-y}$:
    - – continue sur $\mathbb{R}$,
    - – et qui ne s'annule pas sur cet intervalle.
  - × de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ pour les mêmes raisons.

$$\boxed{\text{On en déduit que } Z \text{ est une v.a.r. à densité.}}$$

- Pour déterminer une densité f de Z, on dérive la fonction F sur l'intervalle ouvert $]-\infty,+\infty[$.
  Soit $y \in \mathbb{R}$.

$$f(y) \ = \ F'(y) \ = \ \frac{\mathrm{e}^{-y}}{(1+\mathrm{e}^{-y})^2}$$

$$\boxed{\text{Finalement, la fonction } f : y \mapsto \frac{\mathrm{e}^{-y}}{(1+\mathrm{e}^{-y})^2} \text{ est une densité de } Z.}$$

□

d) Soit y un réel positif. Établir une relation entre $F(y)$ et $F(-y)$.

Démonstration.
Soit $y \in \mathbb{R}$.

$$F(-y) \ = \ \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-y}} \ = \ \frac{\mathrm{e}^{y}}{\mathrm{e}^{y}\ (1+\mathrm{e}^{-y})} \ = \ \frac{\mathrm{e}^{y}}{1+\mathrm{e}^{y}} \ = \ \frac{(1+\mathrm{e}^{y})-1}{1+\mathrm{e}^{y}} \ = \ 1-\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-y}}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } y \in \mathbb{R}, \ \ F(-y) = 1-F(y).}$$

Commentaire

- La question n'est pas facile car il faut deviner par le calcul la relation à démontrer. La méthode la plus générale consiste à partir du plus compliqué (la quantité $F(-y)$) et de faire en sorte de faire apparaître le plus simple (la quantité $F(y)$).
- La présence de $F(y)$ et $F(-y)$ peut faire penser qu'il s'agit de déterminer la parité de F. Si c'était le cas, l'énoncé aurait sûrement été : « Démontrer que la fonction F est paire ».

Commentaire

- Profitons-en pour remarquer qu'une fonction de répartition F :
  × ne peut être paire sur $\mathbb{R}$. On procède par l'absurde.
  Supposons que F est paire sur $\mathbb{R}$. Autrement dit : $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = F(-x)$. Et ainsi :

$$\underbrace{\lim_{x\to+\infty} F(x)}_{=\,1} \;=\; \lim_{x\to+\infty} F(-x) \;=\; \underbrace{\lim_{x\to-\infty} F(x)}_{=\,0}$$

  Absurde !

  × ne peut être impaire sur $\mathbb{R}$. On procède par l'absurde.
  Supposons que F est impaire sur $\mathbb{R}$. On a alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$F(x) = -F(-x) \leqslant 0 \quad \textit{(puisque } F \textit{ est positive sur } \mathbb{R}\textit{)}$$

  On en déduit : $0 \leqslant F(x) \leqslant 0$. Ainsi : $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = 0$.
  Et alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 0 = 0$. Absurde !

e) Montrer que Z admet une espérance et la déterminer.

Démonstration.

- La v.a.r. Z admet une espérance si et seulement si l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} y\, f(y)\ dy$ est absolument convergente, ce qui équivaut à démontrer sa convergence pour des calculs de moments du type $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} y^m\, f(y)\ dy$.
- D'après la question précédente : $\forall y \in \mathbb{R},\ F(-y) = 1 - F(y)$.
  Donc, en dérivant, on obtient, pour tout $y \in \mathbb{R}$:

$$-f(-y) = -f(y), \quad \text{c'est-à-dire} \quad f(-y) = f(y)$$

  On en déduit que la fonction f est paire.

$$\boxed{\text{Ainsi, la fonction } y \mapsto y\, f(y) \text{ est impaire.}}$$

- Montrons alors que l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} y\, f(y)\ dy$ converge.
  - La fonction $y \mapsto y f(y)$ est continue sur $[0, +\infty[$.
  - Montrons que $y\, f(y) \underset{y\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{y^2}\right)$.

$$\frac{y\, f(y)}{\frac{1}{y^2}} \;=\; y^3\, f(y) \;=\; \frac{y^3 \mathrm{e}^{-y}}{(1+\mathrm{e}^{-y})^2}$$

  Or :
  × d'une part : $\lim\limits_{y\to+\infty} (1+\mathrm{e}^{-y})^2 = 1$,
  × d'autre part, par croissances comparées : $\lim\limits_{y\to+\infty} y^3 \mathrm{e}^{-y} = 0$.

  D'où : $\lim\limits_{y\to+\infty} y^3 f(y) = 0$, *i.e.* $y\, f(y) \underset{y\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{y^2}\right)$.

- On obtient :
  × $\forall y \in [1, +\infty[$, $y\, f(y) \geqslant 0$ et $\dfrac{1}{y^2} \geqslant 0$
  × $y\, f(y) = \underset{y \to +\infty}{o} \left(\dfrac{1}{y^2}\right)$
  × $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{y^2}\, dy$ est une intégrale de Riemann impropre en $+\infty$ d'exposant 2 ($2 > 1$). Elle est donc convergente.

  Par critère de négligeabilité d'intégrales généralisées de fonctions continues positives, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} yf(y)\, dy$ est convergente.
- Enfin, la fonction $y \mapsto y\, f(y)$ est continue sur le segment $[0,1]$, donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 yf(y)\, dy$ est bien définie.

$$\boxed{\text{On en déduit que l'intégrale } \int_0^{+\infty} y\, f(y)\, dy \text{ est convergente.}}$$

- Par imparité de la fonction $y \mapsto y\, f(y)$, on en conclut que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^0 y\, f(y)\, dy$ converge et :

$$\int_{-\infty}^0 y\, f(y)\, dy \ = \ - \int_0^{+\infty} y\, f(y)\, dy$$

Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} y\, f(y)\, dy$ converge.

$$\boxed{\text{La v.a.r. } Z \text{ admet donc une espérance.}}$$

De plus :

$$\mathbb{E}(Z) \ = \ \int_{-\infty}^{+\infty} y\, f(y)\, dy \ = \ \int_{-\infty}^0 y\, f(y)\, dy + \int_0^{+\infty} y\, f(y)\, dy \ = \ \cancel{- \int_0^{+\infty} y\, f(y)\, dy} + \cancel{\int_0^{+\infty} y\, f(y)\, dy} \ = \ 0$$

$$\boxed{\mathbb{E}(Z) = 0}$$

Commentaire

On rappelle que l'égalité :

$$\int_{-\infty}^0 y\, f(y)\, dy \ = \ - \int_0^{+\infty} y\, f(y)\, dy$$

se démontre à l'aide du changement de variable $\boxed{u = -x}$.

