ESSEC I 2011

Le sujet est composé de deux problèmes indépendants.

Problème 1 : Évolution des intentions de vote

Dans une élection à venir, deux candidats A et B se présentent.
Un groupe d'électeurs est composé de m individus, avec $m \geqslant 2$.

- Initialement, au jour appelé « jour 0 », le nombre d'individus préférant le candidat A vaut a (il y en a donc $m-a$ préférant le candidat B).
- Ensuite, chaque jour, un des individus au hasard dans le groupe en rencontre un autre, au hasard également, et il lui parle des élections. Si leurs intentions de vote diffèrent, il le convainc de voter comme lui.

Pour tout entier naturel n, on note X_n le nombre d'individus du groupe ayant l'intention de voter pour le candidat A le soir du $n^{\text{ème}}$ jour. Ainsi, X_n est une variable aléatoire à valeurs dans $[\![0, m]\!]$.
On remarque que X_0 est une variable aléatoire certaine : $\mathbb{P}\big([X_0 = a] \big) = 1$.

Partie I - Un cas particulier : $m = 4$

Dans cette partie, on étudie le cas d'un groupe formé de quatre électeurs.

1. Soit i et j deux entiers dans $[\![0, 4]\!]$. On note $p_{i,j}$ la probabilité pour qu'il y ait exactement j personnes dans le groupe ayant l'intention de voter pour A un jour donné, sachant qu'il y en avait i la veille.

a) Justifier : $p_{0,0} = p_{4,4} = 1$.

Démonstration.

- Démontrons tout d'abord $p_{0,0} = 1$.
  - × Supposons que la veille d'un jour donné il y ait 0 personne souhaitant voter pour la personne A.
  - × Dans ce cas, il n'y a aucune personne dans le groupe des individus avec intention de voter pour A. Le lendemain, la rencontre est donc organisée entre :
    - un premier électeur choisi au hasard qui a pour intention de voter B.
    - un deuxième électeur choisi au hasard qui a aussi pour intention de voter B.

    De ce fait, il n'y a pas de changement des intentions de vote.

  Finalement, le soir de ce jour, il y a toujours 0 personne ayant pour intention de voter A.

  $$\boxed{\text{On en conclut : } p_{0,0} = 1.}$$

- Démontrons maintenant $p_{m,m} = 1$.
  - × Supposons que la veille d'un jour donné il y ait m personnes souhaitant voter pour la personne A.
  - × Dans ce cas, il n'y a aucune personne dans le groupe des individus avec intention de voter pour B. Le lendemain, la rencontre est donc organisée entre :
    - un premier électeur choisi au hasard qui a pour intention de voter A.
    - un deuxième électeur choisi au hasard qui a aussi pour intention de voter A.

    De ce fait, il n'y a pas de changement des intentions de vote.

  Finalement, le soir de ce jour, il y a toujours m personnes ayant pour intention de voter A.

  $$\boxed{\text{On en conclut : } p_{m,m} = 1.}$$

□

Commentaire

- Dans la rédaction, on fait le choix de conclure $p_{m,m} = 1$ en lieu et place de $p_{4,4} = 1$. Pour cette première question et celle qui suit, la valeur de m a peu d'importance. Elle en aura par contre dans les questions suivantes.
- Dans la définition de $p_{i,j}$, le jour considéré n'est pas identifié. Plus précisément, on ne parle pas du jour n mais d'un « jour donné » et pas du jour $n-1$ mais de « la veille ». Il y a une raison claire à cela : la probabilité $p_{i,j}$ que l'on étudie ne dépend pas du jour n mais uniquement du nombre d'individus qui compose chacun des deux groupes.
- On peut être encore plus précis en remarquant que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :
$$\mathbb{P}_{[X_0=i]}\big([X_1 = j]\big) \;=\; \mathbb{P}_{[X_{n-1}=i]}\big([X_n = j]\big)$$
C'est cette quantité indépendante de n qui est nommée $p_{i,j}$.
D'ailleurs, le concepteur aurait pu décider initialement de définir $p_{i,j}$ par :
$$p_{i,j} = \mathbb{P}_{[X_0=i]}\big([X_1 = j]\big)$$
puis faire remarquer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $p_{i,j} = \mathbb{P}_{[X_{n-1}=i]}\big([X_n = j]\big)$. Cette définition est certainement plus pratique pour mettre en place les rédactions usuelles. Par exemple :
  × Si $[X_0 = 0]$ est réalisé, c'est qu'il y a initialement (le jour 0) 0 personne ayant l'intention de voter A.
  × Dans ce cas, l'événement $[X_1 = 0]$ est réalisé si et seulement si il y a 0 personne avec intention de voter A le soir du jour 1. Or, comme il n'y a pas d'individu ayant l'intention de voter A pour tenter de convaincre un individu de l'autre groupe, l'événement $[X_1 = 0]$ est forcément réalisé.
- Dans cet énoncé, on travaille sur l'évolution d'une grandeur aléatoire (le nombre d'individus ayant l'intention de voter A) qui varie dans le temps discret (au jour 0, puis au suivant, puis à celui d'après etc.). Cette évolution se fait selon un schéma classique en mathématiques : le futur (*i.e.* la valeur de X_{n+1}, nombre d'individus ayant l'intention de voter A l'instant $n+1$) ne dépend du passé (nombre d'individus ayant l'intention de voter A les instant précédents) que par le présent (*i.e.* la valeur de X_n, nombre d'individus ayant l'intention de voter A l'instant n). On dit alors que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une **chaîne de Markov**. On peut par ailleurs préciser les points suivants :
  × la grandeur évaluée (ici, le nombre d'électeurs souhaitant voter pour la personne A) ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs (pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n est à valeurs dans $[\![0, m]\!]$) appelées des **états** de la chaîne de Markov. Lorsque cette grandeur prend une valeur i un jour n donné, on dit que la chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ entre dans l'état i à l'instant n.
  × les états 0 et m sont dits **absorbants**. Si la chaîne de Markov entre dans l'état 0 (resp. m) un jour n donné, alors elle restera dans cet état les jours suivants. C'est précisément ce que l'on démontre dans la première question de l'énoncé : une fois l'état atteint, la chaîne de Markov n'en sort plus.
  × comme on l'a vu lors de la discussion sur la définition de $p_{i,j}$, l'évolution de la chaîne de Markov est indépendante du jour n considéré. On dit alors que cette chaîne est **homogène**.

  Pour résumer, on a affaire dans cet énoncé à une **chaîne de Markov homogène ayant un ensemble fini d'états**. Tout ce vocabulaire n'est pas à proprement parler au programme (le terme « chaîne de Markov » est seulement présent dans la partie informatique). Cependant, il arrive fréquemment qu'un sujet propose l'étude d'une chaîne de Markov. Le problème est, de ce point de vue, très classique.

b) Justifier : si i et j dans $[\![0,4]\!]$ sont tels que $|i-j| \geqslant 2$, alors $p_{i,j} = 0$.

Démonstration.
Soit $(i,j) \in [\![0,m]\!]$.
Dans la suite, on appellera « groupe A (resp. B) » le groupe des électeurs ayant l'intention de voter pour A (resp. B).

- Supposons que la veille d'un jour donné il y ait i personnes dans le groupe A.
- Dans ce cas, une rencontre est organisée le lendemain entre deux individus du groupe d'électeurs. Deux cas se présentent alors :
  - × Le premier individu choisi a pour intention de voter A.
    Il rencontre alors un deuxième individu. Deux nouveaux cas se présentent.
    - Si le deuxième individu a pour intention de voter A alors il n'y a pas de changement des intentions de vote.
    - Si le deuxième individu n'a pas pour intention de voter A alors il est convaincu par le premier de changer son vote. Il y a donc, le soir de cette rencontre, une personne de plus ayant pour intention de voter A.
  - × Le premier individu choisi n'a pas pour intention de voter A.
    Il a donc pour intention de voter B. Il rencontre alors un deuxième individu. Deux nouveaux cas se présentent.
    - Si le deuxième individu a pour intention de voter A alors il il est convaincu par le premier de changer son vote. Il y a donc, le soir de cette rencontre, une personne de moins ayant pour intention de voter A.
    - Si le deuxième individu n'a pas pour intention de voter A alors la rencontre a lieu entre deux individus ayant pour intention de voter B. Dans ce cas, il n'y a pas de changement des intentions de vote.

En résumé, si la veille d'un jour donné il y a i individus ayant pour intention de voter A, le lendemain soir, il y en aura soit $i-1$, soit i, soit $i+1$.
Autrement dit, entre la veille et le lendemain, le taille du groupe d'électeurs ayant pour intention de voter A varie d'au plus une personne.

$$\boxed{\text{On en conclut que si } |i-j| \geqslant 2, \text{ alors } p_{i,j} = 0.}$$

Commentaire

- L'énoncé demande de « Justifier » une propriété. Cette terminologie est souvent associée à des démonstrations courtes et éventuellement moins formelles. Mettre en avant l'argument qu'une personne au plus peut changer d'intention de vote lors de la rencontre entre les deux individus du groupe d'électeur suffit ici à obtenir l'ensemble des points alloués à la question.
- Dans les premières questions de l'énoncé, on procède à l'étude de l'expérience lorsque m prend une petite valeur (ici $m = 4$). Cela permet de pouvoir lister tous les cas possibles (comme on le verra en question ***1.d)***). Le but de ces premières questions est de se familiariser avec la modélisation proposée par l'énoncé. C'est pour un souci de bonne compéhension des mécanismes de l'expérience qu'on fait le choix de détailler la rédaction de cette question.
- De manière générale, il est toujours conseillé de prendre particulièrement soin à la rédaction en début d'épreuve afin de faire bonne impression auprès du correcteur et de le mettre dans de bonnes dispositions. En fin d'épreuve, le temps venant à manquer, on pourra relâcher un peu la rédaction afin de pouvoir traiter plus de questions.

□

c) Établir : $p_{1,0} = p_{1,2} = \frac{1}{4}$ et $p_{1,1} = \frac{1}{2}$.

Démonstration.
Remarquons tout d'abord :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (i,j) \in [\![0,m]\!]^2,\ p_{i,j} \ = \ \mathbb{P}_{[X_{n-1}=i]}\big([X_n = j] \big)$$

Afin de faciliter la rédaction, on désignera par la suite par le terme « groupe A (resp. B) » l'ensemble des individus ayant pour intention de voter pour le candidat A (resp. B).
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Si l'événement $[X_{n-1} = 1]$ est réalisé, c'est que le jour $n-1$, il y a seulement 1 individu dans le groupe A et $m - 1 = 3$ individus dans le groupe B.
- Dans ce cas, l'événement $[X_n = 0]$ est réalisé si et seulement si le soir du jour n, plus aucun individu n'a pour intention de voter A. C'est le cas seulement si la rencontre entre les deux individus a modifié l'intention de vote de l'unique individu souhaitant voter A.

  Plus précisément, l'événement $[X_n = 0]$ est alors réalisé par tous les 2-tirages dont le premier élément est un numéro de $[\![0,4]\!]$ désignant un individu du groupe B et le deuxième est un numéro de $[\![0,4]\!]$ désignant un individu du groupe A.
  Un tel 2-tirage est entièrement déterminé par :

  – le premier numéro de ce couple : 3 possibilités (car le groupe B est constitué de 3 personnes)

  – le deuxième numéro de ce couple : 1 possibilité (car le groupe A ne contient qu'une personne)

  Il y a donc 3 tels 2-tirages.
  Notons par ailleurs qu'il y a en tout 4×3 2-tirages différents (4 possibilités pour le premier individu choisi et 3 pour le deuxième). On en conclut :

$$\mathbb{P}_{[X_{n-1}=1]}\big([X_n = 0] \big) \ = \ \frac{\cancel{3} \times 1}{4 \times \cancel{3}} \ = \ \frac{1}{4}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } p_{1,0} = \frac{1}{4}.}$$

- On raisonne de même pour démontrer $p_{1,2} = \dfrac{1}{4}$. Il suffit de remarquer que si $[X_{n-1} = 0]$ est réalisé alors l'événement $[X_n = 2]$ est réalisé si et seulement si le soir du jour n, 2 individus ont pour intention de voter A. Cela se produit si et seulement si le premier individu choisi appartient au groupe A et le second au groupe B. On en déduit :

$$\mathbb{P}_{[X_{n-1}=1]}\big([X_n = 2] \big) \ = \ \frac{1 \times \cancel{3}}{4 \times \cancel{3}} \ = \ \frac{1}{4}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } p_{1,2} = \frac{1}{4}.}$$

- Il reste à démontrer $p_{1,1} = \dfrac{1}{2}$. Il suffit de remarquer que si $[X_{n-1} = 0]$ est réalisé alors l'événement $[X_n = 2]$ est réalisé si et seulement si le jour n, 1 seul individu a pour intention de voter A. Cela se produit si et seulement il n'y a pas eu de changement d'intention de vote lors de la rencontre ce qui est le cas si les deux individus choisis appartiennent au groupe B. On en déduit :

$$\mathbb{P}_{[X_{n-1}=1]}\big([X_n = 1] \big) \ = \ \frac{\cancel{3} \times 2}{4 \times \cancel{3}} \ = \ \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } p_{1,1} = \frac{1}{2}.}$$

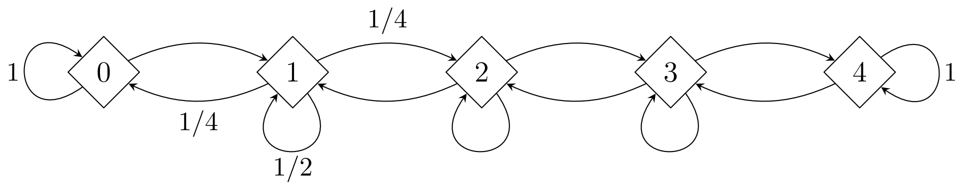
Commentaire

- Le sujet prend le parti de définir $p_{i,j}$ comme la probabilité que quelque chose se produise tout en omettant de définir cette probabilité dans un cadre formel. C'est un choix regrettable qui incite à une rédaction peu rigoureuse du type :

$$\text{« } p_{1,0} = \frac{1}{2} \text{ car c'est la probabilité de } \dots \text{ »}$$

  Au contraire, il est conseillé de travailler sur les événements. C'est pourquoi on établit la définition formelle de $p_{i,j}$ en début de correction de cette question.
- Cette définition n'est pas si simple à comprendre : même si $p_{i,j}$ s'écrit sous la forme : $p_{i,j} = \mathbb{P}_{[X_{n-1}=i]}\big([X_n = j]\big)$, la quantité $p_{i,j}$ ne dépend pas du jour $n \in \mathbb{N}^*$ choisi. Le concepteur a certainement souhaité cacher cette subtilité. Ce faisant, on omet de mettre en avant le caractère **homogène** de la chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ qui, associée au caractère fini du nombre d'états considérés, est à l'origine de la formalisation matricielle qui va suivre. $\square$

d) De la même façon, donner pour tout $(i, j) \in [\![0, 4]\!]^2$ la probabilité $p_{i,j}$.
On présentera les résultats sur le diagramme suivant, à reproduire et à compléter, et on justifiera quelques cas.



Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Déterminons tout d'abord, la valeur de $p_{2,1} = \mathbb{P}_{[X_{n-1}=2]}\big([X_n = 1]\big)$.
  × Si $[X_{n-1} = 2]$ est réalisé c'est que le jour $n-1$, il y a 2 individus dans le groupe A et $m - 2 = 2$ individus dans le groupe B.
  × Dans ce cas, l'événement $[X_n = 1]$ est réalisé si et seulement si le soir du jour n, seulement 1 individu a pour intention de voter A. Cela se produit si et seulement si le premier individu choisi appartient au groupe B (constitué alors de 2 personnes) et le second au groupe A (constitué aussi de deux personnes). On en déduit :

$$\mathbb{P}_{[X_{n-1}=2]}\big([X_n = 1]\big) = \frac{2 \times 2}{4 \times 3} = \frac{1}{3}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } p_{2,1} = \frac{1}{3}.}$$

- Déterminons maintenant $p_{2,3} = \mathbb{P}_{[X_{n-1}=2]}\big([X_n = 3]\big)$.
  Si $[X_{n-1} = 2]$ est réalisé alors l'événement $[X_n = 3]$ est réalisé si et seulement si le soir du jour n, 3 individus ont pour intention de voter A. Cela se produit si et seulement si le premier individu choisi appartient au groupe A (constitué alors de 2 personnes) et le second au groupe B (constitué aussi de deux personnes). On en déduit :

$$\mathbb{P}_{[X_{n-1}=2]}\big([X_n = 3]\big) = \frac{2 \times 2}{4 \times 3} = \frac{1}{3}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } p_{2,3} = \frac{1}{3}.}$$

- Déterminons enfin $p_{2,2} = \mathbb{P}_{[X_{n-1}=2]}\big([X_n = 2]\big)$.
  Comme la famille $\big([X_n = j]\big)_{j\in[\![0,4]\!]}$ est un système complet d'événements, on a :

$$\sum_{j=0}^{4} \mathbb{P}_{[X_{n-1}=2]}\big([X_n = j]\big) \;=\; 1$$

  Or :

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{4} \mathbb{P}_{[X_{n-1}=2]}\big([X_n = j]\big) &= p_{2,0} + p_{2,1} + p_{2,2} + p_{2,3} + p_{2,4} \\ &= p_{2,1} + p_{2,2} + p_{2,3} && \textit{(car } p_{2,0} = 0 = p_{2,4} \textit{ d'après la question } \textbf{\textit{1.b)}}\textit{)} \\ &= \frac{1}{3} + p_{2,2} + \frac{1}{3}\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } p_{2,2} = 1 - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}.}$$

- Déterminons maintenant la valeur de $p_{3,2} = \mathbb{P}_{[X_{n-1}=3]}\big([X_n = 2]\big)$.
  - × Si $[X_{n-1} = 3]$ est réalisé c'est que le jour $n-1$, il y a 3 individus dans le groupe A et $m - 3 = 1$ individus dans le groupe B.
  - × Dans ce cas, l'événement $[X_n = 2]$ est réalisé si et seulement si le soir du jour n, 2 individus ont pour intention de voter A. Cela se produit si et seulement si le premier individu choisi appartient au groupe B (constitué alors d'une seule personne) et le second au groupe A (constitué de 3 personnes). On en déduit :

$$\mathbb{P}_{[X_{n-1}=3]}\big([X_n = 2]\big) \;=\; \frac{1 \times \cancel{3}}{4 \times \cancel{3}} \;=\; \frac{1}{4}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } p_{3,2} = \frac{1}{4}.}$$

- Déterminons maintenant $p_{3,4} = \mathbb{P}_{[X_{n-1}=3]}\big([X_n = 4]\big)$.
  Si $[X_{n-1} = 3]$ est réalisé alors l'événement $[X_n = 4]$ est réalisé si et seulement si le soir du jour n, 4 individus ont pour intention de voter A. Cela se produit si et seulement si le premier individu choisi appartient au groupe A (constitué alors de 3 personnes) et le second au groupe B (constitué seulement d'une personne). On en déduit :

$$\mathbb{P}_{[X_{n-1}=3]}\big([X_n = 4]\big) \;=\; \frac{\cancel{3} \times 1}{4 \times \cancel{3}} \;=\; \frac{1}{4}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } p_{3,2} = \frac{1}{4}.}$$

- En remarquant comme précédemment que la famille $\big([X_n = j]\big)_{j\in[\![0,4]\!]}$ est un système complet d'événements, on obtient, à l'aide de l'application probabilité $\mathbb{P}_{[X_{n-1}]=3}$:

$$\cancel{p_{3,0}} + \cancel{p_{3,1}} + p_{3,2} + p_{3,3} + p_{3,4} \;=\; 1$$

  et donc :

$$p_{3,3} \;=\; 1 - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) \;=\; \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } p_{3,3} = \frac{1}{2}.}$$

- Enfin, il reste à déterminer $p_{0,1}$ et $p_{4,3}$.
  Là encore on utilise le fait que la famille $\big([X_n = j]\big)_{j\in[\![0,4]\!]}$ est un système complet d'événements. À l'aide de l'application probabilité $\mathbb{P}_{[X_{n-1}]=0}$, on obtient :

$$p_{0,0} + p_{0,1} + \cancel{p_{0,2}} + \cancel{p_{0,3}} + p_{0,4} \ = \ 1$$

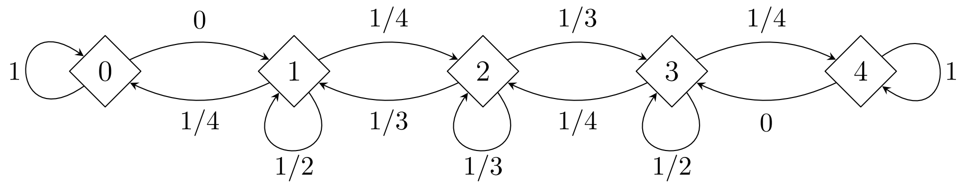
$$\boxed{\text{Et comme } p_{0,0} = 1 \text{ alors : } p_{0,1} = 0.}$$

  En procédant de même :

$$\cancel{p_{4,0}} + \cancel{p_{4,1}} + \cancel{p_{4,2}} + p_{4,3} + p_{4,4} \ = \ 1$$

$$\boxed{\text{Et comme } p_{4,4} = 1 \text{ alors : } p_{4,3} = 0.}$$

Finalement, on obtient le graphe suivant :



Commentaire

- L'énoncé n'explicite pas l'obtention du graphe. Il est sous-entendu que $p_{i,j}$ est l'étiquette de l'arête joignant le nœud i au nœud j. Ce graphe permet donc de visualiser les probabilités de passage d'un état à un autre. C'est un schéma classique lorsqu'on étudie une chaîne de Markov homogène à espace d'états fini.
- L'énoncé demande de justifier « quelques cas ». Il aurait certainement été plus pertinent de demander de justifier les valeurs p_{2_1}, $p_{2,1}$ et $p_{2,3}$: cela suffit à démontrer que les techniques de démonstration associées à cette question sont comprises.
- On se sert une nouvelle fois dans cette question de la définition formelle :

$$p_{i,j} = \mathbb{P}_{[X_{n-1}=i]}\big([X_n = j]\big)$$

  Ce formalisme permet de rédiger le calcul de $p_{2,2}$ (par exemple) obtenu à l'aide des calculs précédents et en tirant parti du système complet d'événements associé à X_n.
- On pourrait introduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la v.a.r. Y_n, nombre d'électeurs ayant l'intention de voter pour B le soir du jour n (on a évidemment : $Y_n = m - X_n$. En agissant ainsi, on définit une chaîne de Markov $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Si on laisse de côté l'initialisation le jour 0, on se rend compte qu'il y a une symétrie du problème : on ne change pas l'expérience en échangeant les rôles de A et B. Ainsi, on obtiendrait exactement le même graphe pour la chaîne de Markov $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Cela permet de démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{P}_{[X_{n-1}=i]}\big([X_n = j]\big) & = & \mathbb{P}_{[Y_{n-1}=i]}\big([Y_n = j]\big) & = & \mathbb{P}_{[X_{n-1}=m-i]}\big([X_n = m-j]\big) \\ \shortparallel & & & & \shortparallel \\ p_{i,j} & & & & p_{m-i,m-j} \end{array}$$

  Cette propriété explique le caractère symétrique du graphe associé à la chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. On aurait d'ailleurs pu exploiter cette propriété pour obtenir directement les valeurs $p_{3,2}$, $p_{3,3}$, $p_{3,4}$ à l'aide des valeurs $p_{1,4}$, $p_{1,3}$, $p_{1,2}$. □

2. On définit la matrice $M = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 & 0 \\ 1/4 & 1/3 & 1/4 \\ 0 & 1/3 & 1/2 \end{pmatrix}$,

et pour tout entier naturel n, la matrice colonne $U_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}([X_n = 1]) \\ \mathbb{P}([X_n = 2]) \\ \mathbb{P}([X_n = 3]) \end{pmatrix}$.

a) Pour tout entier naturel n, établir la relation : $U_{n+1} = M\, U_n$.
En déduire pour tout entier naturel n, l'égalité : $U_n = M^n\, U_0$.

Démonstration.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. La famille $\big([X_n = k]\big)_{k \in [\![0,4]\!]}$ est un système complet d'événements.
Ainsi, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([X_{n+1} = 1]) & = & \sum\limits_{k=0}^{4} \mathbb{P}([X_n = k] \cap [X_{n+1} = 1]) & \\ & = & \sum\limits_{k=0}^{4} \mathbb{P}([X_n = k]) \times \mathbb{P}_{[X_n = k]}([X_{n+1} = 1]) & \\ & = & \sum\limits_{k=0}^{4} \mathbb{P}([X_n = k]) \times p_{k,1} & \\ & = & \sum\limits_{k=1}^{3} p_{k,1}\, \mathbb{P}([X_n = k]) & \textit{(car } p_{0,1} = 0 = p_{4,1}\textit{)} \\ & = & \dfrac{1}{2} \times \mathbb{P}([X_n = 1]) + \dfrac{1}{3} \times \mathbb{P}([X_n = 2]) + 0 \times \mathbb{P}([X_n = 3]) & \\ & = & \begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \mathbb{P}([X_n = 1]) \\ \mathbb{P}([X_n = 2]) \\ \mathbb{P}([X_n = 3]) \end{pmatrix} & \end{array}$$

- En procédant de même (en utilisant le même système complet d'événements), on obtient :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([X_{n+1} = 2]) & = & \sum\limits_{k=1}^{3} p_{k,2}\, \mathbb{P}([X_n = k]) & \textit{(car } p_{0,1} = 0 = p_{4,1}\textit{)} \\ & = & \dfrac{1}{4} \times \mathbb{P}([X_n = 1]) + \dfrac{1}{3} \times \mathbb{P}([X_n = 2]) + \dfrac{1}{4} \times \mathbb{P}([X_n = 3]) & \\ & = & \begin{pmatrix} 1/4 & 1/3 & 1/4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \mathbb{P}([X_n = 1]) \\ \mathbb{P}([X_n = 2]) \\ \mathbb{P}([X_n = 3]) \end{pmatrix} & \end{array}$$

- De même :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([X_{n+1} = 3]) & = & \sum\limits_{k=1}^{3} p_{k,3}\, \mathbb{P}([X_n = k]) & \textit{(car } p_{0,1} = 0 = p_{4,1}\textit{)} \\ & = & 0 \times \mathbb{P}([X_n = 1]) + \dfrac{1}{3} \times \mathbb{P}([X_n = 2]) + \dfrac{1}{2} \times \mathbb{P}([X_n = 3]) & \\ & = & \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 1/2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \mathbb{P}([X_n = 1]) \\ \mathbb{P}([X_n = 2]) \\ \mathbb{P}([X_n = 3]) \end{pmatrix} & \end{array}$$

$$\boxed{\text{Par définition du produit de matrice, on a bien : } \forall n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = M \times U_n.}$$

- Montrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)$, où $\mathcal{P}(n)$: $U_n = M^n\, U_0$.
  - **Initialisation** :
    On a : $M^0\, U_0 = I_3\, U_0 = U_0$.
    D'où $\mathcal{P}(0)$.
  - **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
    Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $U_{n+1} = M^{n+1}\, U_0$).

$$\begin{array}{rcll} U_{n+1} & = & M \times U_n & \textit{(d'après la démonstration précédente)} \\ & = & M \times M^n\, U_0 & \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\ & = & M^{n+1}\, U_0 & \end{array}$$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N},\ U_n = M^n\, U_0.}$$

Commentaire

- On peut se demander s'il est utile, de rédiger la récurrence pour démontrer cette dernière propriété. La formule étant donnée dans l'énoncé, la rédaction apparaît comme nécessaire puisque constitue le cœur de la question. Si le concepteur avait opté pour la formulation :

  « Pour tout $n \in \mathbb{N}$, trouver une relation entre U_n, M et U_0. »

  on aurait pu se passer de cette rédaction et simplement écrire :

  « Par une récurrence immédiate, on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n = M^n\, U_0$. »

- Lors de l'étude d'une chaîne de Markov, on introduit généralement la matrice A définie par :

$$\forall (i,j) \in [\![0,m]\!]^2, A_{i+1,j+1} = \mathbb{P}_{[X_{n-1}=j]}\big([X_n = i]\big) = p_{j,i}$$

  (le premier état porte le numéro 0 *ce qui oblige à faire un décalage d'indice pour définir A)*
  On obtient ici :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/3 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 1 \end{pmatrix}$$

  Cette matrice est appelée **matrice de transition**.
  Elle permet de décrire l'évolution aléatoire de la grandeur considérée (on peut démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = A\, U_n$ en ajoutant à U_n les probabilités $\mathbb{P}\big([X_n = 0]\big)$ et $\mathbb{P}\big([X_n = 4]\big)$).

- On peut remarquer que, pour chaque colonne j de la matrice de transition, la somme des coefficients vaut 1. Cela se démontre (comme dans la question ci-dessus), à l'aide de l'application probabilité $\mathbb{P}_{[X_{n-1}=j]}$ et du système complet d'événements $\big([X_n = k]\big)_{k \in [\![0,4]\!]}$.
- Dans le sujet, on s'intéresse à une la matrice M, matrice extraite de la matrice de transition A. On perd ainsi la propriété énoncée ci-dessus. En contrepartie on obtient une matrice 3×3 qu'il est bien plus simple de manipuler. Et si en apparence ce choix de modélisation semble laisser de côté les états 0 et 4, on peut en réalité déduire des propriétés portant sur ces états comme en question ***3.***. Cette modélisation est donc particulièrement pertinente : à la fois plus simple mais permettant l'étude complète de la chaîne de Markov étudiée.

$\square$

b) Montrer que M admet trois valeurs propres distinctes α, β et γ, vérifiant $0 \leqslant \alpha < \beta < \gamma < 1$.

Justifier qu'il existe une matrice carrée P d'ordre 3 inversible, que l'on ne demande pas de préciser, et D une matrice diagonale d'ordre 3, à préciser, telles que $P^{-1}MP = D$.

Démonstration.
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

- Rappelons tout d'abord :

$$\lambda \text{ valeur propre de } M \quad \Leftrightarrow \quad M - \lambda\, I_3 \text{ n'est pas inversible}$$

- Or on a :

$$\begin{aligned} \operatorname{rg}(M - \lambda\, I_3) \quad &= \quad \operatorname{rg}\left(\begin{pmatrix} 1/2-\lambda & 1/3 & 0 \\ 1/4 & 1/3-\lambda & 1/4 \\ 0 & 1/3 & 1/2-\lambda \end{pmatrix}\right) \\ &\overset{\substack{C_1 \leftarrow 4\,C_1 \\ C_2 \leftarrow 3\,C_2 \\ C_3 \leftarrow 4\,C_3}}{=} \quad \operatorname{rg}\left(\begin{pmatrix} 2\,(1-2\,\lambda) & 1 & 0 \\ 1 & 1-3\,\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 2\,(1-2\,\lambda) \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

Commentaire

La matrice $M - \lambda\, I_3$ dont on cherche le rang fait apparaître des fractions. Afin de faciliter les futures manipulations, on les fait disparaître par des opérations sur les colonnes. Rappelons que le rang d'une matrice est invariant par transposition ($\forall M \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $\operatorname{rg}(M) = \operatorname{rg}\left({}^tM\right)$). Ainsi, lors d'un calcul de rang, les opérations sur les colonnes sont autorisés. Il est toutefois conseillé d'appliquer la succession d'opérations sur les lignes décrite par l'algorithme du pivot de Gauss et n'utiliser les opérations sur les colonnes que pour des cas spécifiques permettant d'alléger les calculs.

Ainsi :

$$\begin{aligned} \operatorname{rg}(M - \lambda\, I_3) \quad &= \quad \operatorname{rg}\left(\begin{pmatrix} 2\,(1-2\,\lambda) & 1 & 0 \\ 1 & 1-3\,\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 2\,(1-2\,\lambda) \end{pmatrix}\right) \\ &\overset{L_1 \leftrightarrow L_2}{=} \quad \operatorname{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1-3\,\lambda & 1 \\ 2\,(1-2\,\lambda) & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2\,(1-2\,\lambda) \end{pmatrix}\right) \\ &\overset{L_2 \leftarrow L_2 - 2\,(1-2\,\lambda)\,L_1}{=} \quad \operatorname{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1-3\,\lambda & 1 \\ 0 & 1-2\,(1-2\,\lambda)(1-3\,\lambda) & -2\,(1-2\,\lambda) \\ 0 & 1 & 2\,(1-2\,\lambda) \end{pmatrix}\right) \\ &\overset{C_2 \leftrightarrow C_3}{=} \quad \operatorname{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1-3\,\lambda \\ 0 & -2\,(1-2\,\lambda) & 1-2\,(1-2\,\lambda)(1-3\,\lambda) \\ 0 & 2\,(1-2\,\lambda) & 1 \end{pmatrix}\right) \\ &\overset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{=} \quad \operatorname{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1-3\,\lambda \\ 0 & -2\,(1-2\,\lambda) & 1-2\,(1-2\,\lambda)(1-3\,\lambda) \\ 0 & 0 & 2-2\,(1-2\,\lambda)(1-3\,\lambda) \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

Remarquons enfin :

$$\begin{array}{rcl} 2-2\,(1-2\,\lambda)(1-3\,\lambda) & = & 2\big(1-(1-2\,\lambda)(1-3\,\lambda)\big) \\ & = & 2\,\big(\cancel{1}-(\cancel{1}-5\,\lambda+6\,\lambda^2)\big) \\ & = & 2\,(5\,\lambda-6\,\lambda^2) \ = \ 2\,\lambda\,(5-6\,\lambda) \end{array}$$

- La réduite obtenue est triangulaire (supérieure).
  Elle (et donc $M-\lambda\,I$) est non inversible si et seulement si l'un de ses coefficients diagonaux est nul. Ainsi :

$$\begin{array}{rcl} M-\lambda\,I \text{ non inversible} & \Leftrightarrow & 1=0 \ \texttt{OU} \ -2\,(1-2\,\lambda)=0 \ \texttt{OU} \ 2\,\lambda\,(5-6\,\lambda)=0 \\ & \Leftrightarrow & (1-2\,\lambda)=0 \ \texttt{OU} \ \lambda=0 \ \texttt{OU} \ (5-6\,\lambda)=0 \\ & \Leftrightarrow & \lambda=\frac{1}{2} \ \texttt{OU} \ \lambda=0 \ \texttt{OU} \ \lambda=\frac{5}{6} \end{array}$$

  On pose alors $\alpha=0$, $\beta=\frac{1}{2}$ et $\gamma=\frac{5}{6}$.

  $$\boxed{\text{Ainsi, on a bien : } \mathrm{Sp}(M)=\{\alpha,\beta,\gamma\} \text{ et } 0\leqslant\alpha<\beta<\gamma<1.}$$

- La matrice M est une matrice carrée d'ordre 3 et possède 3 valeurs propres distinctes.

  $$\boxed{\text{On en déduit que } M \text{ est diagonalisable.}}$$

  Il existe donc une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que $M=P\,D\,P^{-1}$.
  Plus précisément :
  - × la matrice P est obtenue par concaténation de bases des sous-espaces propres de M,
  - × la matrice D est la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de M (dans le même ordre d'apparition que les vecteurs propres).

