HEC 2010

Exercice

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 3 à coefficients réels. On confond polynôme de E et fonction polynomiale associée définie sur $\mathbb{R}$.
Soit d l'application définie sur E qui à tout polynôme P, associe le polynôme $d(P) = P'$, où P' désigne la dérivée de P.

1. Rappeler sans démonstration la dimension de E et la base canonique $\mathcal{B}$ de E.

Démonstration.

$$\boxed{\begin{array}{c}\dim(E) = 4 \text{ et } \mathscr{B} = (P_0, P_1, P_2, P_3),\\ \text{où } P_0(X) = 1,\ P_1(X) = X,\ P_2(X) = X^2 \text{ et } P_3(X) = X^3.\end{array}}$$

□

2. Montrer que d est un endomorphisme de E et donner la matrice associée à d dans la base $\mathcal{B}$.

Démonstration.

- Montrons que d est linéaire.
  Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$. Soit $(P_1, P_2) \in E^2$.

$$\begin{array}{rcll} d(\lambda_1 \cdot P_1 + \lambda_2 \cdot P_2) & = & (\lambda_1 \cdot P_1 + \lambda_2 \cdot P_2)' & \\ & = & \lambda_1 \cdot P_1' + \lambda_2 \cdot P_2' & \textit{(par linéarité de la dérivation)} \\ & = & \lambda_1 \cdot d(P_1) + \lambda_2 \cdot d(P_2) & \end{array}$$

- Montrons que $d(E) \subset E$, *i.e.* : $\forall P \in E,\ d(P) \in E$.
  Soit $P \in E$. Alors :
  × $P \in \mathbb{R}[X]$, donc $d(P) = P' \in \mathbb{R}[X]$.
  × $\deg(P) \leqslant 3$. Donc $\deg(P') \leqslant 2$. D'où $\deg(d(P)) \leqslant 2 \leqslant 3$.
  D'où $d(P) \in E$.

$$\boxed{d \text{ est un endomorphisme.}}$$

$d(P_0) = P_0' = 0 = 0 \cdot P_0 + 0 \cdot P_1 + 0 \cdot P_2 + 0 \cdot P_3$

$d(P_1)(X) = P_1'(X) = 1 = 1 \cdot P_0 + 0 \cdot P_1 + 0 \cdot P_2 + 0 \cdot P_3$

$d(P_2)(X) = P_2'(X) = 2X = 0 \cdot P_0 + 2 \cdot P_1 + 0 \cdot P_2 + 0 \cdot P_3$

$d(P_3)(X) = P_3'(X) = 2X^2 = 0 \cdot P_0 + 0 \cdot P_1 + 3 \cdot P_2 + 0 \cdot P_3$

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(d) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

□

3. Déterminer le noyau de d, $\text{Ker}(d)$, l'image de d, $\text{Im}(d)$, ainsi que leurs dimensions respectives.

Démonstration.

- Soit $P \in E$. Alors il existe $(a_0, a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^4$ tel que $P(X) = a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0$.

$$\begin{array}{rcl} P \in \text{Ker}(d) & \Leftrightarrow & d(P) = 0 \\ & \Leftrightarrow & P'(X) = 0 \\ & \Leftrightarrow & 3a_3X^2 + 2a_2X^2 + a_1 = 0 \\ & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcl} a_3 & = & 0 \\ a_2 & = & 0 \\ a_1 & = & 0 \end{array} \right. \qquad \textit{(par identification)} \end{array}$$

On obtient donc :

$$\begin{array}{rcl} \text{Ker}(d) & = & \{P \in E \ / \ P' = 0\} \\ & = & \{a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0 \ / \ a_3 = 0, \ a_2 = 0 \text{ et } a_1 = 0\} \\ & = & \{a_0 \ / \ a_0 \in \mathbb{R}\} \\ & = & \{a_0 \cdot P_0 \ / \ a_0 \in \mathbb{R}\} \\ & = & \text{Vect}\,(P_0) \ = \ \mathbb{R}_0[X] \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ker}(d) = \mathbb{R}_0[X]}$$

Donc la famille (P_0) engendre $\text{Ker}(d)$.
Elle est de plus constituée d'un unique vecteur non nul. Elle est donc libre.
C'est donc une base de $\text{Ker}(d)$.

$$\boxed{\text{Donc } \dim(\text{Ker}(d)) = \text{Card}((P_0)) = 1}$$

- \- Déterminons d'abord la dimension de $\text{Im}(d)$.
  D'après le théorème du rang :

$$\underbrace{\dim(E)}_{=\,4} \ = \ \underbrace{\dim(\text{Ker}(d))}_{=\,1} \ + \ \text{rg}(d)$$

$$\boxed{\text{Donc } \dim(\text{Im}(d)) = \text{rg}(d) = 4 - 1 = 3.}$$

  \- D'après la caractérisation de l'image d'une application linéaire :

$$\begin{array}{rcl} \text{Im}(d) & = & \text{Vect}\,(d(P_0), d(P_1), d(P_2), d(P_3)) \\ & = & \text{Vect}\,(0_E, P_0, 2 \cdot P_1, 3 \cdot P_2) \\ & = & \text{Vect}\,(P_0, 1 \cdot P_1, 3 \cdot P_2) \\ & = & \text{Vect}\,(P_0, P_1, P_2) \end{array}$$

  \- Donc la famille (P_0, P_1, P_2) engendre $\text{Im}(d)$.
  De plus $\text{Card}((P_0, P_1, P_2)) = 3 = \dim(\text{Im}(d))$.
  Donc (P_0, P_1, P_2) est une base de $\text{Im}(d)$.

$$\boxed{\text{Im}(d) = \text{Vect}\,(P_0, P_1, P_2) = \mathbb{R}_2[X]}$$

□

On désigne par $(d^k)_{k\geqslant 0}$, la suite d'endomorphismes de E définie par : $d^0 = I$, où I représente l'endomorphisme identité et, pour tout k de $\mathbb{N}$, $d^{k+1} = d^k \circ d$.
Pour tout k de $\mathbb{N}$, $\text{Ker}(d^k)$ désigne le noyau de d^k.

4. a) Déterminer pour tout k de $[\![1,4]\!]$, le sous espace $\text{Ker}(d^k)$ ainsi que sa dimension.
Vérifier que pour tout k de $[\![1,4]\!]$, $d\left(\text{Ker}(d^k)\right) \subset \text{Ker}(d^k)$.