$u = -x$ (et donc $x = -u$)
$\hookrightarrow du = -\, dx$ et $dx = -\, du$
- $x = 0 \ \Rightarrow \ u = 0$
- $x = +\infty \ \Rightarrow \ u = -\infty$

Ce changement de variable est valide car $\psi : u \mapsto -u$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 0]$.

□

f) Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $]0,1[$.
Déterminer la loi de la variable aléatoire $\ln\left(\dfrac{U}{1-U}\right)$.

Démonstration.

- Notons $h : x \mapsto \ln\left(\dfrac{x}{1-x}\right)$, de telle sorte que $V = \ln\left(\dfrac{U}{1-U}\right) = h(U)$.
Comme $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$, alors $U(\Omega) =]0,1[$. On en déduit :

$$\begin{aligned} V(\Omega) &= \big(h(U)\big)(\Omega) \;=\; h\big(U(\Omega)\big) \\ &= h(]0,1[) \\ &= \Big]\lim_{x\to 0} h(0), \lim_{x\to 1} h(x)\Big[&& \text{\textit{(car h est continue et strictement croissante sur $]0,1[$ $(*)$)}} \\ &=]-\infty,+\infty[\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } V(\Omega) = \mathbb{R}}$$

On peut démontrer $(*)$ par une rapide étude de fonction :

× la fonction h est dérivable (donc continue) sur l'intervalle $]0,1[$ en tant que composée de fonctions dérivables.

× soit $x \in]0,1[$.

$$h'(x) = \dfrac{\frac{1\times(1-x)-x\times(-1)}{(1-x)^{\cancel{2}}}}{\frac{x}{\cancel{1-x}}} = \dfrac{\frac{1}{1-x}}{x} = \dfrac{1}{x(1-x)} > 0$$

Donc la fonction h est strictement croissante sur $]0,1[$.

- Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} F_V(x) &= \mathbb{P}([V \leqslant x]) \\ &= \mathbb{P}\left(\left[\ln\left(\dfrac{U}{1-U}\right) \leqslant x\right]\right) && \text{\textit{(par définition de V)}} \\ &= \mathbb{P}\left(\left[\dfrac{U}{1-U} \leqslant \mathrm{e}^x\right]\right) && \text{\textit{(par stricte croissance de $x \mapsto e^x$ sur $\mathbb{R}$)}} \\ &= \mathbb{P}\left([U \leqslant \mathrm{e}^x(1-U)]\right) && \text{\textit{(comme $U(\Omega) =]0,1[$, on a : $\forall \omega \in \Omega,\ 1-U(\omega) > 0$)}} \\ &= \mathbb{P}\left([U(1+\mathrm{e}^x) \leqslant \mathrm{e}^x]\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\left[U \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\right]\right) && \text{\textit{(car $1+e^x > 0$)}} \\ &= F_U\left(\dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\right) \\ &= \dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x} && \text{\textit{(car $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$ et $\dfrac{e^x}{1+e^x} \in]0,1[$)}} \\ &= \dfrac{\cancel{e^x} \times 1}{\cancel{e^x}(\mathrm{e}^{-x}+1)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } F_V : x \mapsto \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}.}$$

- On reconnaît la fonction de répartition d'une loi logistique. Or la fonction de répartition caractérise la loi.

$$\boxed{\text{Ainsi, la v.a.r. } V = \ln\left(\dfrac{U}{1-U}\right) \text{ suit la loi logistique.}}$$

□

II. Règles de décisions stochastiques : le modèle de Luce

On suppose maintenant que l'individu doit choisir une action dans un ensemble fini d'actions possibles A. On note $\mathcal{F} = \{S \subset A \mid |S| \geqslant 2\}$ où $|S|$ désigne le cardinal de l'ensemble S. Quand le nombre d'actions possibles est très grand, la procédure de choix se passe en deux temps : l'individu commence par sélectionner une partie S de $\mathcal{F}$ à laquelle il va restreindre son choix, puis choisit une action précise à l'intérieur de S.

Pour chaque élément S de $\mathcal{F}$, on définit une probabilité $\mathbb{P}_S$ sur S : pour a un élément de S, $\mathbb{P}_S(\{a\})$ représente la probabilité pour que l'individu ayant sélectionné S choisisse l'action a. Pour simplifier la notation, on notera $\mathbb{P}_S(a)$ pour $\mathbb{P}_S(\{a\})$. En particulier, $\mathbb{P}_A(S) = \sum\limits_{a\in S} \mathbb{P}_A(a)$ est la probabilité pour que l'individu prenne dans S l'action qu'il choisit.

Pour a et b distincts dans A on note $\mathbb{P}(a,b) = \mathbb{P}_{\{a,b\}}(\{a\})$; il s'agit donc de la probabilité de préférer l'action a à l'action b dans le cas d'un choix à faire entre a et b.

On suppose que pour tout S appartenant à $\mathcal{F}$ et tout a dans S, $\mathbb{P}_S(a) \neq 0$.