  On peut par exemple choisir : $D=\begin{pmatrix}\alpha & 0 & 0\\ 0 & \beta & 0\\ 0 & 0 & \gamma\end{pmatrix}$.

  $$\boxed{\text{On a bien trouvé } P \text{ inversible et } D \text{ diagonale telles que : } M=P\,D\,P^{-1}.}$$

Commentaire

- Il est à noter que l'ordre d'apparition dans la matrice D est dépendant du contenu de la matrice P : si la $j^{\text{ème}}$ colonne de P est un élément de $E_\alpha(M)$ alors α apparaîtra en $j^{\text{ème}}$ colonne de D. On pouvait ainsi définir $3!=6$ (nombre de manières de placer trois éléments différents dans trois cases) matrices diagonales différentes.
- L'égalité : $M=P\,D\,P^{-1}$ doit être comprise comme une formule de changement de base. Pour faire ce lien, il faut effectuer un travail sur les endomorphismes. Introduisons l'espace vectoriel $E=\mathbb{R}^3$. Nommons $\mathscr{B}=(e_1,e_2,e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $f\in\mathscr{L}(E)$ l'unique endomorphisme de E tel que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)=M$.

  Comme M est diagonalisable, il en est de même de f. Ainsi, il existe une base $\mathscr{B}'$ de E dans laquelle la représentation matricielle de f est une matrice diagonale. Les coefficients diagonaux de cette dernière matrice sont les valeurs propres de M (rappelons $\mathrm{Sp}(f)=\mathrm{Sp}(M)$). On retrouve ainsi la matrice D.

  La formule de changement de base stipule :

$$\begin{array}{ccccccc} \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) & = & P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} & \times & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) & \times & P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}} \\ \shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel \\ M & = & P & \times & D & \times & P^{-1} \end{array}$$

□

c) En déduire que pour tout $k \in \{1,2,3\}$, la suite $\Big(\mathbb{P}\big([X_n = k]\big)\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ est une combinaison linéaire des trois suites $(\alpha^n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\beta^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\gamma^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Démonstration.
Soit $k \in \{1,2,3\}$. Dans la suite, notons $P = (a_{i,j})_{\substack{i \in [\![1,3]\!] \\ j \in [\![1,3]\!]}}$ et $P^{-1} = (b_{i,j})_{\substack{i \in [\![1,3]\!] \\ j \in [\![1,3]\!]}}$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{array}{rcll} U_n & = & M^n\, U_0 & \textit{(d'après la question \textbf{2.a)})} \\ & = & \big(P\,D\,P^{-1}\big)^n\, U_0 & \textit{(d'après la question \textbf{2.b)})} \\ & = & P\,D^n\,P^{-1}\,U_0 & \textit{(par récurrence immédiate)} \end{array}$$

Rappelons alors : $U_0 = \begin{pmatrix} \mathbb{P}([X_0=1]) \\ \mathbb{P}([X_0=2]) \\ \mathbb{P}([X_0=3]) \end{pmatrix}$ et $\mathbb{P}\big([X_0 = a]\big) = 1$.

Ainsi, seul l'un au plus des coefficients de U_0 est non nul.

- Deux cas se présentent alors :
  - × si $a = 0$ ou $a = 4$ alors $U_0 = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$ et ainsi $U_n = M^n\, 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$.

$$\boxed{\text{Dans ce cas : } \forall n \in \mathbb{N},\ U_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}([X_n=1]) \\ \mathbb{P}([X_n=2]) \\ \mathbb{P}([X_n=3]) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\ \alpha^n + 0\ \beta^n + 0\ \gamma^n \\ 0\ \alpha^n + 0\ \beta^n + 0\ \gamma^n \\ 0\ \alpha^n + 0\ \beta^n + 0\ \gamma^n \end{pmatrix}.}$$

  - × si $a \in \{1,2,3\}$ alors U_0 est la matrice colonne dont le coefficient en colonne a vaut 1 et les autres coefficients valent 0. On en conclut :

$$P^{-1}\ U_0 \ = \ \begin{pmatrix} b_{1,a} \\ b_{2,a} \\ b_{3,a} \end{pmatrix}$$

Et finalement :
$$\begin{array}{rcl} U_n & = & P\,D^n\,P^{-1}\,U_0 \\ & = & P \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 & 0 \\ 0 & \beta^n & 0 \\ 0 & 0 & \gamma^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1,a} \\ b_{2,a} \\ b_{3,a} \end{pmatrix} \\ & = & P \begin{pmatrix} b_{1,a}\,\alpha^n \\ b_{2,a}\,\beta^n \\ b_{3,a}\,\gamma^n \end{pmatrix} \ = \ \begin{pmatrix} a_{1,1}\,b_{1,a}\ \alpha^n + a_{1,2}\,b_{2,a}\ \beta^n + a_{1,3}\,b_{3,a}\ \gamma^n \\ a_{2,1}\,b_{1,a}\ \alpha^n + a_{2,2}\,b_{2,a}\ \beta^n + a_{2,3}\,b_{3,a}\ \gamma^n \\ a_{3,1}\,b_{1,a}\ \alpha^n + a_{3,2}\,b_{2,a}\ \beta^n + a_{3,3}\,b_{3,a}\ \gamma^n \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\boxed{\text{Dans ce cas : } \forall n \in \mathbb{N},\ U_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}([X_n=1]) \\ \mathbb{P}([X_n=2]) \\ \mathbb{P}([X_n=3]) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1}\,b_{1,a}\ \alpha^n + a_{1,2}\,b_{2,a}\ \beta^n + a_{1,3}\,b_{3,a}\ \gamma^n \\ a_{2,1}\,b_{1,a}\ \alpha^n + a_{2,2}\,b_{2,a}\ \beta^n + a_{2,3}\,b_{3,a}\ \gamma^n \\ a_{3,1}\,b_{1,a}\ \alpha^n + a_{3,2}\,b_{2,a}\ \beta^n + a_{3,3}\,b_{3,a}\ \gamma^n \end{pmatrix}.}$$

> Ainsi, pour tout $k \in \{1,2,3\}$, la suite $\Big(\mathbb{P}\big([X_n = k]\big)\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ est une combinaison linéaire des trois suites $(\alpha^n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\beta^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\gamma^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Commentaire

Il y a fort à parier que donner la forme de D^n et conclure que les produits de matrices successifs vont fournir des combinaisons linéaires des coefficients de D^n suffit à obtenir l'intégralité des points alloués sur cette question. Mais une telle rédaction revient presque à paraphraser le résultat fourni dans la question. Finalement, en voulant éviter que les candidats aient à faire un calcul (pas si compliqué), la question devient soit triviale (on cite le résultat de l'énoncé), soit bien plus complexe (c'est la rédaction ci-dessus) qu'un bête calcul.

□

d) Montrer que pour tout $k \in \{1,2,3\}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\big([X_n = k]\big) = 0$.

Démonstration.

- Remarquons tout d'abord :
  - × $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha^n = \lim\limits_{n\to+\infty} 0 = 0$ car $\alpha = 0$.
  - × $\lim\limits_{n\to+\infty} \beta^n = 0$ car $\beta \in \,]0,1[$.
  - × $\lim\limits_{n\to+\infty} \gamma^n = 0$ car $\gamma \in \,]0,1[$.
- Et ainsi, pour tout $k \in \{1,2,3\}$, on obtient à l'aide de la question précédente :
  - × si $a = 0$ ou $a = 4$:
  $$\mathbb{P}\big([X_n = k]\big) = 0 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$
  - × si $a \in \{1,2,3\}$:
  $$\mathbb{P}\big([X_n = k]\big) = a_{k,1}\, b_{1,a}\ \alpha^n + a_{k,2}\, b_{2,a}\ \beta^n + a_{k,3}\, b_{3,a}\ \gamma^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } k \in \{1,2,3\},\ \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\big([X_n = k]\big) = 0.}$$

Commentaire

- Les questions d'un énoncé ne sont pas forcément rangées dans un ordre croissant de difficulté. Il ne faut donc pas se décourager si on ne sait pas traiter une ou plusieurs questions d'affilée. Il faut au contraire s'accrocher : des questions plus simples apparaîtront.
- Cette question est une parfaite illustration du point ci-dessus :
  - × elle est bien plus simple que les deux questions qui la précèdent.
  - × elle peut parfaitement être traitée en admettant le résultat des questions ***2.b)*** et ***2.c)***.

□

3. Établir : $\lim\limits_{n\to+\infty} \Big(\mathbb{P}\big([X_n = 0]\big) + \mathbb{P}\big([X_n = 4]\big)\Big) = 1$.
Comment interpréter ce résultat ?

Démonstration.

- La famille $\big([X_n = k]\big)_{k\in[\![0,4]\!]}$ est un système complet d'événements. On en déduit :
$$\mathbb{P}\big([X_n = 0]\big) + \mathbb{P}\big([X_n = 1]\big) + \mathbb{P}\big([X_n = 2]\big) + \mathbb{P}\big([X_n = 3]\big) + \mathbb{P}\big([X_n = 4]\big) = 1$$
  Ainsi, d'après la question précédente :
$$\mathbb{P}\big([X_n = 0]\big) + \mathbb{P}\big([X_n = 4]\big) = 1 - \big(\mathbb{P}\big([X_n = 1]\big) + \mathbb{P}\big([X_n = 2]\big) + \mathbb{P}\big([X_n = 3]\big)\big) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$
$$\boxed{\text{On a bien : } \lim\limits_{n\to+\infty} \Big(\mathbb{P}\big([X_n = 0]\big) + \mathbb{P}\big([X_n = 4]\big)\Big) = 1.}$$
- Comme $[X_n = 0]$ et $[X_n = 4]$ sont incompatibles, ce résultat se réécrit :
$$\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left([X_n = 0] \ \cup\ [X_n = 4]\right) = 1$$
  Ce résultat signifie, qu'à terme, X_n prendra la valeur 0 ou 4.

$$\boxed{\text{À terme, tous les électeurs auront la même intention de vote.}}$$

□

Partie II - Le cas général

On revient dans cette partie au cas général d'un groupe de m électeurs.
On note $\pi_{n,k} = \mathbb{P}\big([X_n = k]\big)$, la probabilité pour qu'il y ait exactement k électeurs envisageant de voter pour A à l'issue du $n^{\text{ème}}$ jour.

4. Soit n un entier naturel.

a) Établir les trois relations :

$$\forall k \in [\![0, m-1]\!],\ \mathbb{P}_{[X_n=k]}\big([X_{n+1} = k+1]\big) = \frac{k\,(m-k)}{m(m-1)}$$

$$\forall k \in [\![1, m]\!],\ \mathbb{P}_{[X_n=k]}\big([X_{n+1} = k-1]\big) = \frac{k\,(m-k)}{m(m-1)}$$

$$\forall k \in [\![1, m-1]\!],\ \mathbb{P}_{[X_n=k]}\big([X_{n+1} = k]\big) = 1 - \frac{2k\,(m-k)}{m(m-1)}$$

Démonstration.

- Soit $k \in [\![0, m-1]\!]$. Déterminons tout d'abord $\mathbb{P}_{[X_n=k]}\big([X_{n+1} = k+1]\big)$.
  - × Si $[X_n = k]$ est réalisé c'est que le jour n, il y a k individus dans le groupe A et $m-k$ individus dans le groupe B.
  - × Dans ce cas, l'événement $[X_{n+1} = k+1]$ est réalisé si et seulement si le soir du jour $n+1$, $k+1$ individus ont pour intention de voter A. Cela se produit si et seulement si la rencontre entre les deux électeurs a fait passer un électeur du groupe B vers le groupe A.

    Plus précisément, l'événement $[X_{n+1} = k+1]$ est alors réalisé par tous les 2-tirages dont le premier élément est un numéro de $[\![0, m]\!]$ désignant un individu du groupe A et le deuxième est un numéro de $[\![0, m]\!]$ désignant un individu du groupe B.
    Un tel 2-tirage est entièrement déterminé par :

    – le premier numéro de ce couple : k possibilités (car le groupe A est constitué de k personnes)

    – le deuxième numéro de ce couple : $m-k$ possibilités (car le groupe B est constitué de $m-k$ personnes)

    Il y a donc $k\,(m-k)$ tels 2-tirages.
    Notons par ailleurs qu'il y a en tout $m \times (m-1)$ 2-tirages différents (m possibilités pour le premier individu choisi et $m-1$ pour le deuxième). On en conclut :

$$\mathbb{P}_{[X_n=k]}\big([X_{n+1} = k+1]\big) \ = \ \frac{k \times (m-k)}{m \times (m-1)}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \forall k \in [\![0, m-1]\!],\ \mathbb{P}_{[X_n=k]}\big([X_{n+1} = k+1]\big) = \frac{k\,(m-k)}{m(m-1)}.}$$

- Soit $k \in [\![1, m]\!]$. Déterminons maintenant la valeur de $\mathbb{P}_{[X_n=k]}\big([X_{n+1} = k-1]\big)$.
  - × Si $[X_n = k]$ est réalisé c'est que le jour n, il y a k individus dans le groupe A et $m-k$ individus dans le groupe B.
  - × Dans ce cas, l'événement $[X_{n+1} = k-1]$ est réalisé si et seulement si le soir du jour $n+1$, $k-1$ individus ont pour intention de voter A. Cela se produit si et seulement si le premier individu choisi appartient au groupe B (constitué alors de $m-k$ personnes) et le second au groupe A (constitué de k personnes).

$$\boxed{\text{On a bien : } \forall k \in [\![1, m]\!],\ \mathbb{P}_{[X_n=k]}\big([X_{n+1} = k-1]\big) \ = \ \frac{(m-k)\,k}{m\,(m-1)}.}$$

- Soit $k \in [\![1, m-1]\!]$.
Comme la famille $\big([X_{n+1} = j] \big)_{j \in [\![0,m]\!]}$ est un système complet d'événements, on a, à l'aide de l'application probabilité $\mathbb{P}_{[X_n = k]}$:

$$\sum_{j=0}^{m} \mathbb{P}_{[X_n=k]}\big([X_{n+1} = j] \big) \; = \; 1$$

Or :

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^{m} \mathbb{P}_{[X_n=k]}\big([X_{n+1} = j] \big) \\ = \; & \sum_{j=0}^{k-2} \mathbb{P}_{[X_n=k]}\big([X_{n+1} = j] \big) + \sum_{j=k-1}^{k+1} \mathbb{P}_{[X_n=k]}\big([X_{n+1} = j] \big) + \sum_{j=k+2}^{m} \mathbb{P}_{[X_n=k]}\big([X_{n+1} = j] \big) \\ = \; & \sum_{j=k-1}^{k+1} \mathbb{P}_{[X_n=k]}\big([X_{n+1} = j] \big) \qquad \textit{(car } \mathbb{P}_{[X_n=k]}\big([X_{n+1} = j] \big) = 0 \textit{ dès que } |k-j| \geqslant 2\textit{)} \end{aligned}$$

Cette dernière propriété a été démontrée en question ***1.b)***. En effet, on a :

$$\mathbb{P}_{[X_n=k]}\big([X_{n+1} = j] \big) \; = \; p_{k,j} \; = \; 0 \qquad \text{dès que } |k-j| \geqslant 2$$

(d'un jour sur l'autre il y a au maximum un électeur qui change d'intention de vote)

Finalement :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{[X_n=k]}\big([X_{n+1} = k] \big) \; &= \; 1 - \Big(\mathbb{P}_{[X_n=k]}\big([X_n = k-1] \big) + \mathbb{P}_{[X_n=k]}\big([X_n = k+1] \big) \Big) \\ &= \; 1 - \left(\dfrac{k\,(m-k)}{m\,(m-1)} + \dfrac{k\,(m-k)}{m\,(m-1)} \right) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \forall k \in [\![1, m-1]\!],\ \mathbb{P}_{[X_n=k]}\big([X_{n+1} = k] \big) = 1 - 2\, \dfrac{k\,(m-k)}{m\,(m-1)}.}$$

Commentaire

- L'absence de modélisation constatée dans les premières questions est corrigée dans cette partie. Cependant, il est décevant que le lien ne soit pas fait avec la première partie. À la lecture des relations à établir, il saute aux yeux que les résultats ne dépendent pas de n. C'est donc bien $p_{k,j}$ (pour $j \in \{k-1, k, k+1\}$) que l'on cherche à déterminer ici.
- Ne pas faire le lien entre les deux parties est fort regrettable. La question ***1.b)*** est énoncée dans un cadre restreint (pour $m = 4$) ce qui est tout à fait inutile comme on l'a déjà fait remarqué. De manière rigoureuse, on ne peut donc pas faire appel à ce résultat mais il faudrait le redémontrer.
- Le fait qu'il n'y ait pas d'articulation naturelle entre ces deux parties donne l'impression que la première partie a été ajoutée après coup. L'absence de modélisation et de généralisation (les questions ***1.a)*** et ***1.b)*** n'ont pas à être énoncées dans un cadre restreint) la rend difficile et peu exploitable. C'est dommage car la deuxième partie est très bien construite et que le problème en lui-même est tout à fait intéressant.
- On remarque qu'on a abandonné la notation $p_{i,j}$. Il est à noter que l'une des difficultés des sujets du TOP3 est justement la gestion de notations nouvelles. Il faut donc s'habituer à ce type d'effort intellectuel et rester bien concentré.