Démonstration.

- Le cas $k = 1$ a déjà été traité en question ***3.***

$$\boxed{\text{Ker}(d) = \mathbb{R}_0[X] \text{ et } \dim(\text{Ker}(d)) = 1.}$$

- Déterminons $\text{Ker}(d^2)$.
Soit $P \in E$ avec $P(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d$.

$$\begin{array}{rcl} P \in \text{Ker}(d^2) & \Leftrightarrow & d^2(P) = 0 \ = \ P''(X) = 0 \\ & \Leftrightarrow & 6aX + 2b = 0_E \ \Leftrightarrow \ \left\{ \begin{array}{rcl} 6a & = & 0 \\ 2b & = & 0 \end{array} \right. \ \Leftrightarrow \ \left\{ \begin{array}{rcl} a & = & 0 \\ b & = & 0 \end{array} \right. \end{array}$$

On obtient alors :

$$\begin{array}{rcl} \text{Ker}(d^2) & = & \{aX^3 + bX^2 + cX + d \ / \ a = 0 \text{ et } b = 0\} \\ & = & \{cX + d \ / \ (c,d) \in \mathbb{R}^2\} \\ & = & \{d \cdot P_0 + c \cdot P_1 \ / \ (c,d) \in \mathbb{R}^2\} \\ & = & \text{Vect}\left((P_0, P_1)\right) \ = \ \mathbb{R}_1[X] \end{array}$$

La famille (P_0, P_1) engendre donc $\text{Ker}(d^2)$.
Elle est de plus constitutée de 2 polynômes non proportionnels. Elle est donc libre.
C'est donc une base de $\text{Ker}(d^2)$. D'où $\dim(\text{Ker}(d^2)) = \text{Card}((P_0, P_1)) = 2$.

$$\boxed{\text{Ker}(d^2) = \mathbb{R}_1[X] \text{ et } \dim(\text{Ker}(d^2)) = 2}$$

- Déterminons $\text{Ker}(d^3)$.
On montre comme précédemment que $\text{Ker}(d^3) = \text{Vect}\left((P_0, P_1, P_2)\right) = \mathbb{R}_2[X]$.
La famille (P_0, P_1, P_2) engendre donc $\text{Ker}(d^3)$.
C'est de plus une sous-famille de la famille (P_0, P_1, P_2, P_3) qui est libre (car c'est une base de E). Elle est donc libre.
C'est donc une base de $\text{Ker}(d^3)$. D'où $\dim(\text{Ker}(d^3)) = \text{Card}((P_0, P_1, P_2)) = 1$.

$$\boxed{\text{Ker}(d^3) = \mathbb{R}_2[X] \text{ et } \dim(\text{Ker}(d^3)) = 3}$$

- Déterminons $\text{Ker}(d^4)$.
L'ensemble E est contitué des polynômes de degré au plus 3.
Donc, pour tout $P \in E$, $d^4(P)(X) = P^{(4)}(X) = 0_E$. Donc $\text{Ker}(d^4) = E$.

$$\boxed{\text{Ker}(d^4) = E \text{ et } \dim(\text{Ker}(d^4)) = \dim(E) = 4}$$

Commentaire

Pour être plus précis, on montre ici que $E \subset \text{Ker}(d^4)$.
L'autre inclusion étant évidente par définition de $\text{Ker}(d^4)$, on a bien : $\text{Ker}(d^4) = E$.

- Soit $k \in [\![1, 4]\!]$. Montrons que $d(\text{Ker}(d^k)) \subset \text{Ker}(d^k)$.
  Soit $Q \in d(\text{Ker}(d^k))$. Alors il existe $P \in \text{Ker}(d^k)$ tel que $Q = d(P)$.
  Donc, comme $P \in \text{Ker}(d^k)$ (*i.e.* $d^k(P) = 0_E$), on a :

$$d^k(Q) = d^k(d(P)) = d^k \circ d(P) = d \circ d^k(P) = d(0_E) = 0_E$$

  Donc $Q \in \text{Ker}(d^k)$.

$$\boxed{\forall k \in [\![1, 4]\!],\ d(\text{Ker}(d^k) \subset \text{Ker}(d^k)}$$

□

b) Soit P un polynôme de degré r, avec $r \in [\![0, 3]\!]$. Montrer que la famille $\left(d^k\left(P\right)\right)_{0 \leqslant k \leqslant r}$ est libre.

Démonstration.

- Montrons que, si $\deg(P) = 3$, alors $(d^0(P), d^1(P), d^2(P), d^3(P))$ est libre.
  Le polynôme P est de degré 3, donc il existe $(a_0, a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^4$ avec $a_3 \neq 0$ tels que $P(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3$.
  Soit $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^4$ tels que :

$$\lambda_0 \cdot d^0(P) + \lambda_1 \cdot d^1(P) + \lambda_2 \cdot d^2(P) + \lambda_3 \cdot d^3(P) = 0_E$$

  - Alors, en composant par l'application d^3, on obtient :

$$d^3(\lambda_0 \cdot d^0(P) + \lambda_1 \cdot d^1(P) + \lambda_2 \cdot d^2(P) + \lambda_3 \cdot d^3(P)) = d^3(0_E)$$

    Or d est une application linéaire, donc d^3 est aussi linéaire. On obtient donc :

$$\lambda_0 \cdot d^3(P) + \lambda_1 \cdot d^4(P) + \lambda_2 \cdot d^5(P) + \lambda_3 \cdot d^6(P) = 0_E$$

    Or, d'après la question ***4.a)***, $d^4 = 0_{\mathscr{L}(E)}$, donc $d^5 = 0_{\mathscr{L}(E)}$ et $d^6 = 0_{\mathscr{L}(E)}$. On a alors :

$$\lambda_0 \cdot d^3(P) = 0 \ \Leftrightarrow\ \lambda_0 \cdot P^{(3)}(X) = 0 \ \Leftrightarrow\ \lambda_0 \times (6a_3) = 0$$

    Or, comme $\deg(P) = 3$, on sait que $a_3 \neq 0$, donc $\lambda_0 = 0$.
  - L'équation initiale devient alors :

$$\lambda_1 \cdot d^1(P) + \lambda_2 \cdot d^2(P) + \lambda_3 \cdot d^3(P) = 0_E$$