On fait l'hypothèse suivante sur le modèle :

$(*)$ Pour tout couple (S,T) d'éléments de $\mathcal{F}$ tel que S est inclus dans T, pour tout a élément de S,

$$\mathbb{P}_T(a) = \mathbb{P}_T(S)\,\mathbb{P}_S(a)$$

5. Interpréter le sens de la condition $(*)$ en termes de probabilités conditionnelles.

6. a) Soit k un réel strictement positif. On pose pour tout $a \in A$, $v(a) = k\,\mathbb{P}_A(a)$. Montrer que pour tout S appartenant à $\mathcal{F}$ et pour tout a dans S,

$$\mathbb{P}_S(a) = \frac{v(a)}{\sum\limits_{b\in S}^{v} (b)}. \tag{1}$$

b) Montrer que si v et w sont deux fonctions réelles définies sur A satisfaisant (1), il existe un réel μ strictement positif tel que $v = \mu \cdot w$. Une telle fonction v s'appelle une *utilité associée au système de probabilités* $(\mathbb{P}_S)_{S\in\mathcal{F}}$.

7. Réciproquement, soit v une fonction réelle strictement positive sur A. On pose, pour tout S dans $\mathcal{F}$ et tout a appartenant à S,

$$Q_S(a) = \frac{v(a)}{\sum\limits_{b\in S} v(b)}$$

Montrer qu'on définit ainsi un système de probabilités vérifiant $(*)$.

8. a) Soit v une utilité associée au système de probabilités $(\mathbb{P}_S)_{S\in\mathcal{F}}$. Montrer que pour tout $S \in \mathcal{F}$, et pour tous a et b dans S,

$$v(a) \leqslant v(b) \ \Rightarrow\ \mathbb{P}_S(a) \leqslant \mathbb{P}_S(b)$$

La probabilité que a soit choisi augmente donc avec son utilité.

b) Montrer qu'il existe une fonction ρ sur A telle que pour tous a et b distincts dans A,

$$\mathbb{P}(a,b) \ = \ \frac{1}{1+\exp(\rho(b)-\rho(a))}$$

c) Soit X une variable aléatoire suivant la loi logistique de fonction de répartition F définie par

$$F(y) \ = \ \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-y}}$$

Soient a et b distincts dans A. Trouver en fonction de ρ un réel $\alpha_{a,b}$ tel que $\mathbb{P}(a,b) = \mathbb{P}([X \leqslant \alpha_{a,b}])$.

9. a) Montrer que pour tout couple (S,T) d'éléments de $\mathcal{F}$ tel que S est inclus dans T, et pour tous a et b dans S, on a

$$\frac{\mathbb{P}_S(a)}{\mathbb{P}_S(b)} \ = \ \frac{\mathbb{P}_T(a)}{\mathbb{P}_T(b)}$$

Le rapport des probabilités de choix respectives de a et b est donc indépendant de la sélection de l'ensemble d'actions contenant a et b.

b) On examine ici un cas concret. On suppose que l'individu devant se rendre de son domicile à son travail ait le choix entre utiliser sa voiture (symbolisée par V) ou le bus, dont deux lignes sont possibles : le bus rouge (symbolisé par R) ou le bus bleu (B). On a donc l'ensemble d'actions $A = \{V,R,B\}$. On suppose que l'individu est indifférent au fait de choisir sa voiture ou un bus, et est également indifférent à la couleur du bus. On définit ainsi un système de probabilités comme précédemment avec $\mathbb{P}(V,R) = \mathbb{P}(V,B) = \dfrac{1}{2}$ et de plus $\mathbb{P}_A(R) = \mathbb{P}_A(B)$.
Démontrer : $\mathbb{P}_A(V) = \dfrac{1}{3}$. Ce résultat est-il satisfaisant ? Interpréter.

III. Utilités aléatoires

Dans cette partie, on aborde la question du choix sous un autre aspect. A chaque action i de l'ensemble d'actions $A = \{1,2,\dots,n\}$ est associée une variable aléatoire U_i représentant l'utilité de l'action i. L'individu est alors amené à choisir l'action qui maximise ces utilités. On suppose que les variables U_i sont indépendantes et que la loi de U_i est donnée par la fonction de répartition F_i. On s'intéresse dans cette partie à la valeur U de l'utilité maximale, c'est à dire à $U = \max(U_1,\dots,U_n)$.

10. a) Déterminer la fonction de répartition G_n de U. Que vaut G_n dans le cas particulier où les U_i suivent la même loi de fonction de répartition F ?

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Tout d'abord :

$$[\max(U_1,\dots,U_n) \leqslant x] \ = \ \bigcap_{i=1}^{n} \ [U_i \leqslant x]$$

- On obtient :

$$\begin{array}{rcll} G_n(x) & = & \mathbb{P}([U \leqslant x]) & \\ & = & \mathbb{P}([\max(U_1,\dots,U_n) \leqslant x]) & \\ & = & \mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{i=1}^{n} \ [U_i \leqslant x]\right) & \\ & = & \prod\limits_{i=1}^{n} \mathbb{P}([U_i \leqslant x]) & \textit{(car } U_1, \dots, U_n \textit{ sont indépendantes)} \\ & = & \prod\limits_{i=1}^{n} F_i(x) & \end{array}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } G_n : x \mapsto \prod_{i=1}^{n} F_i(x).}$$

- Dans le cas où les v.a.r. U_i suivent toutes la même loi, alors elles ont toutes la même fonction de répartition F. Ainsi, soit $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rcl} G_n(x) & = & \displaystyle\prod_{i=1}^{n} F(x) \\ & = & \big(F(x)\big)^n \end{array}$$

$$\boxed{\text{On obtient : } G_n : x \mapsto \big(F(x)\big)^n.}$$

□

On suppose désormais que les U_i ont même loi.

b) Pour x réel donné, étudier $\lim\limits_{n\to+\infty} G_n(x)$.