$\square$

b) En déduire la relation, si $k \in [\![1, m-1]\!]$:

$$\pi_{n+1,k} = \frac{(k-1)(m+1-k)\ \pi_{n,k-1} + \big(m(m-1) - 2k(m-k)\big)\ \pi_{n,k} + (k+1)(m-1-k)\ \pi_{n,k+1}}{m(m-1)}$$

Démonstration.
Soit $k \in [\![1, m-1]\!]$.

- La famille $\big([X_n = j] \big)_{j \in [\![0,m]\!]}$ est un système complet d'événements.
  On a alors, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{P}\big([X_{n+1} = k] \big) & = & \displaystyle\sum_{j=0}^{m} \mathbb{P}\big([X_n = j] \cap [X_{n+1} = k] \big) & \\
& = & \displaystyle\sum_{j=0}^{m} \mathbb{P}\big([X_n = j] \big) \times \mathbb{P}_{[X_n = j]}\big([X_{n+1} = k] \big) & \textit{(car pour tout } j \in [\![0,m]\!], \\
& & & \mathbb{P}\big([X_n = j] \big) \neq 0\textit{)} \\
& = & \displaystyle\sum_{j=0}^{m} \mathbb{P}_{[X_n = j]}\big([X_{n+1} = k] \big) \times \pi_{n,j} & \textit{(par définition de } \pi_{n,j}\textit{)} \\
& = & \displaystyle\sum_{j=k-1}^{k+1} \mathbb{P}_{[X_n = j]}\big([X_{n+1} = k] \big) \times \pi_{n,j} & \textit{(car } \mathbb{P}_{[X_n = j]}\big([X_{n+1} = k] \big) = 0 \\
& & & \textit{si } |j-k| \geqslant 2\textit{)} \\
& = & \mathbb{P}_{[X_n = k-1]}\big([X_{n+1} = k] \big) \times \pi_{n,k-1} & \\
& + & \mathbb{P}_{[X_n = k]}\big([X_{n+1} = k] \big) \times \pi_{n,k} & (*) \\
& + & \mathbb{P}_{[X_n = k+1]}\big([X_{n+1} = k] \big) \times \pi_{n,k+1} &
\end{array}$$

- Or, d'après la question précédente : $\forall i \in [\![0, m-1]\!],\ \mathbb{P}_{[X_n = i]}\big([X_{n+1} = i+1] \big) = \dfrac{i\,(m-i)}{m(m-1)}$.
  En utilisant cette relation en $i = k-1 \in [\![0, m-2]\!] \subseteq [\![0, m-1]\!]$, on obtient :

$$\mathbb{P}_{[X_n = k-1]}\big([X_{n+1} = k] \big) = \frac{(k-1)\,\big(m-(k-1)\big)}{m(m-1)}$$

- À l'aide de la deuxième relation de la question précédente, considérée en $i = k+1 \in [\![2, m]\!] \subseteq [\![1, m]\!]$, on obtient :

$$\mathbb{P}_{[X_n = k+1]}\big([X_{n+1} = k] \big) = \frac{(k+1)\,\big(m-(k+1)\big)}{m(m-1)}$$

- Enfin, la troisième relation donne, en $i = k \in [\![1, m-1]\!]$:

$$\mathbb{P}_{[X_n = k]}\big([X_{n+1} = k] \big) \ = \ 1 - \frac{2k\,(m-k)}{m(m-1)} \ = \ \frac{m\,(m-1) - 2k\,(m-k)}{m\,(m-1)}$$

$$\boxed{\text{En reportant ces trois éléments dans } (*), \text{ on obtient bien le résultat énoncé.}}$$ □

5. a) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n et pour tout $k \in [\![1, m-1]\!]$:

$$\pi_{n,k} \leqslant \left(\frac{m(m-1)-2}{m(m-1)}\right)^n$$

Démonstration.
Montrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)$, où $\mathcal{P}(n) : \forall k \in [\![1, m-1]\!],\ \pi_{n,k} \leqslant \left(\dfrac{m(m-1)-2}{m(m-1)}\right)^n$.

- **Initialisation** :
  Soit $k \in [\![1, m-1]\!]$. On a alors :
  × d'une part : $\pi_{0,k} = \mathbb{P}\big([X_0 = k]\big) \leqslant 1$.
  × d'autre part : $\left(\dfrac{m(m-1)-2}{m(m-1)}\right)^0 = 1$.
  D'où $\mathcal{P}(0)$.
- **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
  Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ $\left(\text{ i.e. } \forall k \in [\![1, m-1]\!],\ \pi_{n+1,k} \leqslant \left(\dfrac{m(m-1)-2}{m(m-1)}\right)^{n+1}\right)$.
  Soit $k \in [\![1, m-1]\!]$. D'après la question précédente :

$$\pi_{n+1,k} = \frac{(k-1)(m+1-k)\ \pi_{n,k-1} + \big(m(m-1) - 2k(m-k)\big)\ \pi_{n,k} + (k+1)(m-1-k)\ \pi_{n,k+1}}{m(m-1)}$$

Rappelons que par hypothèse de récurrence, on a : $\forall i \in [\![1, m-1]\!],\ \pi_{n,i} \leqslant \left(\dfrac{m(m-1)-2}{m(m-1)}\right)^n$.
Trois cas se présentent.

- Si $k = 1$ alors : $\pi_{n+1,1} = \dfrac{\big(m(m-1) - 2\,(m-1)\big)\ \pi_{n,1} + 2\,(m-2)\ \pi_{n,2}}{m(m-1)}$.
  × En appliquant l'hypothèse de récurrence en $i = 1 \in [\![1, m-1]\!]$, on obtient :

$$\pi_{n,1} \leqslant \left(\frac{m(m-1)-2}{m(m-1)}\right)^n$$

  × En appliquant l'hypothèse de récurrence en $i = 2 \in [\![1, m-1]\!]$, on obtient :

$$\pi_{n,2} \leqslant \left(\frac{m(m-1)-2}{m(m-1)}\right)^n$$

  Finalement, en notant $\alpha_m = \left(\dfrac{m(m-1)-2}{m(m-1)}\right)$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\pi_{n+1,1} &\leqslant \frac{m(m-1) - 2\,(m-1)}{m(m-1)}\ (\alpha_m)^n + \frac{2\,(m-2)}{m(m-1)}\ (\alpha_m)^n \\
&= \left(\frac{m(m-1) - 2\,(m-1)}{m(m-1)} + \frac{2\,(m-2)}{m(m-1)}\right) \times (\alpha_m)^n \\
&= \left(\frac{m(m-1)-2}{m(m-1)}\right) \times (\alpha_m)^n = \left(\frac{m(m-1)-2}{m(m-1)}\right)^{n+1}
\end{aligned}$$

- Si $k = m-1$ alors : $\pi_{n+1,m-1} \ = \ \dfrac{(m-2)\, 2\ \pi_{n,m-2} + \big(m(m-1) - 2\,(m-1)\big)\ \pi_{n,m-1}}{m(m-1)}$.

  On procède comme dans le point précédent. On obtient :

$$\begin{array}{rcl} \pi_{n+1,m-1} & \leqslant & \dfrac{2\,(m-2)}{m(m-1)}\ \big(\alpha_m\big)^n + \dfrac{m(m-1) - 2\,(m-1)}{m(m-1)}\ \big(\alpha_m\big)^n \\[2ex] & = & \left(\dfrac{m(m-1) - 2\,(m-1)}{m(m-1)} + \dfrac{2\,(m-2)}{m(m-1)}\right) \times \big(\alpha_m\big)^n \ = \ \left(\dfrac{m(m-1)-2}{m(m-1)}\right)^{n+1} \end{array}$$

- Si $k \in [\![2, m-2]\!]$

  × En appliquant l'hypothèse de récurrence en $i = k-1 \in [\![1, m-2]\!] \subseteq [\![1, m-1]\!]$, on obtient :
$$\pi_{n,k-1} \leqslant \left(\dfrac{m(m-1)-2}{m(m-1)}\right)^n$$
  × En appliquant l'hypothèse de récurrence en $i = k+1 \in [\![3, m-1]\!] \subseteq [\![1, m-1]\!]$, on obtient :
$$\pi_{n,k+1} \leqslant \left(\dfrac{m(m-1)-2}{m(m-1)}\right)^n$$
  × En appliquant l'hypothèse de récurrence en $i = k \in [\![1, m-1]\!]$, on obtient :
$$\pi_{n,k} \leqslant \left(\dfrac{m(m-1)-2}{m(m-1)}\right)^n$$

  Finalement, à l'aide de la formule générale, on obtient :

$$\begin{array}{rl} & \pi_{n+1,k} \\[2ex] \leqslant & \dfrac{(k-1)(m+1-k)}{m(m-1)}\ \big(\alpha_m\big)^n + \dfrac{m(m-1) - 2k(m-k)}{m(m-1)}\ \big(\alpha_m\big)^n + \dfrac{(k+1)(m-1-k)}{m(m-1)}\ \big(\alpha_m\big)^n \\[2ex] = & \left(\dfrac{(k-1)(m+1-k)}{m(m-1)} + \dfrac{m(m-1) - 2k(m-k)}{m(m-1)} + \dfrac{(k+1)(m-1-k)}{m(m-1)}\right)\ \big(\alpha_m\big)^n \\[2ex] = & \left(\dfrac{m(m-1)-2}{m(m-1)}\right) \times \big(\alpha_m\big)^n \qquad (*) \\[2ex] = & \left(\dfrac{m(m-1)-2}{m(m-1)}\right)^{n+1} \end{array}$$

  Pour obtenir l'égalité $(*)$, on étudie de plus près le 1er et 3ème terme de la somme :

  (i) $(k-1)(m+1-k) \ = \ (k-1)\,\big((m-k)+1\big) \ = \ (k-1)\,(m-k) + (k-1)$

  (ii) $(k+1)(m-1-k) \ = \ (k+1)\,\big((m-k)-1\big) \ = \ (k+1)\,(m-k) - (k+1)$

  En sommant ces deux termes, on obtient :

$$\begin{array}{rl} & (k-1)\,(m-k) + (k-1) + (k+1)\,(m-k) - (k+1) \\ = & (m-k)\ \big((k-1) + (k+1)\big) + (k-1) - (k+1) \\ = & (m-k)\ 2\,k - 2 \end{array}$$

Finalement, en ajoutant le 2ème terme à cette somme, on obtient :

$$m(m-1) - 2k(m-k) + (m-k)\, 2\,k - 2 \ = \ m(m-1) - 2$$

Cela permet de conclure que l'égalité $(*)$ est bien vérifiée.

On a démontré : $\forall k \in [\![1, m-1]\!]$, $\pi_{n+1,k} \leqslant \left(\dfrac{m(m-1)-2}{m(m-1)}\right)^{n+1}$.
D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N},\ \forall k \in [\![1, m-1]\!],\ \pi_{n,k} \leqslant \left(\dfrac{m(m-1)-2}{m(m-1)}\right)^{n}.}$$

Commentaire

- On rappelle que $\mathcal{P}(n)$ est une proposition mathématique qui dépend de n. L'écriture (n) a d'ailleurs pour but d'insister sur cette dépendance en n. En revanche, la proposition : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est totalement indépendante de n car n apparaît alors comme une variable liée au quantificateur $\forall$ (on dit que n est une variable muette). L'écriture « $\mathcal{P}(n)$: $\cancel{\forall n \in \mathbb{N}}, \ldots$ » n'a alors pas de sens (il y a dépendance en n à gauche mais pas à droite). Attention cependant à ne pas en conclure que la proposition $\mathcal{P}(n)$ ne peut contenir de quantificateurs. Comme on le voit dans cet exemple $\big(\ \mathcal{P}(n) : \forall k \in [\![1, m-1]\!],\ \pi_{n,k} \leqslant (\alpha_m)^n\ \big)$, $\mathcal{P}(n)$ peut s'écrire à l'aide de quantificateurs mais la variable n ne doit en aucun cas être liée à un quantificateur (sinon, elle serait muette).
- Dans cette récurrence, on traite séparément plusieurs cas. Cela provient de l'obligation de vérifier que l'on est bien dans le cadre d'application de l'hypothèse de récurrence. Cette gestion correcte des certains cas rend la démonstration complexe. Mais le cœur de la démonstration (le cas $k \in [\![2, m-2]\!]$) n'est pas réellement difficile. On peut le résumer ainsi :
  1) à l'aide de la question précédente, on fait apparaître $\pi_{n+1,k}$ comme combinaison linéaire de $\pi_{n,k-1}$, $\pi_{n,k}$, $\pi_{n,k+1}$.
  2) chacun des termes $\pi_{n,k-1}$, $\pi_{n,k}$, $\pi_{n,k+1}$ est majoré par $(\alpha_m)^n$ par hypothèse de récurrence.
  3) formellement, cette majoration revient à remplacer, dans la combinaison linéaire, les termes $\pi_{n,k-1}$, $\pi_{n,k}$, $\pi_{n,k+1}$ par $(\alpha_m)^n$. On met alors en facteur $(\alpha_m)^n$.
  Par un simple calcul, on s'aperçoit que l'autre terme n'est autre que α_m ce qui termine la démonstration. □

b) En déduire, pour tout $k \in [\![1, m-1]\!]$, la limite de $\pi_{n,k}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Démonstration.
Soit $k \in [\![1, m-1]\!]$. Soit $n \in \mathbb{N}$.
D'après la question précédente et en remarquant $\pi_{n,k} = \mathbb{P}\big(\,[X_n = k]\,\big) \geqslant 0$:

$$0 \leqslant \pi_{n,k} \leqslant \left(\dfrac{m(m-1)-2}{m(m-1)}\right)^{n}$$

Or :
× $\lim\limits_{n\to+\infty} 0 = 0$,
× $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{m(m-1)-2}{m(m-1)}\right)^{n} = 0$ car $\dfrac{m(m-1)-2}{m(m-1)} \in \,]0,1[$ (puisque $m(m-1)-2 < m(m-1)$).

$$\boxed{\text{Ainsi, par théorème d'encadrement : } \lim\limits_{n\to+\infty} \pi_{n,k} = 0.}$$ □

6. On définit l'évènement V_A (respectivement V_B) suivant : « au bout d'un certain nombre de jours, tous les individus du groupe ont l'intention de voter pour A (respectivement pour B) ».

a) Montrer : $\mathbb{P}(V_A) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\big([X_n = m]\big)$ et $\mathbb{P}(V_B) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\big([X_n = 0]\big)$.

Démonstration.

- Tout d'abord :

L'événement V_A est réalisé

$\Leftrightarrow$ Au bout d'un certain nombre de jours, tous les individus du groupe ont l'intention de voter pour A

$\Leftrightarrow$ Il existe un jour $i \in \mathbb{N}$ pour lequel tous les électeurs ont l'intention de voter A

$\Leftrightarrow$ Il existe un jour $i \in \mathbb{N}$ pour lequel les m électeurs ont l'intention de voter A

$\Leftrightarrow$ Il existe $i \in \mathbb{N}$ tel que la v.a.r. X_i prend la valeur m

$\Leftrightarrow$ Il existe $i \in \mathbb{N}$ tel que l'événement $[X_i = m]$ est réalisé

$\Leftrightarrow$ L'événement $\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} [X_i = m]$ est réalisé

$$\boxed{\text{On en déduit : } V_A = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} [X_i = m].}$$

- Ainsi :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(V_A) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=0}^{+\infty} [X_i = m]\right) \\
&= \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=0}^{n} [X_i = m]\right) && \textit{(par le théorème de la limite monotone)} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\big([X_n = m]\big) && \textit{(car } \big([X_i = m]\big)_{i\in\mathbb{N}} \textit{ est une suite croissante d'événements)}
\end{aligned}$$

- Il reste à démontrer que $\big([X_i = m]\big)_{i\in\mathbb{N}}$ est bien une suite croissante d'événements.
  Formellement, on doit démontrer : $\forall i \in \mathbb{N}, [X_i = m] \subseteq [X_{i+1} = m]$.
  Soit $i \in \mathbb{N}$. Supposons l'événement $[X_i = m]$ réalisé.
  Cela signifie qu'au soir du $i^{\text{ème}}$ jour, le groupe d'électeurs ayant l'intention de voter pour A comporte m individus. La rencontre qui a lieu entre les deux électeurs le jour suivant réunit donc deux individus ayant l'intention de voter A. Ainsi, il n'y a pas de modification des intentions de vote. Le soir du $(i+1)^{\text{ème}}$ jour, il y a donc toujours m individus ayant l'intention de voter A. Autrement dit, l'événement $[X_{i+1} = m]$ est réalisé.

$$\boxed{\forall i \in \mathbb{N}, [X_i = m] \subseteq [X_{i+1} = m]}$$

$$\boxed{\text{On a donc bien : } \mathbb{P}(V_A) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\big([X_n = m]\big).}$$

- En procédant de même, on démontre :

$$V_B = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} [X_i = 0]$$

Ainsi :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{P}(V_B) & = & \mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{i=0}^{+\infty} [X_i = 0]\right) & \\
& = & \lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{i=0}^{n} [X_i = 0]\right) & \textit{(par le théorème de la limite monotone)} \\
& = & \lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}\big([X_n = 0]\big) & \textit{(car } \big([X_i = 0]\big)_{i \in \mathbb{N}} \textit{ est une suite croissante d'événements)}
\end{array}$$

La croissance de la suite $\big([X_i = 0]\big)_{i \in \mathbb{N}}$ se démontre aussi comme dans le cas précédent. Si $[X_i = 0]$ est réalisé c'est qu'au soir du jour i il y a 0 individu ayant l'intention de voter A. Il en est de même du soir du jour $i+1$ car la rencontre a lieu entre deux électeurs ayant tous les deux l'intention de voter B.

$$\boxed{\text{On a donc bien : } \mathbb{P}(V_B) = \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\big([X_n = 0]\big).}$$

□

b) Montrer : $\mathbb{P}(V_A) + \mathbb{P}(V_B) = 1$.
Que signifie ce résultat ?