    En composant par d^2 et en raisonnant comme précédemment, on obtient $\lambda_1 = 0$
  - L'équation initiale devient alors :

$$\lambda_2 \cdot d^2(P) + \lambda_3 \cdot d^3(P) = 0_E$$

    En composant par d et en raisonnant comme précédemment, on obtient $\lambda_2 = 0$
  - L'équation initiale devient alors :

$$\lambda_3 \cdot d^3(P) = 0_E \ \Leftrightarrow\ \lambda_0 \cdot P^{(3)}(X) = 0 \ \Leftrightarrow\ \lambda_0 \times (6a_3) = 0$$

    Donc on obtient $\lambda_3 = 0$

  Finalement $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.
  Donc la famille $(d^0(P), d^1(P), d^2(P), d^3(P))$ est libre.
- Si $\deg(P) \in [\![0, 2]\!]$, on montre de même dans chaque cas que $\left(d^k\left(P\right)\right)_{0 \leqslant k \leqslant r}$ est libre.

$$\boxed{\text{Finalement, si } \deg(P) = r \in [\![0, 3]\!], \text{ la famille } \left(d^k\left(P\right)\right)_{0 \leqslant k \leqslant r} \text{ est libre.}}$$

Commentaire

- On rappelle que $\deg(P) = 0$ **n'implique aucunement** que $P = 0$
  Au contraire : $\deg(P) = 0$ implique que le polynôme P est une constante **non nulle**.
  Le degré du polynôme nul est, par convention, $-\infty$.
- La famille $\left(d^k(P)\right)_{0 \leqslant k \leqslant r}$ est libre au premier coup d'oeil.
  En effet, il s'agit d'une famille de polynômes échelonnée en degré.
  Cependant, ce n'était pas l'argument attendu ici puisqu'il trivialisait la question (comme un argument de type « récurrence immédiate » trivialise une question qui porte uniquement sur une récurrence).

□

5. Dans cette question, on cherche à déterminer les sous espaces vectoriels F de E de dimension supérieure ou égale à 2 tels que $d(F) \subset F$.

a) On suppose que $\dim(F) = 2$.
Montrer qu'il existe dans F un polynôme de degré supérieur ou égal à 1. En déduire F.

Démonstration.

- Supposons par l'absurde que : $\forall P \in F$, $\deg(P) < 1$. Alors :

$$\forall P \in F, \ \deg(P) = 0 \text{ ou } \deg(P) = -\infty$$

Donc $F \subset \mathbb{R}_0[X]$. D'où $\dim(F) \leqslant \dim(\mathbb{R}_0[X]) = 1$, ce qui est absurde car $\dim(F) = 2$.

$$\boxed{\text{Donc il existe } P^* \in F \text{ tel que } \deg(P^*) \geqslant 1.}$$

- On note $r = \deg(P^*)$. Donc $r \geqslant 1$.
  - D'après l'énoncé, $d(F) \subset F$. Donc $d(P^*) \in F$.
    Donc, par récurrence immédiate, pour tout $k \in [\![0, r]\!]$, $d^k(P^*) \in F$.
  - De plus, d'après la question ***4.b)***, la famille $\left(d^k(P^*)\right)_{0 \leqslant k \leqslant r}$ est libre.

  Donc $2 = \dim(F) \geqslant \text{Card}\left(\left(d^k(P^*)\right)_{0 \leqslant k \leqslant r}\right) = r + 1$.
  Donc $r \leqslant 2 - 1 = 1$. D'où $r = 1$.
- Donc $(P^*, d(P^*))$ est une famille libre de F.
  De plus $\text{Card}((P^*, d(P^*))) = 2 = \dim(F)$, donc c'est une base de F.
  Donc $F = \text{Vect}\left((P^*, d(P^*))\right)$.
- Or $\text{Vect}\left((P^*, d(P^*))\right) \subset \mathbb{R}_1[X]$ car $\deg(P^*) = 1$.
  Donc $F \subset \mathbb{R}_1[X]$. De plus $\dim(F) = 2 = \dim(\mathbb{R}_1[X])$.

$$\boxed{F = \mathbb{R}_1[X]}$$

Commentaire

Pour effectuer un raisonnement par l'absurde, on suppose la négation de la propriété que l'on souhaite démontrer.
Ici la propriété à démontrer est :

Il existe dans F un polynôme de degré supérieur ou égal à 1

c'est-à-dire :

$$\exists\ P \in F \text{ tel que } \deg(P) \geqslant 1$$

La négation est donc :

$$\forall P \in F,\ \deg(P) < 1$$

$\square$

b) On suppose que $\dim(F) = 3$.
On note $\tilde{d}$ l'endomorphisme de F défini par : pour tout P de F, $\tilde{d}(P) = d(P)$.
Montrer que $(\tilde{d})^3 = 0$. En déduire F.

Démonstration.

- Supposons par l'absurde qu'il existe $P \in F$ tel que $\left(\tilde{d}\right)^3 (P) \neq 0$.
  Alors, par définition de $\tilde{d}$, $d^3(P) \neq 0$. Donc P est de degré 3.
  - Comme $d(F) \subset F$, alors, par récurrence immédiate, pour tout $k \in [\![0, 3]\!]$, $d^k(P) \in F$.
  - D'après la question ***4.b)***, la famille $\left(d^k(P^*)\right)_{0 \leqslant k \leqslant 3}$ est libre.

  Donc $3 = \dim(F) \geqslant \text{Card}\left(\left(d^k(P^*)\right)_{0 \leqslant k \leqslant 3}\right) = 4$, ce qui est absurde.
  Donc, pour tout $P \in F$, $\left(\tilde{d}\right)^3 (P) = 0_E$.

$$\boxed{\left(\tilde{d}\right)^3 = 0}$$

- - D'après le point précédent, on en déduit que $F \subset \text{Ker}\left(\left(\tilde{d}\right)^3\right)$.
    Or $\text{Ker}\left(\left(\tilde{d}\right)^3\right) \subset \text{Ker}(d^3)$ par définition de $\tilde{d}$. Donc $F \subset \text{Ker}(d^3)$.
    D'où, d'après la question ***4.a)***, $F \subset \mathbb{R}_2[X]$.
  - De plus $\dim(F) = 3 = \dim(\mathbb{R}_2[X])$.

$$\boxed{\text{Donc } F = \mathbb{R}_2[X]}$$

Commentaire

- On notera que $\tilde{d}$ est bien un endomorphisme car $d(F) \subset F$.
- On pouvait démontrer cette question sans utiliser $\tilde{d}$:
  Soit $r \in [\![0, 3]\!]$. Soit $P \in F$ tel que $\deg(P) = r$.
  - Comme $d(F) \subset F$, alors, par récurrence immédiate, pour tout $k \in [\![0, 3]\!]$, $d^k(P) \in F$.
  - D'après la question ***4.b)***, la famille $\left(d^k(P^*)\right)_{0 \leqslant k \leqslant r}$ est libre.