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$.
D'après la question précédente :

$$G_n(x) \;=\; \big(F(x)\big)^n$$

Or la suite $\left(\big(F(x)\big)^n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique de raison $F(x)$.
Deux cas se présentent donc :

× si $F(x) = 1$, alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} G_n(x) = 1$,

× si $F(x) < 1$, alors : $F(x) \in [0,1[\;\subset\;]-1,1[$. On en déduit : $\lim\limits_{n\to+\infty} G_n(x) = 0$.

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in \mathbb{R},\ \lim\limits_{n\to+\infty} G_n(x) \in \{0,1\}.}$$

□

c) Montrer que les seules lois pour lesquelles on a $G_n = F$ pour tout $n \geqslant 1$ sont les lois de variables aléatoires constantes.

Démonstration.

- Supposons : $\forall n \geqslant 1$, $G_n = F$.

  × Alors, en particulier, soit $x \in \mathbb{R}$:

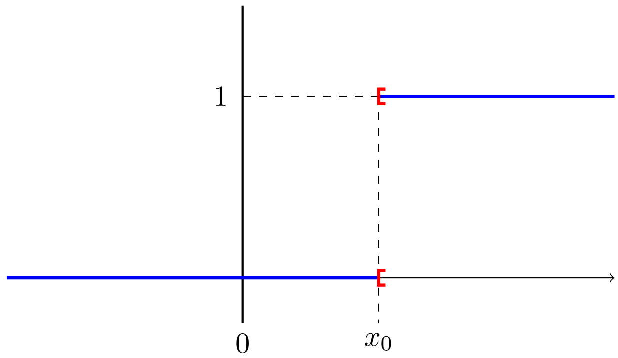
  $$\lim\limits_{n\to+\infty} G_n(x) \;=\; \lim\limits_{n\to+\infty} F(x) \;=\; F(x)$$

  Or, d'après la question précédente : $\lim\limits_{n\to+\infty} G_n(x) \in \{0,1\}$. Ainsi : $F(x) \in \{0,1\}$.

  × De plus, la fonction F est croissante et continue à droite sur $\mathbb{R}$, car c'est une fonction de répartition. On en déduit qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que :

  $$F : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \,]-\infty, x_0[\\ 1 & \text{si } x \in [x_0, +\infty[\end{cases}$$

  Autrement dit, la courbe représentative de F est la suivante :



  × On reconnaît la fonction de répartition d'une variable aléatoire constante égale à x_0.
  On en déduit que, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, U_i est une variable aléatoire constante égale à x_0.

- Réciproquement, supposons que, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, la v.a.r. U_i est une variable aléatoire constante égale à x_0.
  - × Alors :
$$F : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, x_0[\\ 1 & \text{si } x \in [x_0, +\infty[\end{cases}$$
En particulier : $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) \in \{0, 1\}$.
  - × Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent :
    - si $F(x) = 0$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$G_n(x) \;=\; \big(F(x)\big)^n \;=\; 0^n \;=\; 0 \quad \textit{(car } n > 0\textit{)}$$
Ainsi : $G_n(x) = F(x)$.
    - si $F(x) = 1$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$G_n(x) \;=\; \big(F(x)\big)^n \;=\; 1^n \;=\; 1$$
Ainsi : $G_n(x) = F(x)$.

  Finalement : $\forall x \in \mathbb{R}$, $G_n(x) = F(x)$; c'est-à-dire : $G_n = F$.

Les seules lois pour lesquelles on a $G_n = F$ pour tout $n \geqslant 1$ sont les lois de variables aléatoires constantes.

□

11. Pour obtenir un type de loi plus intéressant pour U, on va chercher des lois admettant une densité strictement positive sur $\mathbb{R}$ et dont la fonction de répartition F vérifie que pour tout $n \geqslant 1$ il existe $b_n \leqslant 0$ tel que pour tout x réel, $(F(x))^n = F(x + b_n)$.
On suppose qu'une telle loi existe et on cherche des conditions qu'elle vérifie.

a) Montrer que F est une fonction continue et strictement croissante telle que $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$. F définit donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0, 1[$.

Démonstration.

- La v.a.r. U est une variable aléatoire à densité.

  On en déduit que sa fonction de répartition F est continue sur $\mathbb{R}$.

- Sur tout intervalle ouvert I où la fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$, on a : $\forall x \in I$, $F'(x) = f(x)$.
  Or, d'après l'énoncé : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) > 0$.

  Ainsi, la fonction F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Enfin, comme F est une fonction de répartition : $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$.

□

b) Montrer que la suite $(b_n)_{n \geqslant 1}$ est décroissante.

Démonstration.
Soit $n \geqslant 1$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Tout d'abord :
$$F(x + b_{n+1}) \;=\; (F(x))^{n+1} \;=\; F(x)(F(x))^n$$
- D'après ***6.a)***, la fonction F réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0, 1[$. En particulier :
$$0 \;<\; F(x) \;<\; 1$$
- On en déduit :
$$\begin{array}{ccc} F(x)\big(F(x)\big)^n & < & \big(F(x)\big)^n \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ F(x + b_{n+1}) & & F(x + b_n) \end{array}$$
- De plus, d'après le théorème de la bijection, la bijection réciproque $F^{-1} :]0, 1[\to \mathbb{R}$ est strictement croissante. En appliquant F^{-1} de part et d'autre de l'inégalité, on en déduit :
$$x + b_{n+1} \;<\; x + b_n \quad \text{d'où} \quad b_{n+1} \;<\; b_n$$

$\boxed{\text{On en déduit que la suite } (b_n)_{n \geqslant 1} \text{ est décroissante (et même strictement décroissante).}}$ □

c) Soit (n, N) un couple d'entiers strictement positifs. On considère $U_1, \ldots, U_{nN}$, nN variables aléatoires indépendantes de même loi F, et on pose pour j tel que $1 \leqslant j \leqslant n$:
$$Y_j \;=\; \max(U_{(j-1)N+1}, \ldots, U_{jN}).$$
Montrer que les variables Y_j sont indépendantes.