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- La famille $\big([X_n = k]\big)_{k \in [\![0,m]\!]}$ est un système complet d'événements. On en déduit :

$$\sum_{k=0}^{m} \mathbb{P}\big([X_n = k]\big) \; = \; 1$$

Ainsi :

$$\begin{array}{rcl}
\mathbb{P}\big([X_n = 0]\big) + \mathbb{P}\big([X_n = m]\big) & = & 1 - \left(\sum\limits_{k=1}^{m-1} \mathbb{P}\big([X_n = k]\big)\right) \\
& = & 1 - \left(\sum\limits_{k=1}^{m-1} \pi_{n,k}\right)
\end{array}$$

- Or :
  - × d'après la question ***5.b)***, pour tout $k \in [\![1, m-1]\!]$:

$$\lim_{n \to +\infty} \pi_{n,k} = 0$$

  - × d'après la question ***6.a)*** :

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\big([X_n = 0]\big) = \mathbb{P}(V_B) \quad \text{et} \quad \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\big([X_n = m]\big) = \mathbb{P}(V_A)$$

En passant à la limite dans l'égalité du point précédent, on obtient alors :

$$\underbrace{\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\big([X_n = 0]\big) + \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\big([X_n = m]\big)}_{\mathbb{P}(V_B) + \mathbb{P}(V_A)} \; = \; \underbrace{1 - \left(\sum_{k=1}^{m-1} \big(\lim_{n \to +\infty} \pi_{n,k}\big)\right)}_{1 - 0}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \mathbb{P}(V_A) + \mathbb{P}(V_B) = 1.}$$

- Les événements V_A et V_B sont incompatibles. En effet, si au bout d'un certain nombre de jours tous les électeurs ont l'intention de voter pour le même candidat alors les intentions de vote ne sont plus modifiées les jours suivants. Il n'est donc pas possible de retrouver tous les électeurs dans un même groupe (au soir du jour $i_1 \in \mathbb{N}$) et dans un autre (au soir du jour $i_2 \in \mathbb{N}$).

  On en déduit :

  $$\mathbb{P}\big(V_A \cup V_B\big) \ = \ \mathbb{P}(V_A) + \mathbb{P}(V_B) \ = \ 1$$

  Ce dernier résultat signifie qu'au bout d'un certain nombre de jours, tous les électeurs seront dans le même groupe.

  $$\boxed{\text{À terme, tous les électeurs auront la même intention de vote.}}$$ □

7. Pour tout entier naturel n, on pose $Z_n = X_{n+1} - X_n$.

a) Justifier : $Z_n(\Omega) = \{-1, 0, 1\}$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.
La v.a.r. Z_n prend pour valeur la différence entre le nombre d'électeurs ayant pour intention de voter pour A le soir du jour $n+1$ et le nombre d'électeurs ayant pour intention de voter pour A le soir du jour n. Or, la rencontre entre les deux électeurs le jour $n+1$ ne modifie l'intention de vote que d'un électeur au plus. Plus précisément :

× soit la rencontre a lieu entre un électeur du groupe A qui convainc un électeur du groupe B.
Dans ce cas, Z_n prend la valeur 1.

× soit la rencontre a lieu entre deux électeurs du même bord.
Dans ce cas, Z_n prend la valeur 0.

× soit la rencontre a lieu entre un électeur du groupe B qui convainc un électeur du groupe A.
Dans ce cas, Z_n prend la valeur -1.

$$\boxed{Z_n(\Omega) = \{-1, 0, 1\}}$$ □

b) Exprimer $\mathbb{P}\big([Z_n = 1]\big)$ en fonction des probabilités $\pi_{n,k}$ avec $k \in [\![1, m-1]\!]$.

Démonstration.
La famille $\big([X_n = k]\big)_{k \in [\![0,m]\!]}$ est un système complet d'événements.
On a alors, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{P}\big([Z_n = 1]\big) & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{m} \mathbb{P}\big([X_n = k] \cap [Z_n = 1]\big) & \\
& = & \displaystyle\sum_{k=0}^{m} \mathbb{P}\big([X_n = k] \cap [X_{n+1} - X_n = 1]\big) & \\
& = & \displaystyle\sum_{k=0}^{m} \mathbb{P}\big([X_n = k] \cap [X_{n+1} = k+1]\big) & \\
& = & \displaystyle\sum_{k=0}^{m-1} \mathbb{P}\big([X_n = k] \cap [X_{n+1} = k+1]\big) & \textit{(car } [X_{n+1} = m+1]\big) = \varnothing \textit{)} \\
& = & \displaystyle\sum_{k=0}^{m-1} \mathbb{P}\big([X_n = k]\big) \times \mathbb{P}_{[X_n = k]}\big([X_{n+1} = k+1]\big) & \textit{(car pour tout } k \in [\![0, m-1]\!], \\
& & & \mathbb{P}\big([X_n = k]\big) \neq 0 \textit{)} \\
& = & \displaystyle\sum_{k=1}^{m-1} \mathbb{P}\big([X_n = k]\big) \times \mathbb{P}_{[X_n = k]}\big([X_{n+1} = k+1]\big) & \textit{(car } \mathbb{P}_{[X_n = 0]}\big([X_{n+1} = 1]\big) = 0 \textit{)}
\end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{P}\big([Z_n = 1]\big) = \sum_{k=1}^{m-1} \mathbb{P}_{[X_n = k]}\big([X_{n+1} = k+1]\big) \times \pi_{n,k}}$$ □

c) Comparer $\mathbb{P}\big([Z_n = -1]\big)$ et $\mathbb{P}\big([Z_n = 1]\big)$.

Démonstration.
La famille $\big([X_n = k]\big)_{k \in [\![0,m]\!]}$ est un système complet d'événements.
On a alors, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big([Z_n = -1]\big) &= \sum_{k=0}^{m} \mathbb{P}\big([X_n = k] \cap [Z_n = -1]\big) \\
&= \sum_{k=0}^{m} \mathbb{P}\big([X_n = k] \cap [X_{n+1} - X_n = -1]\big) \\
&= \sum_{k=0}^{m} \mathbb{P}\big([X_n = k] \cap [X_{n+1} = k-1]\big) \\
&= \sum_{k=1}^{m} \mathbb{P}\big([X_n = k] \cap [X_{n+1} = k-1]\big) && \textit{(car } [X_{n+1} = -1]\big) = \varnothing\textit{)} \\
&= \sum_{k=1}^{m} \mathbb{P}\big([X_n = k]\big) \times \mathbb{P}_{[X_n = k]}\big([X_{n+1} = k-1]\big) && \textit{(car pour tout } k \in [\![1,m]\!], \\
& && \mathbb{P}\big([X_n = k]\big) \neq 0\textit{)} \\
&= \sum_{k=1}^{m-1} \mathbb{P}\big([X_n = k]\big) \times \mathbb{P}_{[X_n = k]}\big([X_{n+1} = k-1]\big) && \textit{(car } \mathbb{P}_{[X_n = m]}\big([X_{n+1} = m-1]\big) = 0\textit{)} \\
&= \sum_{k=1}^{m-1} \mathbb{P}\big([X_n = k]\big) \times \mathbb{P}_{[X_n = k]}\big([X_{n+1} = k+1]\big) && \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{4.a)}}\textit{)} \\
&= \mathbb{P}\big([Z_n = 1]\big)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}\big([Z_n = 1]\big) = \mathbb{P}\big([Z_n = -1]\big)}$$

Commentaire

- On détaille ici la correction pour faire apparaître de manière précise les similarités et différences avec la question précédente. Cependant, on pouvait plus sobrement indiquer que par analogie avec le raisonnement précédent, on obtient :

$$\mathbb{P}\big([Z_n = -1]\big) = \sum_{k=1}^{m-1} \mathbb{P}\big([X_n = k]\big) \times \mathbb{P}_{[X_n = k]}\big([X_{n+1} = k-1]\big)$$

- Dans la remarque de la question ***1.d)***, on a introduit $Y_n = m - X_n$, v.a.r. qui donne le nombre d'électeurs ayant pour intention de voter pour B le soir du jour n. De même, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on peut introduire la v.a.r. $T_n = Y_{n+1} - Y_n$. Il y a symétrie du problème : on ne change pas l'expérience en échangeant les rôles de A et B. On en déduit que Z_n et T_n suivent la même loi. Cela permet de retrouver :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big([Z_n = -1]\big) &= \mathbb{P}\big([X_{n+1} - X_n = -1]\big) \\
&= \mathbb{P}\big([(\cancel{m} - Y_{n+1}) - (\cancel{m} - Y_n) = -1]\big) \\
&= \mathbb{P}\big([Y_n - Y_{n+1} = -1]\big) \\
&= \mathbb{P}\big([Y_{n+1} - Y_n = 1]\big) \\
&= \mathbb{P}\big([T_n = 1]\big) \\
&= \mathbb{P}\big([Z_n = 1]\big) && \textit{(car } T_n \textit{ et } Z_n \textit{ ont même loi)}
\end{aligned}$$

□

d) En déduire que $\mathbb{E}(Z_n) = 0$.

Démonstration.
- La v.a.r. Z_n est finie. Elle admet donc une espérance.
- On a alors :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{E}(Z_n) & = & \sum\limits_{k \in Z_n(\Omega)} k \times \mathbb{P}\big([Z_n = k]\big) & \textit{(par définition)} \\ & = & (-1) \times \mathbb{P}\big([Z_n = -1]\big) + 0 \times \mathbb{P}\big([Z_n = -1]\big) + 1 \times \mathbb{P}\big([Z_n = 1]\big) & \\ & = & -\mathbb{P}\big([Z_n = 1]\big) + \mathbb{P}\big([Z_n = 1]\big) & \textit{(d'après la question précédente)} \\ & = & 0 & \end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(Z_n) = 0}$$

Commentaire

Il est tout à fait possible, au brouillon, d'opérer par rétro-ingénierie, c'est-à-dire partir du résultat donné par l'énoncé ($\mathbb{E}(Z_n) = 0$) pour en déduire un résultat intermédiaire (en l'occurence la propriété $\mathbb{P}\big([Z_n = -1]\big) = \mathbb{P}\big([Z_n = 1]\big)$). Évidemment, partir du résultat ne constitue en aucun cas une démonstration. Mais la valeur du résultat intermédiaire peut parfois renseigner sur la voie à choisir pour le démontrer. □

e) Montrer que la suite $\big(\mathbb{E}(X_n)\big)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante et déterminer cette constante en fonction de a.

Démonstration.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Par définition : $Z_n = X_{n+1} - X_n$.
  Comme les v.a.r. X_n et X_{n+1} sont finies, elles admettent une espérance.
  On en déduit, d'après l'égalité précédente :

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{E}(Z_n) & = & \mathbb{E}(X_{n+1} - X_n) & = & \mathbb{E}(X_{n+1}) - \mathbb{E}(X_n) \quad \textit{(par linéarité de l'espérance)} \\ \shortparallel & & & & \\ 0 & \multicolumn{4}{l}{\textit{(d'après la question précédente)}} \end{array}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \ \mathbb{E}(X_{n+1}) = \mathbb{E}(X_n)}$$

- Ainsi, la suite $\big(\mathbb{E}(X_n)\big)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall n \in \mathbb{N}, \ \mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X_0) = \mathbb{E}(a) = a.}$$

□

8. Montrer que $\mathbb{P}(V_A) = \dfrac{a}{m}$ et interpréter ce résultat.

Démonstration.
- On a :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{E}(X_n) & = & \sum\limits_{k \in X_n(\Omega)} k \times \mathbb{P}\big([X_n = k]\big) & \textit{(par définition)} \\ & = & \sum\limits_{k=0}^{m} k \times \mathbb{P}\big([X_n = k]\big) & \\ & = & 0 \times \mathbb{P}\big([X_n = 0]\big) + \sum\limits_{k=1}^{m-1} k \times \mathbb{P}\big([X_n = k]\big) + m \times \mathbb{P}\big([X_n = m]\big) & \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, d'après la question précédente : } m \times \mathbb{P}\big([X_n = m]\big) \ = \ a - \sum_{k=1}^{m-1} k \times \mathbb{P}\big([X_n = k]\big).}$$

- Or, d'après la question ***5.b)*** : $\forall k \in [\![1, m-1]\!]$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\big([X_n = k]\big) = 0$.
  On en déduit :

$$\begin{array}{ccccc} \lim\limits_{n\to+\infty} m \times \mathbb{P}\big([X_n = m]\big) & = & \lim\limits_{n\to+\infty} \left(a - \sum\limits_{k=1}^{m-1} k \times \mathbb{P}\big([X_n = k]\big)\right) & = & a - \sum\limits_{k=1}^{m-1} k \times \lim\limits_{n\to+\infty} \big(\mathbb{P}\big([X_n = k]\big)\big) \\ \shortparallel & & & & \shortparallel \\ m \times \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\big([X_n = m]\big) & & & & a \\ \shortparallel & & & & \\ m \times \mathbb{P}(V_A) & & \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{6.a)}}\textit{)} & & \end{array}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \mathbb{P}(V_A) = \frac{a}{m}.}$$

- On en déduit, par la question ***6.b)*** :

$$\mathbb{P}(V_B) \ = \ 1 - \mathbb{P}(V_A) \ = \ 1 - \frac{a}{m} \ = \ \frac{m-a}{m}$$

  La quantité $\dfrac{a}{m}$ (respectivement $\dfrac{m-a}{m}$) est exactement la proportion d'électeurs souhaitant initialement voter pour A (respectivement B).

Ainsi, la probabilité que les électeurs aient tous à terme l'intention de voter pour un même candidat est donnée par la proportion d'électeurs souhaitant initialement voter pour ce candidat.

□

Problème 2 - Une propriété limite des lois de Pareto

Question préliminaire

Soit g une fonction continue sur un intervalle I, à valeurs réelles.

1. a) Montrer que pour tout α et β dans I tels que $\alpha < \beta$:

$$\frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} g(t)\ dt = \int_{0}^{1} g\big(\alpha + (\beta - \alpha)x\big)\ dx$$

Démonstration.

- La fonction g est continue sur l'intervalle I. Comme α et β sont deux éléments de I, on en déduit que g est continue sur le **segment** $[\alpha, \beta]$.
  Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} g(t)\ dt$ est bien définie.
- On effectue le changement de variable $\boxed{x = \dfrac{1}{\beta - \alpha}\ t - \dfrac{\alpha}{\beta - \alpha}}$.

$$\left|\begin{array}{l} x = \dfrac{t-\alpha}{\beta-\alpha} \quad \text{(et donc } t = (\beta-\alpha)\,x + \alpha) \\ \hookrightarrow dx = \dfrac{1}{\beta-\alpha}\ dt \quad \text{ et } \quad dt = (\beta-\alpha)\ dx \\ \bullet\ t = \alpha \ \Rightarrow\ x = 1 \\ \bullet\ t = \beta \ \Rightarrow\ x = 0 \end{array}\right.$$

  Ce changement de variable est valide car $\psi : x \mapsto (\beta - \alpha)\,x + \alpha$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$.
  On obtient : $$\int_{\alpha}^{\beta} g(t)\ dt \ = \ \int_{0}^{1} g(\alpha + (\beta-\alpha)\,x)\ (\beta-\alpha)\ dx$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} g(t)\ dt = \int_{0}^{1} g\big(\alpha + (\beta - \alpha)x\big)\ dx.}$$

Commentaire

- Il est aussi possible de partir de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 g(\alpha + (\beta-\alpha)\,x)\ dx$ et obtenir, à l'aide du changement de variable $\boxed{t = \alpha + (\beta - \alpha)\,x}$, l'intégrale $\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} g(t)\ dt$ (à une constante près).
- Dans cette question, on passe d'une intégrale sur le segment $[\alpha, \beta]$ à une intégrale sur le segment $[0, 1]$ (ou l'inverse). L'idée derrière le changement de variable opéré est assez simple. Il s'agit de paramétrer le segment $[\alpha, \beta]$ à l'aide des réels α et β. Plus précisément, on a :
$$\{\alpha + (\beta-\alpha)\,x \mid x \in [0,1]\} \ = \ [\alpha, \beta]$$
  Autrement dit, lorsque x parcourt le segment $[0, 1]$ dans son entier, $\alpha + (\beta - \alpha)\,x$ parcourt le segment $[\alpha, \beta]$ dans son entier. Généralement, cette égalité s'écrit plutôt sous la forme :
$$\{x\,\beta + (1-x)\,\alpha \mid x \in [0,1]\} \ = \ [\alpha, \beta]$$
  On comprend cette paramétrisation sur quelques exemples : si $x = 0$, on récupère α ; si $x = 1$, on récupère β ; si $x = \frac{1}{2}$, on récupère $\frac{\alpha+\beta}{2}$, le point milieu du segment $[\alpha, \beta]$. Ce dernier point correspond à l'isobarycentre du couple (α, β). Le point $x\,\beta + (1-x)\,\alpha$ apparaît lui comme le barycentre du couple (α, β) affecté des coefficients de pondération $1 - x$ et x. Finalement, $[\alpha, \beta]$ s'écrit comme l'ensemble des barycentres de ce type. □

b) Soit a, b, c, d dans I tels que $a < c < d < b$.
On suppose g décroissante sur I, établir l'encadrement :

$$\frac{1}{b-c}\int_c^b g(t)\, dt \ \leqslant\ \frac{1}{d-c}\int_c^d g(t)\, dt \ \leqslant\ \frac{1}{d-a}\int_a^d g(t)\, dt$$

Démonstration.