  Donc $3 = \dim(F) \geqslant \text{Card}\left(\left(d^k(P^*)\right)_{0 \leqslant k \leqslant r}\right) = r + 1$.
  Donc $r \leqslant 3 - 1 = 2$. D'où $F \subset \mathbb{R}_2[X]$.
  Or $\dim(F) = 3 = \dim(\mathbb{R}_2[X])$. D'où $F = \mathbb{R}_2[X]$.
  On notera néanmoins que cette démonstration n'était pas dans l'esprit du sujet.

$\square$

Problème

- Toutes les variables aléatoires qui interviennent dans ce problème sont supposées définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.
- Sous réserve d'existence, on note $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$ respectivement l'espérance et la variance d'une variable aléatoire X, et $\text{Cov}(X, Y)$ la covariance de deux v.a.r. X et Y.
- Dans les parties I et III, la fonction de répartition et une densité d'une variable aléatoire X à densité sont notées respectivement F_X et f_X.
- **On admet** que les formules donnant l'espérance et la variance d'une somme de variables aléatoires discrètes, ainsi que la définition et les propriétés de la covariance et du coefficient de corrélation linéaire de deux variables aléatoires discrètes, s'appliquent au cas de variables aléatoires à densité.
- Pour n entier supérieur ou égal à 2, on dit que les variables aléatoires à densité X_1, X_2, ..., X_n sont indépendantes si pour tout n-uplet $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de réels, les événements $[X_1 \leqslant x_1]$, $[X_2 \leqslant x_2]$, ..., $[X_n \leqslant x_n]$ sont indépendants.
- L'objet du problème est double. D'une part, montrer certaines analogies entre les lois géométriques et exponentielles, d'autre part mettre en évidence quelques propriétés asymptotiques de variables aléatoires issues de la loi exponentielle.
  La partie II est indépendante de la partie I.
  La partie III est indépendante de la partie II et largement indépendante de la partie I.

Partie I. Loi exponentielle

1. a) Rappeler la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\, dt$.

Établir pour tout n de $\mathbb{N}^*$ la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t}\, dt$.

On pose alors $I_0 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\, dt$ et pour tout n de $\mathbb{N}^*$ $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t}\, dt$.

Démonstration.

- On note X une v.a.r. de loi $\mathcal{E}(1)$. Alors une densité f_X de X est :

$$f_X : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \mathrm{e}^{-t} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$$

On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\, dt$ est convergente et vaut 1.

$$\boxed{\text{Comme } f_X \text{ est nulle en dehors de } [0, +\infty[\text{, on obtient : } \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\, dt = 1.}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
  - La fonction $t \mapsto t^n\, \mathrm{e}^{-t}$ est continue sur $[0, +\infty[$. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n\, \mathrm{e}^{-t}\, dt$ est donc uniquement impropre en $+\infty$.

- De plus :
  × on remarque : $t^n\,\mathrm{e}^{-t} = \underset{t\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$. En effet :

$$\frac{t^n\,\mathrm{e}^{-t}}{\frac{1}{t^2}} = t^{n+2}\,\mathrm{e}^{-t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad \textit{(par croissances comparées)}$$

  × par ailleurs : $\forall t \in [1,+\infty[$, $t^n\,\mathrm{e}^{-t} \geqslant 0$ et $\dfrac{1}{t^2} \geqslant 0$.
  × l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$ est une intégrale de Riemann, impropre en $+\infty$, d'exposant 2 ($2 > 1$). Elle est donc convergente.

  Par critère de négligeabilité des intégrales généralisées de fonctions continues positives, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^n\,\mathrm{e}^{-t}\,dt$ est convergente.
- Enfin, comme la fonction $t \mapsto t^n\,\mathrm{e}^{-t}$ est continue sur le segment $[0,1]$, alors l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t^n\,\mathrm{e}^{-t}\,dt$ est bien définie.

$$\boxed{\text{Finalement, l'intégrale } \int_0^{+\infty} t^n\,\mathrm{e}^{-t}\,dt \text{ est convergente.}}$$

□

b) Soit n un entier de $\mathbb{N}^*$. À l'aide d'une intégration par parties, établir une relation de récurrence entre I_n et I_{n-1}. En déduire la valeur de I_n en fonction de n.

Démonstration.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $B \geqslant 0$. On effectue une intégration par parties (IPP).

$$\left|\begin{array}{rclrcl} u(t) & = & t^n & u'(t) & = & n\,t^{n-1} \\ v'(t) & = & \mathrm{e}^{-t} & v(t) & = & -\mathrm{e}^{-t} \end{array}\right.$$

Cette IPP est valide car les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,B]$. On obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^B t^n\mathrm{e}^{-t}\,dt &= \left[\,-t^n\,\mathrm{e}^{-t}\,\right]_0^B + n\int_0^B t^{n-1}\mathrm{e}^{-t}\,dt \\ &= -B^n\mathrm{e}^{-B} + n\int_0^B t^{n-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,dt \end{aligned}$$

Or, par croissances comparées : $\lim\limits_{B\to+\infty} -B^n\mathrm{e}^{-B} = 0$.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{On en déduit, par passage à la limite quand } B \text{ tend vers } +\infty : \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_n = n\,I_{n-1}.\end{array}}$$

- Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n)$: $I_n = n!$.
  - **Initialisation** :
    D'après la question ***1.a)*** : $I_0 = 1 = 0!$.
    D'où $\mathcal{P}(0)$.
  - **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
    Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $I_{n+1} = (n+1)!$).

$$\begin{array}{rcll} I_{n+1} & = & (n+1)\, I_n & \textit{(d'après la question précédente)} \\ & = & (n+1) \times n! & \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\ & = & (n+1)! & \end{array}$$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N},\ I_n = n!.}$$

□

Soit λ un réel strictement positif. Soient X_1 et X_2 deux variables indépendantes de même loi exponentielle de paramètre λ (d'espérance $\frac{1}{\lambda}$).