Démonstration.
Soit $j \in [\![2, n-1]\!]$. On remarque :

× Y_{j-1} est une fonction des v.a.r. $U_{(j-2)N+1}, \ldots, U_{(j-1)N}$,

× Y_j est une fonction des v.a.r. $U_{(j-1)N+1}, \ldots, U_{jN}$,

× Y_{j+1} est une fonction des v.a.r. $U_{jN+1}, \ldots, U_{(j+1)N}$.

Or les v.a.r. $\big(U_{ik}\big)_{(i,k) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,N]\!]}$ sont mutuellement indépendantes.

$\boxed{\text{Ainsi, par lemme des coalitions, les v.a.r. } Y_j \text{ sont indépendantes.}}$ □

d) Quelle est la fonction de répartition de Y_j ?

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Tout d'abord :

$$\begin{aligned} [Y_j \leqslant x] &= \big[\max(U_{(j-1)N+1}, \dots, U_{jN}) \leqslant x\big] \\ &= \big[\max(U_{(j-1)N+1} \leqslant x\big] \cap \dots \cap [U_{jN}) \leqslant x] \\ &= \bigcap_{k=1}^{N} \big[U_{(j-1)N+k} \leqslant x\big] \end{aligned}$$

- On en déduit :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([Y_j \leqslant x]) &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{N} \big[U_{(j-1)N+k} \leqslant x\big]\right) \\ &= \prod_{k=1}^{N} \mathbb{P}(\big[U_{(j-1)N+k} \leqslant x\big]) && \textit{(car } U_{(j-1)N+1}, \dots, U_{jN} \textit{ sont indépendantes)} \\ &= \prod_{k=1}^{N} F(x) && \textit{(car } U_{(j-1)N+1}, \dots, U_{jN} \textit{ ont même fonction de répartition } F\textit{)} \\ &= \big(F(x)\big)^N \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } F_{Y_j} : x \mapsto \big(F(x)\big)^N.}$$

□

e) En remarquant que $\max(Y_1, \dots, Y_n) = \max(U_1, \dots, U_{nN})$, montrer, pour tout x réel :

$$F(x)^{nN} = F(x + b_n + b_N) = F(x + b_{nN}).$$

Déduire que pour tout couple (n, N) d'entiers strictement positifs : $b_{nN} = b_n + b_N$.

Démonstration.
Soit $(n, N) \in (\mathbb{N}^*)^2$.

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Par définition de la suite $(b_n)_{n\geqslant 1}$:
  - × d'une part :

$$\big(F(x)\big)^{nN} = F(x + b_{nN})$$

  - × d'autre part :

$$(F(x))^{nN} = \Big(\big(F(x)\big)^n\Big)^N = \big(F(x + b_n)\big)^N = F\big((x + b_n) + b_N\big) = F(x + b_n + b_N)$$

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in \mathbb{R},\ F(x + b_n + b_N) = (F(x))^{nN} = F(x + b_{nN}).}$$

- La relation précédente est vérifiée pour tout $x \in \mathbb{R}$. Elle est donc vérifiée pour $x = 0$. Ainsi :

$$F(b_n + b_N) = F(b_{nN})$$

$$\boxed{\text{Or la fonction } F \text{ est bijective. D'où, pour tout } (n, N) \in (\mathbb{N}^*)^2 : b_{nN} = b_n + b_N.}$$

□

f) Montrer que pour tout entier n strictement positif et tout $k \in \mathbb{N}$: $b_{n^k} = k\, b_n$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrons par récurrence : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(k)$ où $\mathcal{P}(k)$: $b_{n^k} = k\, b_n$.

▸ **Initialisation** :

- D'une part, $b_{n^0} = b_1$.
  De plus, par définition de b_1, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $F(x+b_1) = \big(F(x)\big)^1 = F(x+0)$.
  Or F est bijective, donc $b_1 = 0$.
- D'autre part, $0 \times b_n = 0$.

D'où $\mathcal{P}(0)$.

▸ **Hérédité** : soit $k \in \mathbb{N}$.
Supposons $\mathcal{P}(k)$ et démontrons $\mathcal{P}(k+1)$ (*i.e.* $b_{n^{k+1}} = (k+1)\, b_n$).

$$\begin{array}{rcll} b_{n^{k+1}} & = & b_{n \cdot n^k} & \\ & = & b_n + b_{n^k} & \textit{(d'après } \textbf{\textit{2.e)}} \textit{ appliquée à } N = n^k\textit{)} \\ & = & b_n + k\, b_n & \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\ & = & (k+1)\, b_n & \end{array}$$

D'où $\mathcal{P}(k+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence, pour tout } (n,k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N} : b_{n^k} = k\, b_n.}$$

□

g) Soient p et m deux entiers strictement positifs. Montrer qu'il existe un unique $k_m \in \mathbb{N}$ tel que $2^{k_m} \leqslant p^m < 2^{k_m+1}$ et que $\lim\limits_{m \to +\infty} \dfrac{k_m}{m} = \dfrac{\ln(p)}{\ln(2)}$.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$\begin{array}{rll} & 2^k \leqslant p^m < 2^{k+1} & \\ \Leftrightarrow & k \ln(2) \leqslant m \ln(p) < (k+1)\ln(2) & \textit{(par croissance de la fonction } \ln \textit{ sur }]0,+\infty[\textit{)} \\ \Leftrightarrow & k \leqslant m\, \dfrac{\ln(p)}{\ln(2)} < k+1 & \textit{(car } \ln(2) > 0\textit{)} \end{array}$$

- Or le nombre k est un entier. On reconnaît donc la définition de la partie entière.
  Plus précisément :

$$k \leqslant m\, \frac{\ln(p)}{\ln(2)} < k+1 \quad \Leftrightarrow \quad k = \left\lfloor m\, \frac{\ln(p)}{\ln(2)} \right\rfloor$$

$$\boxed{\text{On en déduit qu'il existe un unique } k_m \text{ tel que } 2^{k_m} \leqslant p^m < 2^{k_m+1} : k_m = \left\lfloor m\, \frac{\ln(p)}{\ln(2)} \right\rfloor.}$$