- Remarquons tout d'abord, à l'aide de la question précédente :

$$\frac{1}{b-c}\int_c^b g(t)\, dt \ = \ \int_0^1 g\big(c+(b-c)\,x\big)\, dx \qquad \textit{(car c et b sont des éléments de I tels que $c<b$)}$$

$$\frac{1}{d-c}\int_c^d g(t)\, dt \ = \ \int_0^1 g\big(c+(d-c)\,x\big)\, dx \qquad \textit{(car c et d sont des éléments de I tels que $c<d$)}$$

$$\frac{1}{d-a}\int_a^d g(t)\, dt \ = \ \int_0^1 g\big(a+(d-a)\,x\big)\, dx \qquad \textit{(car a et d sont des éléments de I tels que $a<d$)}$$

- Cherchons tout d'abord à obtenir la première inégalité.
Soit $x \in [0,1]$.

Tout d'abord	d	$<$	b	*(d'après l'énoncé)*
donc	$d-c$	$<$	$b-c$	
ainsi	$(d-c)\ x$	$\leqslant$	$(b-c)\ x$	*(car $x \geqslant 0$)*
d'où	$c+(d-c)\ x$	$\leqslant$	$c+(b-c)\ x$	
enfin	$g\big(c+(d-c)\ x\big)$	$\geqslant$	$g\big(c+(b-c)\ x\big)$	*(car g est décroissante sur I)*

$$\boxed{\forall x \in [0,1],\ \ g\big(c+(d-c)\ x\big) \ \geqslant\ g\big(c+(b-c)\ x\big)}$$

- D'après ce qui précède, par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant $(0 \leqslant 1)$:

$$\underbrace{\int_0^1 g\big(c+(d-c)\ x\big)\, dx}_{=\ \frac{1}{d-c}\int_c^d g(t)\, dt} \ \geqslant\ \underbrace{\int_0^1 g\big(c+(b-c)\ x\big)\, dx}_{=\ \frac{1}{b-c}\int_c^b g(t)\, dt}$$

*(d'après la question **1.a)** avec $c<b$ et $c<d$)*

$$\boxed{\text{On a bien : } \frac{1}{b-c}\int_c^b g(t)\, dt \ \leqslant\ \frac{1}{d-c}\int_c^d g(t)\, dt.}$$

Commentaire

Dans la question précédente, on a détaillé un processus qui peut être vu comme une mise sous forme normale : toute intégrale entre α et β d'une fonction continue sur le **segment** $[\alpha,\beta]$ peut s'écrire comme une intégrale entre 0 et 1. L'intérêt d'une telle normalisation se perçoit très bien dans cette question. Au lieu d'étudier trois intégrales sur des domaines différents, l'étape de normalisation permet de ne considérer que des intégrales entre 0 et 1. On obtient trois objets sous la même forme, ce qui rend plus simple les comparaisons.

- Cherchons maintenant à obtenir la deuxième inégalité.
Soit $x \in [0,1]$. Remarquons :
$$\begin{array}{rrcl} & a+(d-a)\,x & \leqslant & c+(d-c)\,x \\ \Leftrightarrow & (\cancel{d}-a)\,x-(\cancel{d}-c)\,x & \leqslant & c-a \\ \Leftrightarrow & (c-a)\,x & \leqslant & c-a \\ \Leftrightarrow & x & \leqslant & 1 \qquad \textit{(car } c-a>0\textit{)} \end{array}$$
La dernière inégalité étant vérifiée, il en est de même de la première.
Ainsi $\quad a+(d-a)\ x \leqslant c+(d-c)\ x$
donc $\quad g\big(a+(d-a)\ x\big) \geqslant g\big(c+(b-c)\ x\big) \quad$ *(car g est décroissante sur I)*
$$\boxed{\forall x \in [0,1],\ \ g\big(a+(d-a)\ x\big) \geqslant g\big(c+(d-c)\ x\big)}$$

- Puis, par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant ($0 \leqslant 1$) :
$$\begin{array}{ccc} \displaystyle\int_0^1 g\big(a+(d-a)\ x\big)\ dx & \geqslant & \displaystyle\int_0^1 g\big(c+(d-c)\ x\big)\ dx \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ \dfrac{1}{d-a}\displaystyle\int_a^d g(t)\ dt & & \dfrac{1}{d-c}\displaystyle\int_c^d g(t)\ dt \end{array}$$
*(d'après la question **1.a)** avec $a<d$ et $c<d$)*
$$\boxed{\text{On a bien : } \dfrac{1}{d-c}\displaystyle\int_c^d g(t)\ dt \leqslant \dfrac{1}{d-a}\displaystyle\int_a^d g(t)\ dt.}$$
□

Partie I - Partie fractionnaire d'une variable à densité

- Pour tout réel x positif ou nul :
  - on note $[x]$ la *partie entière* de x. On rappelle qu'il s'agit de l'unique entier naturel n qui vérifie l'encadrement : $n \leqslant x < n+1$.
  - on note $\{x\} = x - [x]$, que l'on appelle la *partie fractionnaire* de x.

  Par exemple, si $x = 12,34$, alors $[x] = 12$ et $\{x\} = 0,34$.
- Dans cette partie, X désigne une variable aléatoire à valeurs réelles admettant une densité f qui vérifie les propriétés :
  - f est nulle sur $]-\infty, 0[$;
  - la restriction de f à $[0,+\infty[$ est continue et décroissante.

  On pose $M = f(0)$, c'est le maximum de f sur $\mathbb{R}$.

Soit $Y = \{X\} = X - [X]$, la variable aléatoire égale à la partie fractionnaire de X.
On note F_Y la fonction de répartition de Y.

Commentaire

Généralement, on distingue les fonctions :
× partie entière par défaut, notée $\lfloor . \rfloor$. On rappelle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lfloor x \rfloor$ désigne l'entier directement inférieur à x (c'est-à-dire le plus grand entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leqslant x$).
(c'est la notation du programme utilisée pour définir la fonction partie entière)
× partie entière par excès, notée $\lceil . \rceil$. On rappelle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lceil x \rceil$ désigne l'entier directement supérieur à x (c'est-à-dire le plus petit entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \geqslant x$).
Il ne faut pas se laisser déstabiliser par la nouvelle notation de l'énoncé ($[x]$ en lieu et place de $\lfloor x \rfloor$) et accepter de l'utiliser par la suite.

Commentaire

- Comme le stipule le programme officiel, « la fonction partie entière permet de discrétiser des phénomènes continus ». En particulier, si X est une v.a.r. à densité, la v.a.r. $T = \lfloor X \rfloor$ est, quant à elle, une v.a.r. discrète. L'étude de la v.a.r. T est relativement fréquente dans les sujets car cela permet de proposer un énoncé qui mêle v.a.r. à densité et v.a.r. discrètes.
- De manière assez malhabile, le sujet définit la fonction partie fractionnaire seulement sur l'intervalle $[0, +\infty[$. La définition de l'énoncé est en fait valable sur $\mathbb{R}$ tout entier. La conséquence de cette restriction de l'énoncé est que la v.a.r. $\lfloor X \rfloor$ n'est bien définie que si X est à valeurs positives. Or l'énoncé ne donne aucune information sur $X(\Omega)$. Par contre, on sait que X est une v.a.r. qui admet une densité nulle sur $]-\infty, 0[$. On peut donc démontrer :

$$\mathbb{P}\big(\,[X \geqslant 0]\,\big) = 1$$

  Ainsi, la v.a.r. $\lfloor X \rfloor$ est **presque sûrement** bien définie.
  C'est ce point de vue probabiliste qui est ici adopté par le concepteur.
- Profitons-en pour faire un point sur la notation $X(\Omega)$.
  Rappelons qu'une v.a.r. X est une application $X : \Omega \to \mathbb{R}$.
  Comme la notation le suggère, $X(\Omega)$ est l'image de Ω par l'application X.
  Ainsi, $X(\Omega)$ n'est rien d'autre que l'ensemble des valeurs prises par la v.a.r. X :

$$\begin{aligned} X(\Omega) &= \{X(\omega) \mid \omega \in \Omega\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid \exists \omega \in \Omega,\ X(\omega) = x\} \end{aligned}$$

  Il faut bien noter que dans cette définition aucune application probabilité $\mathbb{P}$ n'apparaît.
- Il est toujours correct d'écrire : $X(\Omega) \subseteq\ ]-\infty, +\infty[$.
  En effet, cette propriété signifie que toute v.a.r. X est à valeurs dans $\mathbb{R}$, ce qui est toujours le cas par définition de la notion de variable aléatoire réelle.
- Dans le cas des v.a.r. discrètes, il est d'usage relativement courant de confondre :
  - × l'ensemble des valeurs possibles de la v.a.r. X (*i.e.* l'ensemble $X(\Omega)$),
  - × l'ensemble $\{x \in \mathbb{R} \mid \mathbb{P}\big(\,[X = x]\,\big) \neq 0\}$, ensemble des valeurs que X prend avec probabilité non nulle. Dans le cas qui nous intéresse ici, à savoir X est une v.a.r. discrète, cet ensemble est appelé support de X et est noté $\text{Supp}(X)$.
- Dans le cas des v.a.r. à densité, la détermination de l'ensemble image est plus technique. Dans certains sujets, l'ensemble image des v.a.r. étudiées sera précisé (« On considère une v.a.r. à valeurs strictement positives »). Si ce n'est pas le cas :
  - × si X suit une loi usuelle, on peut se référer à l'ensemble image donné en cours. Par exemple, si $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1])$, on se permet d'écrire :

    « Comme $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1])$, on **considère** : $X(\Omega) = [0, 1]$. »

  - × si X ne suit pas une loi usuelle, on étudie l'ensemble : $I = \{x \in \mathbb{R} \mid f_X(x) > 0\}$.
    On se permet alors d'écrire :

    « Dans la suite, on **considère** : $X(\Omega) = I$. »

  En **décrétant** la valeur de $X(\Omega)$, on ne commet pas une erreur mais on décide d'ajouter une hypothèse qui ne fait pas partie de l'énoncé. Cette audace permet de travailler avec un ensemble image connu, ce qui permet de structurer certaines démonstrations (l'ensemble image étant connu, on se rappelle que la fonction de répartition, par exemple, s'obtient par une disjonction de cas).

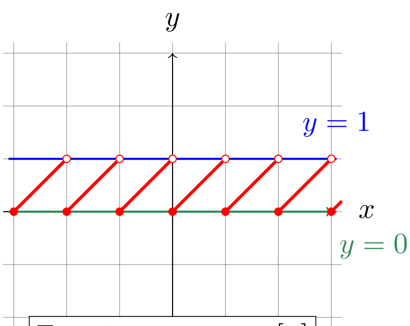
2. Que vaut $F_Y(y)$ lorsque $y < 0$? Que vaut $F_Y(y)$ lorsque $y \geqslant 1$?
On justifiera les réponses.

Démonstration.

- On note $h : x \mapsto x - [x]$ de telle sorte que $Z = h(X)$.
Comme : $X(\Omega) \subseteq \,]-\infty, +\infty[$, on obtient alors :
$$\begin{aligned} Y(\Omega) &= \big(h(X)\big)(\Omega) = h\big(X(\Omega)\big) \\ &\subseteq h\big(]-\infty,+\infty[\big) \subseteq [0,1[\end{aligned}$$
La dernière inclusion est obtenue de la manière suivante.
Soit $x \in [0, +\infty[$. Par définition de la partie entière : $[x] \leqslant x < [x] + 1$. Or :
$$[x] \leqslant x < [x]+1 \;\Leftrightarrow\; 0 \leqslant x - [x] < 1 \;\Leftrightarrow\; 0 \leqslant h(x) < 1$$
$$\boxed{\text{Ainsi : } Y(\Omega) \subset [0,1[.}$$
- Soit $y \in \mathbb{R}$. Deux cas simples se présentent :
  × si $y \in \,]-\infty, 0[$, alors : $[Y \leqslant y] = \varnothing$, car $Y(\Omega) \subset [0,1[$. Donc :
  $$F_Y(y) = \mathbb{P}([Y \leqslant y]) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$$
  × si $y \in [1, +\infty[$, alors : $[Y \leqslant y] = \Omega$, car $Y(\Omega) \subset [0,1[$. Donc :
  $$F_Y(y) = \mathbb{P}([Y \leqslant y]) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$$
  $$\boxed{\text{Pour tout } y < 0,\ F_Y(y) = 0 \text{ et pour tout } y \geqslant 1,\ F_Y(y) = 1.}$$

Commentaire

- Profitons de cette question pour faire un point sur la fonction **partie fractionnaire** $x \mapsto x - [x]$.
Sa représentation graphique est la suivante :



Fonction $x \mapsto x - [x]$

- La fonction partie fractionnaire est un cas particulier de fonctions dites **périodiques**.
  × Soit $T \in [0, +\infty[$. Une fonction est dite T-périodique si :
  $$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+T) = f(x)$$
  Le réel T est appelé **période de la fonction** f.
  × La représentation graphique sur $\mathbb{R}$ d'une fonction f T-périodique s'obtient par translation de sa représentation graphique sur un intervalle de longueur T (par exemple l'intervalle $[0, T[$).

  La fonction partie fractionnaire est une fonction 1-périodique. Sa représentation graphique sur $\mathbb{R}$ s'obtient bien par translation de sa représentation graphique sur un intervalle de longueur 1 (par exemple par translation de sa représentation graphique sur l'intervalle $[0, 1[$). □

3. Justifier l'égalité entre évènements : $[Y=0] = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} [X=n]$.

En déduire : $F_Y(0) = 0$.

Démonstration.

- Soit $\omega \in \Omega$. On a :

$$\begin{array}{rcl} \omega \in [Y=0] & \Leftrightarrow & Y(\omega) = 0 \\ & \Leftrightarrow & X(\omega) - [X](\omega) = 0 \\ & \Leftrightarrow & X(\omega) = [X](\omega) \\ & \Leftrightarrow & X(\omega) \text{ est un entier positif} \\ & \Leftrightarrow & \text{Il existe } n \in \mathbb{N} \text{ tel que } X(\omega) = n \\ & \Leftrightarrow & \text{Il existe } n \in \mathbb{N} \text{ tel que } \omega \in [X=n] \\ & \Leftrightarrow & \omega \in \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} [X=n] \end{array}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } [Y=0] = \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} [X=n].}$$

Commentaire

- Par définition, un événement est un ensemble. Démontrer l'égalité de deux ensembles c'est démontrer que tout élément du premier ensemble est dans le second et inversement. Ou encore qu'un élément est dans le premier ensemble si et seulement si il est aussi dans le second (c'est la manière de procéder choisie ici).
- En terme d'événement, cela signifie que le premier événement est réalisé si et seulement si le second événement est réalisé. Plus précisément, il existe ω réalisant le premier événement si et seulement si ce même ω réalise le second événement.

- Par ailleurs :

$$\begin{array}{rcll} [Y \leqslant 0] & = & [Y<0] \cup [Y=0] & \\ & = & \varnothing \cup [Y=0] & \qquad \textit{(car } Y(\Omega) = [0,1[\textit{)} \\ & = & [Y=0] & \end{array}$$

On en déduit :

$$\begin{array}{rcll} F_Y(0) & = & \mathbb{P}\big([Y=0]\big) & \\ & = & \mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} [X=n]\right) & \textit{(d'après le début de question)} \\ & = & \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big([X=n]\big) & \textit{(par } \sigma\textit{-additivité et car les événements de la famille } \big([X=n]\big)_{n\in\mathbb{N}} \textit{ sont deux à deux incompatibles)} \\ & = & \sum\limits_{n=0}^{+\infty} 0 \ = \ 0 & \textit{(car } X \textit{ est une v.a.r. à densité)} \end{array}$$

$$\boxed{\text{On en conclut : } F_Y(0) = 0.}$$

□

4. Soit y un réel de l'intervalle $]0,1[$.

a) Montrer l'égalité : $F_Y(y) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \displaystyle\int_n^{n+y} f(t)\ dt$.

Démonstration.

- On note $T = [X]$. Dans la suite, on **considère** $X(\Omega) = [0, +\infty[$.

$$\boxed{\text{On a alors : } T(\Omega) = \mathbb{N}.}$$

- La famille $\big([T = n]\big)_{n\in\mathbb{N}}$ forme un système complet d'événements.
  Ainsi, par la formule des probabilités totales :

$$\begin{array}{rcll}
F_Y(y) & = & \mathbb{P}\big([Y \leqslant y]\big) & \\
& = & \mathbb{P}\big([X - T \leqslant y]\big) & \textit{(par définition de } Y\textit{)} \\
& = & \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big([T = n] \cap [X - T \leqslant y]\big) & \\
& = & \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big([T = n] \cap [X - n \leqslant y]\big) & \\
& = & \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big([[X] = n] \cap [X \leqslant n + y]\big) & \\
& = & \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big([n \leqslant X < n+1] \cap [X \leqslant n + y]\big) & \textit{(par définition de la partie entière)} \\
& = & \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big([n \leqslant X \leqslant n + y]\big) & \textit{(car } y \in \,]0,1[\textit{)} \\
& = & \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \displaystyle\int_n^{n+y} f(t)\ dt & \textit{(car } X \textit{ admet } f \textit{ pour densité)}
\end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } y \in \,]0,1[\; : F_Y(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_n^{n+y} f(t)\ dt.}$$

Commentaire

On a utilisé dans cette question l'égalité : $[n \leqslant X < n+1] \cap [X \leqslant n+y] \ = \ [n \leqslant X \leqslant n+y]$.
Pour l'obtenir, il suffit de démontrer :

$$[X < n+1] \cap [X \leqslant n+y] \ = \ [X \leqslant n+y]$$

Comme signalé dans la remarque précédente, ce résultat se démontre par double inclusion.