On pose : $Y = X_1 - X_2$, $T = \max(X_1, X_2)$ et $Z = \min(X_1, X_2)$.

2. Justifier les relations $T + Z = X_1 + X_2$ et $T - Z = |X_1 - X_2| = |Y|$.

Démonstration.
Soit $\omega \in \Omega$. Deux cas se présentent.

- si $T(\omega) = X_1(\omega)$, alors : $Z(\omega) = X_2(\omega)$. Ainsi :
  - × d'une part : $T(\omega) + Z(\omega) = X_1(\omega) + X_2(\omega)$.
  - × d'autre part : $T(\omega) - Z(\omega) = X_1(\omega) - X_2(\omega) = Y(\omega)$.
    De plus, comme on est ici dans le cas où $\max\big(X_1(\omega), X_2(\omega)\big) = X_1(\omega)$, on obtient : $Y(\omega) \geqslant 0$.
    D'où :
$$T(\omega) - Z(\omega) \ = \ Y(\omega) \ = \ |Y(\omega)| \ = \ |Y|(\omega)$$
- si $T(\omega) = X_2(\omega)$, alors : $Z(\omega) = X_2(\omega)$. Ainsi :
  - × d'une part : $T(\omega) + Z(\omega) = X_2(\omega) + X_1(\omega) = X_1(\omega) + X_2(\omega)$.
  - × d'autre part : $T(\omega) - Z(\omega) = X_2(\omega) - X_1(\omega) = -Y(\omega)$.
    De plus, comme on est ici dans le cas où $\max\big(X_1(\omega), X_2(\omega)\big) = X_2(\omega)$, on obtient : $Y(\omega) \leqslant 0$.
    D'où :
$$T(\omega) - Z(\omega) \ = \ -Y(\omega) \ = \ |Y(\omega)| \ = \ |Y|(\omega)$$

Finalement, pout tout $\omega \in \Omega$:

$$T(\omega) + Z(\omega) \ = \ X_1(\omega) + X_2(\omega) \qquad \text{et} \qquad T(\omega) - Z(\omega) \ = \ |Y|(\omega)$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } T + Z = X_1 + X_2 \text{ et } T - Z = |Y| = |X_1 - X_2|.}$$

□

3. a) Rappeler sans démonstration les valeurs de $\mathbb{V}(X_1)$ et de $\mathbb{P}\big([X_1 \leqslant x]\big)$, pour tout réel x.

Démonstration.

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{Comme } X_1 \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda), \text{ alors :} \\ \mathbb{V}(X_1) = \dfrac{1}{\lambda^2} \text{ et } F_{X_1} : x \mapsto \left\{ \begin{array}{cl} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{array} \right. \end{array}}$$

□

b) Calculer $\mathbb{E}(X_1 + X_2)$, $\mathbb{V}(X_1 + X_2)$, $\mathbb{E}(Y)$, $\mathbb{V}(Y)$.

Démonstration.

- Les v.a.r. $X_1 + X_2$ et $Y = X_1 - X_2$ admettent une variance (et donc une espérance) en tant que combinaison linéaire de v.a.r. qui en admettent une.
- Par linéarité de l'espérance :
  - × tout d'abord : $\mathbb{E}(X_1 + X_2) = \mathbb{E}(X_1) + \mathbb{E}(X_2) = \dfrac{1}{\lambda} + \dfrac{1}{\lambda} = \dfrac{2}{\lambda}$.

$$\boxed{\mathbb{E}(X_1 + X_2) = \frac{2}{\lambda}}$$

  - × ensuite : $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(X_1 - X_2) = \mathbb{E}(X_1) - \mathbb{E}(X_2) = \dfrac{1}{\lambda} - \dfrac{1}{\lambda} = 0$.

$$\boxed{\mathbb{E}(Y) = 0}$$

- Comme les v.a.r. X_1 et X_2 sont indépendantes :

$$\mathbb{V}(X_1 + X_2) \ = \ \mathbb{V}(X_1) + \mathbb{V}(X_2) \ = \ \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} \ = \ \frac{2}{\lambda^2}$$

$$\boxed{\mathbb{V}(X_1 + X_2) = \frac{2}{\lambda^2}}$$

- Comme les v.a.r. X_1 et X_2 sont indépendantes, par lemme des coalitions, les v.a.r. X_1 et $-X_2$ le sont aussi. Ainsi :

$$\mathbb{V}(X_1 - X_2) \ = \ \mathbb{V}(X_1) + \mathbb{V}(-X_2) \ = \ \mathbb{V}(X_1) + \mathbb{V}(X_2) \ = \ \frac{2}{\lambda^2}$$

$$\boxed{\text{D'où : } \mathbb{V}(Y) = \mathbb{V}(X_1 - X_2) = \frac{2}{\lambda^2}}$$

□

4. Déterminer pour tout réel z, $F_Z(z)$ et $f_Z(z)$. Reconnaître la loi de Z et en déduire $\mathbb{E}(Z)$ et $\mathbb{V}(Z)$.

Démonstration.

- Tout d'abord, comme $X_1(\Omega) = [0, +\infty[$ et $X_2(\Omega) = [0, +\infty[$, alors : $Z(\Omega) \subset [0, +\infty[$.
- Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent :
  - × si $x \in \,]-\infty, 0[$, alors $[Z \leqslant x] = \varnothing$ (car $Z(\Omega) \subset [0, +\infty[$). D'où :

$$F_Z(x) \ = \ \mathbb{P}([Z \leqslant x]) \ = \ \mathbb{P}(\varnothing) \ = \ 0$$