- Par définition de la partie entière :
$$m\,\frac{\ln(p)}{\ln(2)} - 1 \;<\; \left\lfloor m\,\frac{\ln(p)}{\ln(2)} \right\rfloor \;\leqslant\; m\,\frac{\ln(p)}{\ln(2)}$$
Comme $m > 0$:
$$\frac{\ln(p)}{\ln(2)} - \frac{1}{m} \;<\; \frac{k_m}{m} \;\leqslant\; \frac{\ln(p)}{\ln(2)}$$
Or :
× $\displaystyle\lim_{m\to+\infty} \frac{\ln(p)}{\ln(2)} - \frac{1}{m} = \frac{\ln(p)}{\ln(2)}$,
× $\displaystyle\lim_{m\to+\infty} \frac{\ln(p)}{\ln(2)} = \frac{\ln(p)}{\ln(2)}$.

$$\boxed{\text{Ainsi, par théorème d'encadrement : } \lim_{m\to+\infty} \frac{k_m}{m} = \frac{\ln(p)}{\ln(2)}.}$$

Commentaire

Soit $x \in \mathbb{R}$. On rappelle la définition de $\lfloor x \rfloor$:
$$\lfloor x \rfloor \;\leqslant\; x \;<\; \lfloor x \rfloor + 1$$
ou encore :
$$x - 1 \;<\; \lfloor x \rfloor \;\leqslant\; x$$

□

h) En déduire qu'il existe un réel γ tel que pour tout entier p strictement positif, $b_p = \gamma\,\ln(p)$.

Démonstration.

- Tout d'abord, d'après la question précédente :
$$2^{k_m} \;\leqslant\; p^m \;<\; 2^{k_m+1}$$
De plus, d'après ***6.b)***, la suite $(b_n)_{n\geqslant 1}$ est strictement décroissante. On en déduit :
$$b_{2^{k_m+1}} \;<\; b_{p^m} \;\leqslant\; b_{2^{k_m}}$$
- D'après la question ***6.f)***, on obtient :
$$(k_m+1)\,b_2 \;<\; m\,b_p \;\leqslant\; k_m\,b_2$$
- Toujours d'après la question ***6.f)*** : $b_1 = 0$.
Or, d'après ***6.b)***, la suite (b_n) est strictement décroissante.
On en déduit : $b_2 < 0$.
- Ainsi :
$$k_m \;\leqslant\; m\,\frac{b_p}{b_2} \;<\; k_m + 1$$
Comme $m > 0$, on obtient :
$$\frac{k_m}{m} \;\leqslant\; \frac{b_p}{b_2} \;<\; \frac{k_m}{m} + \frac{1}{m}$$

- Or, d'après la question précédente :
  × $\lim\limits_{m\to+\infty} \dfrac{k_m}{m} = \dfrac{\ln(p)}{\ln(2)}$,
  × $\lim\limits_{m\to+\infty} \dfrac{k_m}{m} + \dfrac{1}{m} = \dfrac{\ln(p)}{\ln(2)}$.

  Ainsi, par théorème d'encadrement :

$$\underbrace{\lim_{m\to+\infty} \frac{b_p}{b_2}}_{=\frac{b_p}{b_2}} = \frac{\ln(p)}{\ln(2)}$$

  On en déduit : $b_p = b_2 \dfrac{\ln(p)}{\ln(2)} = \dfrac{b_2}{\ln(2)} \ \ln(p)$.

$$\boxed{\text{Finalement, en posant } \gamma = \frac{b_2}{\ln(2)}, \text{ pour tout } p > 0 : b_p = \gamma \ln(p).}$$

□

i) Montrer que la fonction $F(x) = \exp\left(-\mathrm{e}^{-x}\right)$ satisfait aux conditions cherchées.
La loi ainsi définie est dite loi de Gumbel.

Démonstration.
On note X une v.a.r. de fonction de répartition F. On cherche à montrer que la fonction F est une fonction de répartition :

× d'une v.a.r. à densité,
× dont une densité est strictement positive sur $\mathbb{R}$,
× vérifiant que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $b_n \leqslant 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\big(F(x)\big)^n = F(x+b_n)$.

- La fonction F est :
  × continue sur $\mathbb{R}$ en tant que composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$,
  × de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ pour la même raison.

$$\boxed{\text{La v.a.r. } X \text{ est une v.a.r. à densité.}}$$

- La fonction F est dérivable (car de classe $\mathcal{C}^1$) sur $\mathbb{R}$.
  Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$f(x) \ = \ F'(x) \ = \ \mathrm{e}^{-x} \ \exp\left(-\mathrm{e}^{-x}\right) \ > \ 0$$

$$\boxed{\text{Une densité } f \text{ de } X \text{ est strictement positive sur } \mathbb{R}.}$$

- Soit $n \geqslant 1$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} (F(x))^n &= (\exp(-\mathrm{e}^{-x}))^n = \exp(-n\mathrm{e}^{-x}) \\ &= \exp(-\mathrm{e}^{\ln(n)}\mathrm{e}^{-x}) = \exp(-\mathrm{e}^{-x+\ln(n)}) \\ &= \exp(-\mathrm{e}^{-(x-\ln(n))}) \\ &= F(x-\ln(n)) \end{aligned}$$

  On en déduit, en choisissant $b_n = -\ln(n)$: $(F(x))^n = F(x+b_n)$.
  On a alors bien : $b_n \leqslant 0$.

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \text{ il existe } b_n \leqslant 0 \text{ tel que pour tout } x \in \mathbb{R} : \big(F(x)\big)^n = F(x+b_n).}$$

□

12. Dans cette section, on étudie un certain nombre de propriétés de la loi de Gumbel. Soit X une variable aléatoire de loi de Gumbel c'est-à-dire de fonction de répartition F telle que $F(x) = \exp(-\mathrm{e}^{-x})$.

a) Déterminer une densité de probabilité de X.