($\subseteq$) Soit $\omega \in [X < n+1] \cap [X \leqslant n+y]$. Alors, en particulier, $\omega \in [X \leqslant n+y]$.

($\supseteq$) Soit $\omega \in [X \leqslant n+y]$. Alors $X(\omega) \leqslant n+y$. Ainsi :

$$X(\omega) \leqslant n+y < n+1 \qquad \textit{(car } y < 1\textit{)}$$

On en conclut : $\omega \in [X \leqslant n+1]$.
On obtient ainsi, à l'aide de l'hypothèse initiale : $\omega \in [X \leqslant n+y] \cap [X \leqslant n+1]$.

□

b) Montrer, en utilisant la question préliminaire, les inégalités :

– Pour tout n entier naturel : $\displaystyle\int_n^{n+y} f(t)\ dt \ \geqslant\ y \int_n^{n+1} f(t)\ dt.$

– Pour tout n entier naturel non nul : $\displaystyle\int_n^{n+y} f(t)\ dt \ \leqslant\ y \int_{n-1+y}^{n+y} f(t)\ dt.$

Démonstration.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. On applique la question ***1.b)*** avec :
  - × $I = [0, +\infty[$.
  - × $g = f_{|[0,+\infty[}$ (restriction de f à $[0, +\infty[$).
    La fonction g est continue et décroissante sur $[0, +\infty[$.
  - × $c = n \in I$, $d = n + y \in I$ et $b = n + 1 \in I$ (on a bien $c < d < b$).

$$\frac{1}{b-c} \int_c^b g(t)\ dt \ \leqslant\ \frac{1}{d-c} \int_c^d g(t)\ dt$$

$$\frac{1}{b-c} \int_c^b g(t)\ dt = \frac{1}{1} \int_n^{n+1} f(t)\ dt \qquad \frac{1}{d-c} \int_c^d g(t)\ dt = \frac{1}{y} \int_n^{n+y} f(t)\ dt$$

(car $[n, n+y[\subseteq [0, +\infty[$ et $[n, n+1[\subseteq [0, +\infty)$

$$\boxed{\text{On a bien : } \int_n^{n+y} f(t)\ dt \ \geqslant\ y \int_n^{n+1} f(t)\ dt.}$$

- Sous les mêmes hypothèses, avec $a = n - 1 + y$ et $c = n$ et $d = n + y$ comme précédemment (on a bien $a < c < d$), on a, d'après la question ***1.b)*** :

$$\frac{1}{d-c} \int_c^d g(t)\ dt \ \leqslant\ \frac{1}{d-a} \int_a^d g(t)\ dt$$

$$\frac{1}{d-c} \int_c^d g(t)\ dt = \frac{1}{y} \int_n^{n+y} f(t)\ dt \qquad \frac{1}{d-a} \int_a^d g(t)\ dt = \frac{1}{1} \int_{n-1+y}^{n+y} f(t)\ dt$$

$$\boxed{\text{On a bien : } y \int_{n-1+y}^{n+y} f(t)\ dt \ \geqslant\ \int_n^{n+y} f(t)\ dt.}$$

Commentaire

À première vue, il est difficile de faire le lien entre le résultat exposé dans cette question et celui de la question ***1.b)***. Il peut d'ailleurs sembler ardu de trouver les valeurs de a, b, c et d pour lesquelles on doit appliquer le résultat. En réalité, on n'a guère le choix :

- × dans la première inégalité à démontrer ici, les bornes basses des intégrales ont la même valeur n. Cela correspond à la première inégalité de ***1.b)*** où l'on retrouve la même borne basse c des deux côtés de l'inégalité. Une fois $c = n$ posé, les valeurs $b = n + 1$ et $d = n + y$ suivent logiquement.
- × dans la deuxième inégalité à démontrer, les bornes hautes des intégrales ont même valeur $n + y$. Cela correspond à la deuxième inégalité de ***1.b)*** où l'on retrouve la même borne haute d des deux côtés.

Finalement, cette question ne présente pas de difficulté majeure. D'ailleurs, l'énoncé fournit la manière de procéder en précisant qu'il s'agit d'utiliser la question préliminaire. □

c) En déduire : $y \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\ dt \ \leqslant\ F_Y(y) \ \leqslant\ \int_0^{y} f(t)\ dt + y\int_y^{+\infty} f(t)\ dt$, puis l'encadrement :

$$y \leqslant F_Y(y) \leqslant y + M$$

Démonstration.

- D'après la question précédente, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \int_n^{n+y} f(t)\ dt \ \geqslant\ y \int_n^{n+1} f(t)\ dt$$

  Soit $m \in \mathbb{N}$. En sommant ces inégalités, on obtient :

$$\sum_{n=0}^{m} \int_n^{n+y} f(t)\ dt \ \geqslant\ \sum_{n=0}^{m} \left(y \int_n^{n+1} f(t)\ dt \right) = y \sum_{n=0}^{m} \int_n^{n+1} f(t)\ dt = y \int_0^{m+1} f(t)\ dt \quad \text{(par relation de Chasles)}$$

  Or :

  × d'après la question ***4.a)***, la quantité $\displaystyle\sum_{n=0}^{m} \int_n^{n+y} f(t)\ dt$ admet une limite finie lorsque m tend vers $+\infty$.

  × l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\ dt$ est convergente car f est une densité de probabilité. On en déduit que la quantité de droite admet elle aussi une limite finie lorsque m tend vers $+\infty$.

  Finalement, par passage à la limite dans l'inégalité, on obtient :

$$F_Y(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_n^{n+y} f(t)\ dt \ \geqslant\ y \int_0^{+\infty} f(t)\ dt$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } y \int_0^{+\infty} f(t)\ dt \ \leqslant\ F_Y(y).}$$

- D'après la question précédente, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \int_n^{n+y} f(t)\ dt \ \leqslant\ y \int_{n-1+y}^{n+y} f(t)\ dt$$

  Soit $m \in \mathbb{N}^*$. En sommant ces inégalités, on obtient :

$$\sum_{n=0}^{m} \int_n^{n+y} f(t)\ dt - \int_0^{y} f(t)\ dt = \sum_{n=1}^{m} \int_n^{n+y} f(t)\ dt \ \leqslant\ \sum_{n=1}^{m} \left(y \int_{n-1+y}^{n+y} f(t)\ dt \right) = y \sum_{n=1}^{m} \int_{n-1+y}^{n+y} f(t)\ dt = y \int_y^{m+y} f(t)\ dt$$

Finalement, par passage à la limite dans l'inégalité (autorisé pour les raisons précédentes), on obtient :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_n^{n+y} f(t)\ dt - \int_0^y f(t)\ dt \ \leqslant\ y \int_y^{+\infty} f(t)\ dt$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } F_Y(y) \ \leqslant\ \int_0^y f(t)\ dt + y \int_y^{+\infty} f(t)\ dt.}$$

- Par ailleurs :
  × $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt = 1$ car f est une densité de probabilité.
  × $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt = \int_0^{+\infty} f(t)\ dt$ car f est nulle en dehors de $[0, +\infty[$.

$$\boxed{\int_0^{+\infty} f(t)\ dt = 1}$$

On a de plus, comme $y > 0$ alors $[X \geqslant y] \subseteq [X \geqslant 0]$ et :

$$\int_y^{+\infty} f(t)\ dt \ =\ \mathbb{P}\big([X \geqslant y]\big) \ \leqslant\ \mathbb{P}\big([X \geqslant 0]\big) \ =\ \int_0^{+\infty} f(t)\ dt \ =\ 1$$

$$\boxed{\text{Par multiplication par } y > 0\text{, on obtient : } y \int_y^{+\infty} f(t)\ dt \ \leqslant\ y.}$$

Enfin, comme f est décroissante :

$$\forall t \in [0, y],\ f(t) \ \leqslant\ f(0) \ =\ M$$

Par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant ($0 \leqslant y$), on a :

$$\int_0^y f(t)\ dt \ \leqslant\ \int_0^y M\ dt \ =\ M\ y$$

$$\boxed{\text{Comme } y < 1 \text{ et } M = f(0) \geqslant 0,\ \int_0^y f(t)\ dt \ \leqslant\ M\ y \ \leqslant\ M.}$$

$$\boxed{\text{En combinant tous ces résultats, on obtient bien : } y \leqslant F_Y(y) \leqslant y + M.}$$ □

Partie II - Premier chiffre significatif d'une variable de Pareto

Pour tout réel λ strictement positif, on définit la fonction g_λ sur $\mathbb{R}$ par $g_\lambda : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{\lambda}{x^{\lambda+1}} & \text{si } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

5. Montrer que pour tout réel λ strictement positif, g_λ est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$ (loi dite *de Pareto*).

Démonstration.
Soit $\lambda > 0$.

- Tout d'abord, la fonction g_λ est :
  - × continue sur $]-\infty, 1[$ car constante sur cet intervalle.
  - × continue sur $]1, +\infty[$ comme inverse de la fonction $x \mapsto x^{\lambda+1}$:
    - – continue sur $]1, +\infty[$,
    - – et qui ne s'annule pas sur $]1, +\infty[$.

  $\boxed{\text{La fonction } f \text{ est donc continue sur } \mathbb{R} \text{ sauf éventuellement en un nombre fini de points.}}$

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent :
  - × si $x \in]-\infty, 1[$, alors : $g_\lambda(x) = 0 \geqslant 0$.
  - × si $x \in [1, +\infty[$, alors comme $\lambda > 0$ et $x > 0$, on a : $g_\lambda(x) = \dfrac{\lambda}{x^{\lambda+1}} \geqslant 0$.

  $\boxed{\text{Finalement : } \forall x \in \mathbb{R},\ g_\lambda(x) \geqslant 0.}$

- Il reste à démontrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g_\lambda(x)\, dx$ converge et vaut 1.

  Tout d'abord :
  $$\int_{-\infty}^{+\infty} g_\lambda(x)\, dx = \int_{1}^{+\infty} g_\lambda(x)\, dx$$
  car g_λ est nulle en dehors de $[1, +\infty[$.

  La fonction g_λ est continue par morceaux sur $[1, +\infty[$.
  Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} g_\lambda(x)\, dx$ est impropre seulement en $+\infty$.

  Soit $B \in [1, +\infty[$.
  $$\begin{aligned}
  \int_1^B g_\lambda(t)\, dt &= \int_1^B \lambda \frac{1}{t^{\lambda+1}}\, dt = \lambda \int_1^B t^{-\lambda-1}\, dt \\
  &= \cancel{\lambda} \left[\frac{x^{-\lambda}}{-\cancel{\lambda}} \right]_1^B = -1 \left[\frac{1}{x^\lambda} \right]_1^B & \textit{(car } \lambda \neq 0\textit{)} \\
  &= -\left(\frac{1}{B^\lambda} - \frac{1}{1} \right) \\
  &= 1 - \frac{1}{B^\lambda} \underset{B \to +\infty}{\longrightarrow} 1 & \textit{(car } \lambda > 0\textit{)}
  \end{aligned}$$

  $\boxed{\text{Ainsi, l'intégrale impropre } \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g_\lambda(t)\, dt \text{ est convergente et vaut 1.}}$

$$\boxed{\text{On en conclut que } g_\lambda \text{ est bien une densité de probabilité.}}$$

Commentaire

- De manière générale, on dit d'une v.a.r. suit la loi de Pareto de paramètres $a > 0$ et $b > 0$ si elle admet pour densité la fonction f définie par :

$$f \ : \ t \ \mapsto \ \begin{cases} 0 & \text{si } t < b \\ a \ \dfrac{b^a}{t^{a+1}} & \text{si } t \geqslant b \end{cases}$$

  Dans cet énoncé, on étudie donc le cas particulier où $b = 1$.
- Pour démontrer qu'une fonciton est une densité de probabilité, il est nécessaire de démontrer qu'une intégrale impropre est convergente et de valeur 1. Ce type de question exige donc un calcul et non un résultat de convergence comme le théorème de comparaison des intégrales généralisées de fonctions continues positives.
- On peut toutefois noter que démontrer la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{\lambda+1}} \ dt$ est simple. On reconnaît en effet une intégrale de Riemann, impropre en $+\infty$ et d'exposant $\lambda + 1 > 1$. □

Dans toute la suite, on note Z_λ une variable aléatoire admettant g_λ pour densité.

6. Déterminer la fonction de répartition G_λ de Z_λ.

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent :

× si $x \in \,]-\infty, 1[$. Comme f est nulle en dehors de $[1, +\infty[$:

$$G_\lambda(x) \ = \ \mathbb{P}\big(\,[Y_\lambda \leqslant x]\,\big) \ = \ \int_{-\infty}^{x} g_\lambda(t) \ dt \ = \ 0$$

× si $x \in [1, +\infty[$:

$$\begin{aligned} G_\lambda(x) &= \int_{-\infty}^{x} g_\lambda(t) \ dt \\ &= \cancel{\int_{-\infty}^{1} g_\lambda(t) \ dt} + \int_{1}^{x} g_\lambda(t) \ dt && \textit{(par relation de Chasles et car } f \textit{ est nulle en dehors de } [1,+\infty[\textit{)} \\ &= 1 - \frac{1}{x^\lambda} && \textit{(en reprenant le calcul de la question précédente pour } B = x \in [1,+\infty[\textit{)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } G_\lambda : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 - \left(\dfrac{1}{x}\right)^{\lambda} & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}}$$

□

7. On note ln la fonction *logarithme népérien*, et log la fonction *logarithme décimal*.

Cette fonction est définie sur $]0, +\infty[$ par : $\log(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(10)}$ pour tout réel x strictement positif.

On pose $X_\lambda = \log(Z_\lambda)$, et on note F_λ la fonction de répartition de X_λ.

a) Établir, pour tout réel x, l'égalité : $F_\lambda(x) = G_\lambda\big(10^x\big)$.

Démonstration.

- Commençons par déterminer $X_\lambda(\Omega)$.
  Notons $h : x \mapsto \log(x)$, de sorte que $X_\lambda = h(Z_\lambda)$.
  On **considère** $Z_\lambda(\Omega) = [1, +\infty[$. On en déduit :

$$\begin{array}{rcll} X_\lambda(\Omega) & = & \big(h(Z_\lambda)\big)(\Omega) \ = \ h\big(Z_\lambda(\Omega)\big) & \\ & = & h\big([1, +\infty[\big) & \\ & = & [h(1), \lim\limits_{x \to +\infty} h(x)[& \textit{(car la fonction } h \textit{ est continue et strictement croissante sur } [1, +\infty[\textit{)} \\ & = & [0, +\infty[& \end{array}$$

$$\boxed{\text{Et ainsi : } X_\lambda(\Omega) = [0, +\infty[.}$$

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent :
  × si $x < 0$, alors $[X_\lambda \leqslant x] = \varnothing$ car $X_\lambda(\Omega) = [0, +\infty[$. Donc :

$$F_\lambda(x) = \mathbb{P}\big(\, [X_\lambda \leqslant x] \,\big) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$$

  En particulier, comme $x < 0$ alors $10^x < 1$ et $G_\lambda(10^x) = 0$.

$$\boxed{\text{On a bien : } \forall x < 0,\ F_\lambda(x) = 0 = G_\lambda(10^x).}$$

  × si $x \geqslant 0$ alors :

$$\begin{array}{rcll} F_\lambda(x) & = & \mathbb{P}\big(\, [Z_\lambda \leqslant x] \,\big) & \\ & = & \mathbb{P}\big(\, [\log(Z_\lambda) \leqslant x] \,\big) & \\ & = & \mathbb{P}\left(\left[\dfrac{\ln(Z_\lambda)}{\ln(10)} \leqslant x\right]\right) & \textit{(par définition de } \log\textit{)} \\ & = & \mathbb{P}\big(\, [\ln(Z_\lambda) \leqslant x \ \ln(10)] \,\big) & \textit{(car } \ln(10) > 0\textit{)} \\ & = & \mathbb{P}\big(\, \big[Z_\lambda \leqslant \exp\big(x \ \ln(10)\big)\big] \,\big) & \textit{(par stricte croissance de } \exp \textit{ sur } \mathbb{R}\textit{)} \\ & = & G_\lambda(10^x) & \textit{(car } e^{x \ \ln(10)} = e^{\ln(10^x)} = 10^x\textit{)} \end{array}$$

$$\boxed{\text{On obtient finalement : } F_\lambda : x \mapsto \left\{ \begin{array}{cl} 0 & \text{si } x < 0 \\ G_\lambda(10^x) & \text{si } x \geqslant 0 \end{array} \right. .}$$

Commentaire

- On s'est permis de considérer : $Z_\lambda(\Omega) = [1, +\infty[$ conformément à la remarque faite en début de **Partie I**. Une telle hypothèse assure la bonne définition de la v.a.r. $X_\lambda = \log(Z_\lambda)$ (sans précision sur $Z_\lambda(\Omega)$, la v.a.r. Z_λ est seulement presque sûrement bien définie).
- Lors de l'étude du 2$^{\text{ème}}$ cas, l'argument $x \geqslant 0$ n'est pas utile. L'esprit du sujet était d'ailleurs plutôt de démontrer, dans cette question : $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_\lambda(x) = G_\lambda(10^x)$ et de reporter la disjonction de cas dans la question suivante. Dans cette correction, on a opté pour la présentation habituelle qui permet de mettre en avant le fait que la fonction F_λ est définie par cas.