  - × si $x \in [0, +\infty[$, alors :

$$\begin{array}{rcll}
F_Z(x) & = & \mathbb{P}([Z \leqslant x]) \ = \ 1 - \mathbb{P}([Z > x]) & \\
& = & 1 - \mathbb{P}([X_1 > x] \cap [X_2 > x]) & \\
& = & 1 - \mathbb{P}([X_1 > x]) \times \mathbb{P}([X_2 > x]) & \textit{(car } X_1 \textit{ et } X_2 \textit{ sont indépendantes)} \\
& = & 1 - \big(\mathbb{P}([X_1 > x])\big)^2 & \textit{(car } X_1 \textit{ et } X_2 \textit{ ont même loi)} \\
& = & 1 - \big(1 - F_{X_1}(x)\big)^2 & \\
& = & 1 - \Big(\cancel{1} - (\cancel{1} - \mathrm{e}^{-\lambda x})\Big)^2 & \textit{(d'après \textbf{3.a)}, car } x \geqslant 0\textit{)} \\
& = & 1 - \mathrm{e}^{-2\lambda x} &
\end{array}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } F_Z : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-2\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}.}$$

- On reconnaît la fonction de répartition d'une v.a.r. de loi $\mathcal{E}(2\lambda)$. Or la fonction de répartition caractérise la loi.

$$\boxed{\text{On en déduit : } Z \hookrightarrow \mathcal{E}(2\lambda).}$$

$$\boxed{\text{D'où : } f_Z : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2\lambda\, \mathrm{e}^{-2\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}, \qquad \mathbb{E}(Z) = \frac{1}{2\lambda}, \qquad \mathbb{V}(Z) = \frac{1}{4\lambda^2}.}$$

□

5. a) Montrer que pour tout réel t, on a : $F_T(t) = \begin{cases} \left(1-\mathrm{e}^{-\lambda t}\right)^2 & \text{si } t \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$.

Exprimer pour tout réel t, $f_T(t)$.

Démonstration.

- Tout d'abord, comme $X_1(\Omega) = [0, +\infty[$ et $X_2(\Omega) = [0, +\infty[$, alors : $T(\Omega) \subset [0, +\infty[$.
- Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent :
  - × si $x \in \,]-\infty, 0[$, alors $[T \leqslant x] = \varnothing$ (car $T(\Omega) \subset [0, +\infty[$). D'où :
  $$F_T(x) \;=\; \mathbb{P}([T \leqslant x]) \;=\; \mathbb{P}(\varnothing) \;=\; 0$$
  - × si $x \in [0, +\infty[$, alors :
  $$\begin{aligned} F_T(x) &= \mathbb{P}([T \leqslant x]) \\ &= \mathbb{P}([X_1 \leqslant x] \cap [X_2 \leqslant x]) \\ &= \mathbb{P}([X_1 \leqslant x]) \times \mathbb{P}([X_2 \leqslant x]) && \textit{(car } X_1 \textit{ et } X_2 \textit{ sont indépendantes)} \\ &= \left(\mathbb{P}([X_1 \leqslant x])\right)^2 && \textit{(car } X_1 \textit{ et } X_2 \textit{ ont même loi)} \\ &= \left(1-\mathrm{e}^{-\lambda x}\right)^2 && \textit{(d'après \textbf{3.a)}, car } x \geqslant 0\textit{)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } F_T : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \left(1-\mathrm{e}^{-\lambda x}\right)^2 & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}.}$$

- La fonction F_T est continue :
  - × sur $]-\infty, 0[$ en tant que fonction constante,
  - × sur $]0, +\infty[$ en tant que produit de fonctions continues sur $]0, +\infty[$,
  - × en 0. En effet :
    - d'une part : $\lim\limits_{x \to 0^-} F_T(x) = 0$
    - d'autre part : $\lim\limits_{x \to 0^+} F_T(x) = F_T(0) = (1-\mathrm{e}^{-\lambda \times 0})^2 = 0$

  Ainsi : $\lim\limits_{x \to 0^-} F_T(x) = F_T(0) = \lim\limits_{x \to 0^+} F_T(x)$.

$$\boxed{\text{La fonction } F_T \text{ est donc continue sur } \mathbb{R}.}$$

- La fonction F_T est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ par des arguments similaires à ceux de la continuité sur ces intervalles.

$$\boxed{\text{La fonction } F_T \text{ est donc de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ sauf éventuellement en 0.}}$$

$$\boxed{\text{La v.a.r. } T \text{ est donc une v.a.r. à densité.}}$$

- Pour déterminer une densité f_T de T, on dérive sa fonction de répartition F_T sur les intervalles **ouverts** $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.
Soit $x \in \mathbb{R}$.
  × si $x \in]-\infty, 0[$, alors :
$$f_T(x) = F_T'(x) = 0$$
  × si $x \in]0, +\infty[$, alors :
$$f_T(x) = F_T'(x) = 2\,\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda\,x}\left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda\,x}\right)$$
  × On choisit enfin : $f_T(0) = 0$.

$$\boxed{\text{Finalement : } f_T : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 2\,\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda\,x}\left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda\,x}\right) & \text{si } x > 0 \end{cases}.}$$

□

b) Justifier l'existence de $\mathbb{E}(T)$ et $\mathbb{V}(T)$. Montrer que $\mathbb{E}(T) = \dfrac{3}{2\lambda}$ et $\mathbb{V}(T) = \dfrac{5}{4\lambda^2}$.
(on pourra utiliser des changements de variables affines)

Démonstration.

- D'après la question ***2.*** : $T = X_1 + X_2 - Z$. On en déduit que la v.a.r. T admet une variance (et donc une espérance) en tant que combinaison linéaire de v.a.r. qui en admettent une.
- Tout d'abord :
$$\begin{aligned} \mathbb{E}(T) &= \mathbb{E}(X_1 + X_2 - Z) \\ &= \mathbb{E}(X_1 + X_2) - \mathbb{E}(Z) && \textit{(par linéarité de l'espérance)} \\ &= \frac{2}{\lambda} - \frac{1}{2\,\lambda} && \textit{(d'après } \textbf{\textit{3.b)}} \textit{ et } \textbf{\textit{4.}}\textit{)} \\ &= \frac{4}{2\,\lambda} - \frac{1}{2\,\lambda} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathbb{E}(T) = \frac{3}{2\,\lambda}.}$$

- Ensuite, comme la v.a.r. T admet une variance, elle admet un moment d'ordre 2. De plus :
$$\begin{aligned} \mathbb{E}(T^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} t^2\, f_T(t)\ dt \\ &= \int_{0}^{+\infty} t^2\, f_T(t)\ dt && \textit{(car } f_T \textit{ est nulle en dehors de } [0, +\infty[\textit{)} \\ &= \int_{0}^{+\infty} t^2 \times 2\,\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda\,t}\left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda\,t}\right)\ dt \\ &= 2\int_{0}^{+\infty} t^2 \times \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda t}\ dt - \int_{0}^{+\infty} t^2 \times 2\,\lambda\,\mathrm{e}^{-2\,\lambda\,t}\ dt && \textit{(par linéarité de l'intégrale)} \end{aligned}$$
Cette linéarité est bien licite car les intégrales en présence sont convergentes. En effet :
  × d'une part, l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} t^2 \times \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda\,t}\ dt$ est le moment d'ordre 2 de $X_1 \hookrightarrow \mathcal{E}\,(\lambda)$,
  × d'autre part, l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} t^2 \times 2\,\lambda\,\mathrm{e}^{-2\,\lambda\,t}\ dt$ est le moment d'ordre 2 de $U \hookrightarrow \mathcal{E}\,(2\,\lambda)$.