Démonstration.

$$\boxed{\text{D'après la question précédente : } f : x \mapsto \mathrm{e}^{-x}\ \exp\left(-\mathrm{e}^{-x}\right).}$$

□

b) On pose $Z = \mathrm{e}^{-X}$. Déterminer la loi de la variable aléatoire Z.

Démonstration.

- Par définition : $Z = \mathrm{e}^{-X}$. Donc : $Z(\Omega) \subset \left]0, +\infty\right[$.
- Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent :
  × si $x \in \left]-\infty, 0\right]$. Alors $[Z \leqslant x] = \varnothing$, car $Z(\Omega) \subset \left]0, +\infty\right[$. Donc :

$$F_Z(x) \ = \ \mathbb{P}([Z \leqslant x]) \ = \ \mathbb{P}(\varnothing) \ = \ 0$$

  × si $x \in \left]0, +\infty\right[$:

$$\begin{array}{rcll} F_Z(x) & = & \mathbb{P}([Z \leqslant x]) & \\ & = & \mathbb{P}(\left[\mathrm{e}^{-X} \leqslant x\right]) & \\ & = & \mathbb{P}([-X \leqslant \ln(x)]) & \textit{(par stricte croissance de la fonction } \ln \textit{ sur }]0,+\infty[\textit{)} \\ & = & \mathbb{P}([X \geqslant -\ln(x)]) & \\ & = & 1 - \mathbb{P}([X < -\ln(x)]) & \\ & = & 1 - F\big(-\ln(x)\big) & \\ & = & 1 - \exp\left(-\mathrm{e}^{\ln(x)}\right) & \\ & = & 1 - \exp(-x) & \end{array}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } F_Z : x \mapsto \left\{ \begin{array}{cl} 0 & \text{si } x \in \left]-\infty, 0\right[\\ 1 - \exp(-x) & \text{si } x \in \left]0, +\infty\right[\end{array} \right. .}$$

- On reconnaît la fonction de répartition d'une v.a.r. suivant une loi exponentielle de paramètre 1. Or la fonction de répartition caractérie la loi.

$$\boxed{\text{On en déduit : } Z \hookrightarrow \mathcal{E}\left(1\right).}$$

□

c) Soient x et y deux réels strictement positifs.
Établir une relation entre $\mathbb{P}_{[X \leqslant -\ln(x)]}([X \leqslant -\ln(x+y)])$ et $\mathbb{P}([X \leqslant -\ln(y)])$.

Démonstration.

- Tout d'abord, on a bien : $\mathbb{P}([X \leqslant -\ln(x)]) \neq 0$. En effet :
  - × comme : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) > 0$, alors la fonction F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$,
  - × de plus, comme F est une fonction de répartition : $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$.

  Ainsi : $\forall u \in \mathbb{R},\ F(u) > 0$. En particulier :
$$\mathbb{P}([X \leqslant -\ln(x)]) \ = \ F\big(-\ln(x)\big) \ > \ 0$$

- Ensuite :
$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}_{[X \leqslant -\ln(x)]}([X \leqslant -\ln(x+y)]) \\
= \ & \frac{\mathbb{P}([X \leqslant -\ln(x)] \cap [X \leqslant -\ln(x+y)])}{\mathbb{P}([X \leqslant -\ln(x)])} \\
= \ & \frac{\mathbb{P}([X \leqslant -\ln(x+y)])}{\mathbb{P}([X \leqslant -\ln(x)])} && \textit{(car } y > 0, \textit{ donc } -\ln(x+y) < -\ln(x), \\
& && \textit{ainsi : } [X \leqslant -\ln(x+y)] \subset [X \leqslant -\ln(x)]\textit{)} \\
= \ & \frac{F\big(-\ln(x+y)\big)}{F\big(-\ln(x)\big)} \\
= \ & \frac{\exp\left(-\mathrm{e}^{\ln(x+y)}\right)}{\exp\left(-\mathrm{e}^{\ln(x)}\right)} \\
= \ & \frac{\exp\big(-(x+y)\big)}{\exp(-x)} \\
= \ & \exp(-(\cancel{x}+y)+\cancel{x}) \\
= \ & \exp(-y)
\end{aligned}$$

- Enfin :
$$\mathbb{P}([X \leqslant -\ln(y)]) \ = \ F\big(-\ln(y)\big) \ = \ \exp\left(-\mathrm{e}^{\ln(y)}\right) \ = \ \exp(-y)$$

$$\boxed{\mathbb{P}_{[X \leqslant -\ln(x)]}([X \leqslant -\ln(x+y)]) \ = \ \mathbb{P}([X \leqslant -\ln(y)])}$$

□

d) On considère $(Y_i)_{i\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi exponentielle de paramètre 1. Soit L une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre 1 indépendante de $(Y_i)_{i\geqslant 1}$. On considère la variable aléatoire $W = \max(Y_1, \ldots, Y_L)$ telle que pour tout $k \geqslant 1$, et tout $\omega \in [L = k]$, $W(\omega) = \max(Y_1(\omega), \ldots, Y_k(\omega))$ et $W(\omega) = 0$ si $L(\omega) = 0$.
Montrer que pour tous réels a et b tels que $0 < a < b$, on a : $\mathbb{P}([a \leqslant W \leqslant b]) = \mathbb{P}([a \leqslant X \leqslant b])$.
Que vaut $\mathbb{P}([W = 0])$?

Démonstration.
Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $0 < a < b$.