□

b) En déduire que X_λ suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre en fonction de λ.

Démonstration.
Soit $x \in [0, +\infty[$.

- On a :

$$\begin{array}{rcll} F_\lambda(x) & = & G_\lambda(10^x) & \textit{(d'après la question précédente)} \\ & = & 1 - \dfrac{1}{(10^x)^\lambda} & \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{6.}}\textit{)} \\ & = & 1 - \dfrac{1}{10^{\lambda x}} & \\ & = & 1 - \dfrac{1}{\exp\big(\lambda x \ \ln(10)\big)} & \\ & = & 1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}^{\ln(10)\,\lambda\, x}} \ = \ 1 - \mathrm{e}^{-\ln(10)\,\lambda\, x} & \end{array}$$

- Ainsi :

$$F_\lambda : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-\ln(10)\,\lambda\, x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

On reconnaît la fonction de répartition associée à la loi $\mathcal{E}\left(\ln(10)\,\lambda\right)$.

$$\boxed{\text{On en conclut : } X_\lambda \hookrightarrow \mathcal{E}\left(\ln(10)\,\lambda\right).}$$

Commentaire

- Généralement, lorsque l'on considère une v.a.r. Z qui suit une loi de Pareto de paramètre $a > 0$ et $b > 0$ (la définition est donnée dans la remarque de la quesiton ***5.***), on introduit la v.a.r. $X = \ln\left(\dfrac{Z}{b}\right)$. On démontre alors que X suit une loi exponentielle.
Plus précisément, on a : $X \hookrightarrow \mathcal{E}\left(a\right)$.
- Dans ce sujet, on étudie la loi de Pareto avec paramètre $b = 1$. En lieu et place de Z_λ, on aurait pu introduire $T_\lambda = \ln\left(\dfrac{Z_\lambda}{1}\right) = \ln(Z_\lambda)$. D'après ce qui précède : $T_\lambda \hookrightarrow \mathcal{E}\left(\lambda\right)$. Le choix de l'énoncé de travailler avec le logarithme en base 10 au lieu du logarithme népérien peut donc paraître surprenant. Il introduit une difficulté qui ne paraît pas nécessaire (avec la présence artificielle de $\ln(10)$). Ce choix est en réalité expliqué par la question ***9.*** : le travail à l'aide du logarithme décimal est classique lors de l'étude de la loi de Benford. $\square$

8. On pose $Y_\lambda = \{X_\lambda\}$, la partie fractionnaire de X_λ.

Montrer, en utilisant les résultats de la partie I, que pour tout réel y de l'intervalle $]0,1[$:

$$\lim_{\lambda \to 0^+} \mathbb{P}\big([Y_\lambda \leqslant y] \big) = y$$

En déduire que, lorsque λ tend vers 0, Y_λ converge en loi vers une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur l'intervalle $[0,1]$.

Démonstration.

- D'après la question précédente : $X_\lambda \hookrightarrow \mathcal{E}\left(\ln(10)\,\lambda\right)$.
  On en déduit que la fonction f_λ ci-dessous est **une** densité de la v.a.r. X_λ.

$$f_\lambda : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \ln(10)\,\lambda\ \mathrm{e}^{-\ln(10)\,\lambda\, x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

- La fonction f_λ vérifie les propriétés :
  – f est nulle sur $]-\infty, 0[$;
  – la restriction de f à $[0, +\infty[$ est continue et décroissante.

  On pose alors $M = f_\lambda(0) = \ln(10)\,\lambda$, le maximum de f_λ sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\text{La v.a.r. } X_\lambda \text{ vérifie donc les propriétés permettant d'appliquer les résultats de la } \textbf{Partie I}.}$$

- D'après la **Partie I**, la v.a.r. Y_λ admet pour fonction de répartition la fonction F_{Y_λ} suivante :

$$F_{Y_\lambda} : y \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ F_{Y_\lambda}(y) & \text{si } y \in [0,1[\\ 1 & \text{si } y \geqslant 1 \end{cases}$$

  Enfin, d'après la question ***4.c)*** : $\forall y \in\,]0,1[,\ y \ \leqslant\ F_{Y_\lambda}(y) \ \leqslant\ y + \ln(10)\,\lambda$.

- Soit $y \in\,]0,1[$ et soit $\lambda > 0$. On a :
  × $\lim\limits_{\lambda \to 0^+} y = y$,
  × $\lim\limits_{\lambda \to 0^+} y + \ln(10)\,\lambda = y$,

$$\boxed{\text{Par théorème d'encadrement, on a : } \lim_{\lambda \to 0^+} F_{Y_\lambda}(y) = y.}$$

- Soit $y \in \mathbb{R}$. Quatre cas se présentent :
  × si $y < 0$ alors $F_{Y_\lambda}(y) = 0 \underset{\lambda \to 0^+}{\longrightarrow} 0$.
  × si $y = 0$ alors $F_{Y_\lambda}(0) = 0$.
  En effet, comme F_{Y_λ} est la fonction de répartition d'une v.a.r. à densité, alors F_{Y_λ} est continue sur $\mathbb{R}$. Par continuité en 0, on obtient :

$$F_{Y_\lambda}(0) = \lim_{y \to 0^-} F_{Y_\lambda}(y) = \lim_{y \to 0^-} 0 = 0$$

$$\boxed{F_{Y_\lambda}(0) = 0}$$

  On en déduit alors : $F_{Y_\lambda}(0) = 0 \underset{\lambda \to 0^+}{\longrightarrow} 0$.

× si $y \in \,]0,1[$ alors $F_{Y_\lambda}(y) \underset{\lambda \to 0^+}{\longrightarrow} y$ d'après ce qui précède.

× si $y \geqslant 1$ alors $F_{Y_\lambda}(y) = 1 \underset{\lambda \to 0^+}{\longrightarrow} 1$.

Finalement : $\forall y \in \mathbb{R}$, $F_{Y_\lambda}(y) \underset{\lambda \to 0^+}{\longrightarrow} F(y)$ où F est la fonction :

$$F : y \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ y & \text{si } y \in [0,1[\\ 1 & \text{si } y \geqslant 1 \end{cases}$$

On reconnaît la fonction de répartition associé à la loi uniforme sur $[0,1]$.

On a donc bien démontré que lorsque λ tend vers 0, Y_λ converge en loi vers Y avec $Y \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$.

Commentaire

- On demande dans cette question de démontrer que « lorsque λ tend vers 0, Y_λ converge en loi vers un v.a.r. suivant la loi uniforme sur $[0,1]$ ». Or, conformément au programme officiel, on définit la convergence en loi d'une **suite** de v.a.r. $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vers une v.a.r. Y.
  La question, telle que posée ici, n'entre donc pas dans le cadre du programme.
- Il est cependant assez simple d'adapter cette question au programme. Pour ce faire, il suffit de considérer la suite de v.a.r. $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ où pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $V_n = Y_{\frac{1}{n}}$ (on « pose » $\lambda = \frac{1}{n}$).
  On obtient ainsi : $V_n \underset{n\to+\infty}{\overset{\mathscr{L}}{\longrightarrow}} V$ où $V \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$.

□

9. Pour tout réel x supérieur ou égal à 1, on note $\alpha(x)$ le premier chiffre dans l'écriture décimale de x. C'est un entier de l'intervalle $[\![1,9]\!]$.

Par exemple, $\alpha(50) = 5$ et $\alpha(213,43) = 2$.

a) Pour tout $k \in [\![1,9]\!]$, montrer l'équivalence :

$$\alpha(x) = k \;\Leftrightarrow\; \big\{\log(x)\big\} \in \big[\log(k), \log(k+1)\big[$$

Démonstration.
Soit $x \geqslant 1$ et soit $k \in [\![1,9]\!]$.

- On procède tout d'abord par équivalence.

$$\begin{array}{ll} & \big\{\log(x)\big\} \in \big[\log(k), \log(k+1)\big[\\ \Leftrightarrow & \log(k) \leqslant \big\{\log(x)\big\} < \log(k+1) \\ \Leftrightarrow & \dfrac{\ln(k)}{\ln(10)} \leqslant \big\{\log(x)\big\} < \dfrac{\ln(k+1)}{\ln(10)} \\ \Leftrightarrow & \ln(k) \leqslant \big\{\log(x)\big\} \times \ln(10) < \ln(k+1) \qquad \textit{(car } \ln(10) > 0\textit{)} \\ \Leftrightarrow & k \leqslant \exp\big(\big\{\log(x)\big\} \times \ln(10)\big) < k+1 \qquad \textit{(car la fonction } \exp \textit{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}\textit{)} \\ \Leftrightarrow & k \leqslant \exp\big(\ln\big(10^{\{\log(x)\}}\big)\big) < k+1 \\ \Leftrightarrow & k \leqslant 10^{\{\log(x)\}} < k+1 \\ \Leftrightarrow & \big\lfloor 10^{\{\log(x)\}} \big\rfloor = k \qquad \textit{(par définition de la partie entière)} \end{array}$$

$$\boxed{\forall x \geqslant 1, \forall k \in [\![1,9]\!],\; \big\{\log(x)\big\} \in \big[\log(k), \log(k+1)\big[\;\Leftrightarrow\; \big\lfloor 10^{\{\log(x)\}} \big\rfloor = k}$$

Commentaire

- Il est à noter que l'on part de la propriété de l'équivalence qui a la formulation la plus complexe. C'est une manière classique de procéder : on part du plus complexe pour aller vers le plus simple. En partant dans ce sens, cette première partie de la démonstration ne présente pas de difficulté majeure. Il s'agit simplement de remplacer la fonction log par sa définition et de faire en sorte de simplifier les inégalités.
- L'énoncé ne détaille par les propriétés de la fonction log, qui n'est autre que la fonction logarithme en base 10. Cette fonction vérifie des propriétés similaires à la fonction logarithme népérien (qui n'est autre que le logarithme en base e). On a notamment :
  - × la fonction log (logarithme en base 10) est strictement croissante et continue sur $]0,+\infty[$. Elle réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur $]-\infty,+\infty[$.
    Sa bijection réciproque est la fonction $x \mapsto 10^x$. En particulier :
    $$y = 10^x \ \Leftrightarrow \ x = \log(y)$$
    $$\forall y \in \,]0,+\infty[, \ 10^{\log(x)} = x \qquad \text{et} \qquad \forall y \in \,]-\infty,+\infty[, \ \log(10^y) = y$$
  - × pour tout $(x, y) \in \,]0,+\infty[\times]0,+\infty[$, on a :
    $$\log\big(x \times y\big) \ = \ \log(x) + \log(y) \qquad \text{et} \qquad \log\left(\frac{x}{y}\right) \ = \ \log(x) - \log(y)$$

- Il reste alors à démontrer : $\big[10^{\{\log(x)\}}\big] = \alpha(x)$.
  - × Tout d'abord, par définition : $\forall y \in \mathbb{R}$, $\{y\} = y - [y]$.
    Pour $y = \log(x)$, on obtient : $\big\{\log(x)\big\} = \log(x) - \big[\log(x)\big]$. Ainsi :
    $$\begin{aligned} 10^{\{\log(x)\}} &= 10^{\log(x) - \left[\log(x)\right]} \\ &= \frac{10^{\log(x)}}{10^{[\log(x)]}} \\ &= \frac{x}{10^{[\log(x)]}} \end{aligned}$$
    $$\boxed{10^{\{\log(x)\}} \ = \ \frac{x}{10^{[\log(x)]}}}$$
  - × Comme $x \geqslant 1$, il existe un unique entier $r \in \mathbb{N}$ tel que :
    $$10^r \ \leqslant \ x \ < \ 10^{r+1}$$
    (r renseigne sur l'ordre de grandeur de x : si $r = 0$, x est de l'ordre des unités ; si $r = 1$, x est de l'ordre des dizaines ; si $r = 2$, x est de l'ordre des centaines ...)
    Cet entier r s'exprime aisément en fonction de x. En effet :
    $$\begin{aligned} & 10^r \ \leqslant \ x \ < \ 10^{r+1} \\ \Leftrightarrow \ & r \ \leqslant \ \log(x) \ < \ r+1 \qquad \textit{(par stricte croissance de la fonction } \log \textit{ sur }]0,+\infty[) \\ \Leftrightarrow \ & [\log(x)] = r \end{aligned}$$

× Notons alors : $\beta(x) = x - \alpha(x) \times 10^r$.
($\alpha(x)$ est le premier chiffre significatif ; $\alpha(x) \times 10^r$ est l'ordre de grandeur ; $\beta(x)$ est le nombre qui commence à partir du deuxième chiffre significatif de x)
On a :

$$\begin{array}{rrcl} & x & = & \alpha(x) \times 10^r + \beta(x) \\ \text{donc} & \dfrac{x}{10^r} & = & \alpha(x) + \dfrac{\beta(x)}{10^r} \end{array}$$

Par définition : $\beta(x) \in [0, 10^r[$ donc : $\dfrac{\beta(x)}{10^r} \in [0,1[$. On en déduit :

$$\alpha(x) \leqslant \underset{\dfrac{x}{10^r}}{\underset{\shortparallel}{\alpha(x) + \dfrac{\beta(x)}{10^r}}} \leqslant \alpha(x) + 1$$

$$\boxed{\text{On en conclut : } \alpha(x) = \left[\dfrac{x}{10^r}\right] = \left[\dfrac{x}{10^{[\log(x)]}}\right].}$$

En combinant tous les résultats précédents, on obtient, pour tout $x \geqslant 1$ et tout $k \in [\![1,9]\!]$:

$$\begin{array}{rcl} \big\{\log(x)\big\} \in \big[\log(k), \log(k+1)\big[& \Leftrightarrow & \big[10^{\{\log(x)\}}\big] = k \\ & \Leftrightarrow & \left[\dfrac{x}{10^{[\log(x)]}}\right] = k \\ & \Leftrightarrow & \alpha(x) = k \end{array}$$

Commentaire

La démonstration $\alpha(x) = \big[10^{\{\log(x)\}}\big]$ n'est pas réellement envisageable pour des élèves ayant suivi une formation ECE. Elle nécessite un bagage arithmétique qui n'est pas celui des élèves ayant suivi une Terminale ES. Il est vivement conseillé de laisser de côté cette partie de la question. C'est l'une des dernières questions du sujet. On peut donc penser que le concepteur a pour but ici d'offrir un challenge aux meilleurs candidats. Il est fort probable que le barème d'une telle question soit peu précis et qu'on laisse le correcteur féliciter toute tentative raisonnable de démonstration.

□

b) On note $C_\lambda = \alpha\big(Z_\lambda\big)$ la variable aléatoire prenant comme valeur le premier chiffre de Z_λ.
Montrer, pour tout $k \in [\![1,9]\!]$: $\displaystyle\lim_{\lambda \to 0^+} \mathbb{P}\big([C_\lambda = k]\big) = \log\left(1 + \frac{1}{k}\right)$.
Cette loi limite obtenue pour le premier chiffre de Z_λ est appelée *loi de Benford.*

Démonstration.
Soit $\lambda > 0$.

- On rappelle : $Z_\lambda(\Omega) = [1, +\infty[$. On en déduit :

$$\begin{array}{rcl} C_\lambda(\Omega) & = & \big(\alpha(Z_\lambda)\big)(\Omega) \;=\; \alpha\big(Z_\lambda(\Omega)\big) \\ & = & \alpha\big([1,+\infty[\big) \\ & = & [\![1,9]\!] \end{array}$$

$$\boxed{\text{Et ainsi : } C_\lambda(\Omega) = [\![1,9]\!].}$$

- Soit $k \in [\![1,9]\!]$.

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}\big([C_\lambda = k]\big) & = & \mathbb{P}\big([\ \alpha(Z_\lambda) = k\ ]\big) & \\ & = & \mathbb{P}\big(\big[\ \log(k) \ \leqslant\ \big\{\log(Z_\lambda)\big\}\ <\ \log(k+1)\ \big]\big) & \textit{(d'après la question précédente)} \\ & = & \mathbb{P}\big(\big[\ \log(k) \ \leqslant\ \big\{X_\lambda\big\}\ <\ \log(k+1)\ \big]\big) & \\ & = & \mathbb{P}\big([\ \log(k) \ \leqslant\ Y_\lambda\ <\ \log(k+1)\ ]\big) & \\ & \underset{\lambda \to 0^+}{\longrightarrow} & \mathbb{P}\big([\ \log(k) \ \leqslant\ Y\ <\ \log(k+1)\ ]\big) & \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{8.b)}} \textit{ avec } Y \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])\textit{)} \end{array}$$

Enfin :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}\big([\ \log(k) \ \leqslant\ Y\ <\ \log(k+1)\ ]\big) & = & F_Y\big(\log(k+1)\big) - F_Y\big(\log(k)\big) & \textit{(car } Y \textit{ est une v.a.r. à densité)} \\ & = & \log(k+1) - \log(k) & \textit{(car } \log(k+1) \in [0,1] \textit{ et } \log(k) \in [0,1]\textit{)} \\ & = & \log\left(\dfrac{k+1}{k}\right) \ = \ \log\left(1 + \dfrac{1}{k}\right) & \end{array}$$

$$\boxed{\text{Finalement, on a bien : } \forall k \in [\![1,9]\!] :\ \lim_{\lambda \to 0^+} \mathbb{P}\big([C_\lambda = k]\big) = \log\left(1 + \frac{1}{k}\right).}$$

□