On en déduit :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{E}(T^2) & = & 2\ \mathbb{E}(X_1^2) - \mathbb{E}(U^2) & \\
& = & 2\left(\mathbb{V}(X_1) + \big(\mathbb{E}(X_1)\big)^2\right) - \left(\mathbb{V}(U) + \big(\mathbb{E}(U)\big)^2\right) & \textit{(par formule de Koenig-Huygens)} \\
& = & 2\left(\dfrac{1}{\lambda^2} + \dfrac{1}{\lambda^2}\right) - \left(\dfrac{1}{4\,\lambda^2} + \dfrac{1}{4\,\lambda^2}\right) & \textit{(car } X_1 \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda) \textit{ et } U \hookrightarrow \mathcal{E}(2\,\lambda)\textit{)} \\
& = & \dfrac{4}{\lambda^2} - \dfrac{1}{2\,\lambda^2} \ = \ \dfrac{7}{2\,\lambda^2} &
\end{array}$$

- Par formule de Koenig-Huygens :

$$\mathbb{V}(T) \ = \ \mathbb{E}(T^2) - \big(\mathbb{E}(T)\big)^2 \ = \ \frac{7}{2\,\lambda^2} - \frac{9}{4\,\lambda^2} \ = \ \frac{5}{4\,\lambda^2}$$

$$\boxed{\mathbb{V}(T) = \frac{5}{4\,\lambda^2}}$$

□

6. On note r le coefficient de corrélation linéaire de Z et T. Montrer que $r = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

Démonstration.

- Tout d'abord, par définition du coefficient de corrélation : $r = \dfrac{\text{Cov}(Z,T)}{\sqrt{\mathbb{V}(Z)}\,\sqrt{\mathbb{V}(T)}}$.
- De plus :

$$\mathbb{V}(T+Z) \ = \ \mathbb{V}(Z) + 2\ \text{Cov}(Z,T) + \mathbb{V}(T)$$

Ainsi :

$$\begin{array}{rcll}
\text{Cov}(Z,T) & = & \dfrac{1}{2}\big(\mathbb{V}(Z+T) - \mathbb{V}(Z) - \mathbb{V}(T)\big) & \\
& = & \dfrac{1}{2}\big(\mathbb{V}(X_1+X_2) - \mathbb{V}(Z) - \mathbb{V}(T)\big) & \textit{(car } T+Z = X_1+X_2\textit{)} \\
& = & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{\lambda^2} - \dfrac{1}{4\,\lambda^2} - \dfrac{5}{4\,\lambda^2}\right) & \textit{(d'après } \textbf{\textit{3.b)}}, \textbf{\textit{4.}} \textit{ et } \textbf{\textit{5.b)}}\textit{)} \\
& = & \dfrac{1}{\cancel{2}} \times \dfrac{\cancel{2}}{4\,\lambda^2} &
\end{array}$$

$$\boxed{\text{D'où : } \text{Cov}(Z,T) = \frac{1}{4\,\lambda^2}.}$$

- Enfin :
  × d'une part, d'après ***4.*** : $\sqrt{\mathbb{V}(Z)} = \sqrt{\dfrac{1}{4\,\lambda^2}} = \dfrac{1}{2\,\lambda}$.
  × d'autre part, d'après ***5.b)*** : $\sqrt{\mathbb{V}(T)} = \sqrt{\dfrac{5}{4\,\lambda^2}} = \dfrac{\sqrt{5}}{2\,\lambda}$.
- On obtient :

$$r \ = \ \frac{\text{Cov}(Z,T)}{\sqrt{\mathbb{V}(Z)}\,\sqrt{\mathbb{V}(T)}} \ = \ \frac{\frac{1}{\cancel{4\lambda^2}}}{\frac{1}{\cancel{2\lambda}}\ \frac{\sqrt{5}}{\cancel{2\lambda}}} \ = \ \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\boxed{r = \frac{1}{\sqrt{5}}}$$

□

7. a) Préciser $Y(\Omega)$ et $|Y|(\Omega)$.

Démonstration.
Les v.a.r. X_1 et X_2 sont toutes les deux de loi $\mathcal{E}(\lambda)$. Ainsi : $X_1(\Omega) = X_2(\Omega) = [0, +\infty[$.

$$\boxed{\text{Comme } Y = X_1 - X_2, \text{ on en déduit : } Y(\Omega) = \mathbb{R}.}$$

$$\boxed{\text{Par définition de la valeur absolue, on obtient : } |Y|(\Omega) = [0, +\infty[.}$$

□

b) Déterminer une densité de la variable aléatoire $-X_2$.

Démonstration.