- La famille $([L = k])_{k\in\mathbb{N}}$ forme un système complet d'événements.
  Ainsi, par formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([a \leqslant W \leqslant b]) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([a \leqslant W \leqslant b] \cap [L = k]) \\
&= \mathbb{P}([L = 0] \cap [a \leqslant W \leqslant b]) + \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([L = k] \cap [a \leqslant W \leqslant b])
\end{aligned}$$

- De plus, par définition de W :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([L = 0] \cap [a \leqslant W \leqslant b]) &= \mathbb{P}([L = 0] \cap [a \leqslant 0 \leqslant b]) \\
&= \mathbb{P}([L = 0] \cap \varnothing) \qquad \textit{(car } a > 0\textit{)} \\
&= \mathbb{P}(\varnothing) \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}([L = 0] \cap [a \leqslant W \leqslant b]) = 0}$$

- Ensuite, soit $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}([L = k] \cap [a \leqslant W \leqslant b]) \\
= \ & \mathbb{P}([L = k] \cap [a \leqslant \max(Y_1, \ldots, Y_k) \leqslant b]) \\
= \ & \mathbb{P}([L = k])\, \mathbb{P}([a \leqslant \max(Y_1, \ldots, Y_k) \leqslant b]) \qquad \textit{(car les v.a.r. } L \textit{ et } \max(Y_1, \ldots, Y_k) \textit{ sont indépendantes par lemme des coalitions)}
\end{aligned}$$

  Or :

$$\mathbb{P}([a \leqslant \max(Y_1, \ldots, Y_k) \leqslant b]) = \mathbb{P}([\max(Y_1, \ldots, Y_k) \leqslant b]) - \mathbb{P}([\max(Y_1, \ldots, Y_k) < a])$$

  De plus :

  × d'une part :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([\max(Y_1, \ldots, Y_k) \leqslant b]) &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{k} [Y_i \leqslant b]\right) \\
&= \prod_{i=1}^{k} \mathbb{P}([Y_i \leqslant b]) \qquad \textit{(car } Y_1, \ldots, Y_n \textit{ sont indépendantes)} \\
&= \prod_{i=1}^{k} (1 - \mathrm{e}^{-b}) \qquad \textit{(car : } \forall i \in [\![1, k]\!], \ Y_i \hookrightarrow \mathcal{E}(1)\textit{)} \\
&= \left(1 - \mathrm{e}^{-b}\right)^k
\end{aligned}$$

× d'autre part :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{P}([\max(Y_1,\dots,Y_k) < a]) & = & \mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{i=1}^{k} [Y_i < a]\right) & \\
& = & \prod\limits_{i=1}^{k} \mathbb{P}([Y_i < a]) & \textit{(car } Y_1, \dots, Y_n \textit{ sont indépendantes)} \\
& = & \prod\limits_{i=1}^{k} \mathbb{P}([Y_i \leqslant a]) & \textit{(car } Y_1, \dots, Y_k \textit{ sont des v.a.r. à densité)} \\
& = & \prod\limits_{i=1}^{k} (1 - \mathrm{e}^{-a}) & \textit{(car : } \forall i \in [\![1,k]\!], Y_i \hookrightarrow \mathcal{E}(1)\textit{)} \\
& = & (1 - \mathrm{e}^{-a})^k &
\end{array}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \mathbb{P}([a \leqslant \max(Y_1,\dots,Y_k) \leqslant b]) \ = \ \left(1 - \mathrm{e}^{-b}\right)^k - (1 - \mathrm{e}^{-a})^k.}$$

- Ainsi :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{P}([a \leqslant W \leqslant b]) & = & \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \Big(\mathbb{P}([L = k])\, \mathbb{P}([a \leqslant \max(Y_1,\dots,Y_k) \leqslant b])\Big) & \\
& = & \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \left(\mathrm{e}^{-1} \dfrac{1^k}{k!} \times \left(\left(1 - \mathrm{e}^{-b}\right)^k - (1 - \mathrm{e}^{-a})^k\right)\right) & \textit{(car } L \hookrightarrow \mathcal{P}(1)\textit{)} \\
& = & \mathrm{e}^{-1} \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \left(\dfrac{(1 - \mathrm{e}^{-b})^k}{k!} - \dfrac{(1 - \mathrm{e}^{-a})^k}{k!}\right) &
\end{array}$$

- Or $\dfrac{(1 - \mathrm{e}^{-b})^n}{n!}$ et $\dfrac{(1 - \mathrm{e}^{-a})^n}{n!}$ sont les termes généraux de deux séries exponentielles (de paramètres $1 - \mathrm{e}^{-b}$ et $1 - \mathrm{e}^{-a}$). Elles sont donc convergentes. On en déduit :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{P}([a \leqslant W \leqslant b]) & = & \mathrm{e}^{-1} \left(\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{(1 - \mathrm{e}^{-b})^k}{k!} - \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{(1 - \mathrm{e}^{-a})^k}{k!}\right) & \\
& = & \mathrm{e}^{-1} \left(\exp(1 - \mathrm{e}^{-b}) - \exp(1 - \mathrm{e}^{-a})\right) & \\
& = & \mathrm{e}^{-1} \left(\mathrm{e} \exp(-\mathrm{e}^{-b}) - \mathrm{e} \exp(-\mathrm{e}^{-a})\right) & \\
& = & \cancel{\mathrm{e}^{-1}} \cancel{\mathrm{e}} \big(F(b) - F(a)\big) & \textit{(par définition de } F\textit{)} \\
& = & F(b) - F(a) & \\
& = & \mathbb{P}([a \leqslant X \leqslant b]) & \textit{(car } X \textit{ est une v.a.r. à densité)}
\end{array}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \mathbb{P}([a \leqslant W \leqslant b]) = \mathbb{P}([a \leqslant X \leqslant b]).}$$

- Enfin, par définition de la v.a.r. W :

$$\mathbb{P}([W = 0]) \ = \ \mathbb{P}([L = 0]) \ = \ \mathrm{e}^{-1} \dfrac{1^0}{0!} \ = \ \mathrm{e}^{-1} \dfrac{1}{1} \ = \ \mathrm{e}^{-1}$$

$$\boxed{\mathbb{P}([W = 0]) \ = \ \mathrm{e}^{-1}.}$$

$\square$