- Tout d'abord, on note : $V = -X_2$. Comme $X_2(\Omega) = [0, +\infty[$, alors :

$$V(\Omega) \; = \; \big(-X_2\big)(\Omega) \; = \;]-\infty, 0]$$

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent.
  × Si $x \in]-\infty, 0]$, alors :

$$\begin{array}{rcll} F_V(x) & = & \mathbb{P}\big([V \leqslant x]\big) & \\ & = & \mathbb{P}\big([-X_2 \leqslant x]\big) & \\ & = & \mathbb{P}([X_2 \geqslant -x]) & \\ & = & 1 - \mathbb{P}([X_2 \leqslant -x]) & \textit{(car } X_2 \textit{ est une v.a.r. à densité)} \\ & = & 1 - F_{X_2}(-x) & \\ & = & 1 - \left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda(-x)}\right) & \textit{(car } -x \geqslant 0 \textit{ puisque } x \leqslant 0\textit{)} \\ & = & \mathrm{e}^{\lambda x} & \end{array}$$

  × Si $x > 0$, alors : $[V \leqslant x] = \Omega$ donc :

$$F_V(x) \; = \; \mathbb{P}\big([V \leqslant x]\big) \; = \; \mathbb{P}(\Omega) \; = \; 1$$

$$\boxed{\text{En conclusion : } F_V : x \mapsto \begin{cases} \mathrm{e}^{\lambda x} & \text{si } x \leqslant 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}.}$$

- La fonction F_V est continue :
  × sur $]-\infty, 0[$ en tant que fonction usuelle,
  × sur $]0, +\infty[$ en tant que fonction constante,
  × en 0. En effet :
    - d'une part : $\lim\limits_{x \to 0^-} F_V(x) = F_V(0) = \mathrm{e}^{\lambda \times 0} = 1$
    - d'autre part : $\lim\limits_{x \to 0^+} F_V(x) = 1$

  Ainsi : $\lim\limits_{x \to 0^-} F_V(x) = F_V(0) = \lim\limits_{x \to 0^+} F_V(x)$.

$$\boxed{\text{La fonction } F_V \text{ est donc continue sur } \mathbb{R}.}$$

- La fonction F_V est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty,0[$ et sur $]0,+\infty[$ par des arguments similaires à ceux de la continuité sur ces intervalles.

$$\boxed{\text{La fonction } F_V \text{ est donc de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ sauf éventuellement en } 0.}$$

$$\boxed{\text{La v.a.r. } V \text{ est donc une v.a.r. à densité.}}$$

- Pour déterminer une densité f_V et $V = -X_2$, on dérive sa fonction de répartition F_V sur les intervalles **ouverts** $]-\infty,0[$ et $]0,+\infty[$.
  Soit $x \in \mathbb{R}$.
  × si $x \in]-\infty,0[$, alors :
  $$f_V(x) \ = \ F_V'(x) \ = \ \lambda\,\mathrm{e}^{\lambda\,x}$$
  × si $x \in]0,+\infty[$, alors :
  $$f_V(x) \ = \ F_V'(x) \ = \ 0$$
  × On choisit enfin : $f_V(0) = 0$.

$$\boxed{\text{Finalement : } f_V : x \mapsto \begin{cases} \lambda\,\mathrm{e}^{\lambda\,x} & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}.}$$

□

c) Montrer que pour tout réel y, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(t)\, f_{-X_2}(y-t)\ dt$ est convergente et qu'elle vaut $\dfrac{\lambda}{2}\,\mathrm{e}^{-\lambda\,|y|}$ (on distinguera les deux cas : $y \geqslant 0$ et $y < 0$).

Démonstration.
Soit $y \in \mathbb{R}$.

- Tout d'abord, comme f_{X_1} est nulle en dehors de $[0,+\infty[$:
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(t)\, f_{-X_2}(y-t)\ dt \ = \ \int_{0}^{+\infty} f_{X_1}(t)\, f_{-X_2}(y-t)\ dt$$

- Deux cas se présentent alors :
  × si $y < 0$, alors pour tout $t \in [0,+\infty[$: $y - t < 0$. Ainsi, pour tout $t \in [0,+\infty[$:
  $$f_{-X_2}(y-t) \ = \ \lambda\,\mathrm{e}^{\lambda\,(y-t)}$$
  Soit $B \in [0,+\infty[$. On en déduit :
  $$\begin{aligned}\int_0^B f_{X_1}(t)\, f_{-X_2}(y-t)\ dt \ &= \ \int_0^B \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda\,t}\ \lambda\,\mathrm{e}^{\lambda\,(y-t)}\ dt \\ &= \ \lambda^2\,\mathrm{e}^{\lambda\,y} \int_0^B \mathrm{e}^{-\lambda\,t}\ \mathrm{e}^{-\lambda\,t}\ dt \\ &= \ \lambda^2\,\mathrm{e}^{\lambda\,y} \int_0^B \mathrm{e}^{-2\,\lambda\,t}\ dt \\ &= \ \lambda^{\cancel{2}}\,\mathrm{e}^{\lambda\,y}\ \frac{1}{2\,\cancel{\lambda}} \int_0^B 2\,\lambda\,\mathrm{e}^{-2\,\lambda\,t}\ dt\end{aligned}$$

Or l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} 2\,\lambda\,\mathrm{e}^{-2\,\lambda\,t}\,dt$ est convergente (et vaut 1) car c'est le moment d'ordre 0 de $U \hookrightarrow \mathcal{E}(2\,\lambda)$. On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_{X_1}(t)\,f_{-X_2}(y-t)\,dt$ est convergente et :

$$\int_0^{+\infty} f_{X_1}(t)\,f_{-X_2}(y-t)\,dt \;=\; \frac{\lambda}{2}\,\mathrm{e}^{\lambda\,y}\times 1 \;=\; \frac{\lambda}{2}\,\mathrm{e}^{-\lambda\,|y|} \qquad \textit{(car } y<0\textit{)}$$

$$\boxed{\forall y<0,\ \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(t)\,f_{-X_2}(y-t)\,dt = \frac{\lambda}{2}\,\mathrm{e}^{-\lambda\,|y|}}$$

× si $y \geqslant 0$, alors remarquons que pour tout $t \in [0,+\infty[$:

$$f_{X_1}(t)\,f_{-X_2}(y-t) \neq 0 \quad\Leftrightarrow\quad \left\{\begin{array}{l} f_{X_1}(t)\neq 0 \\ f_{-X_2}(y-t)\neq 0 \end{array}\right. \quad\Leftrightarrow\quad \left\{\begin{array}{l} t\in[0,+\infty[\\ y-t\in]-\infty,0[\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\quad \left\{\begin{array}{l} t\geqslant 0 \\ y-t<0 \end{array}\right. \quad\Leftrightarrow\quad \left\{\begin{array}{l} t\geqslant 0 \\ t>y \end{array}\right.$$

On en déduit : $f_{X_1}(t)\ f_{-X_2}(y-t)\neq 0 \ \Leftrightarrow\ t>y$. Et ainsi :

$$\int_0^{+\infty} f_{X_1}(t)\,f_{-X_2}(y-t)\,dt \;=\; \int_y^{+\infty} f_{X_1}(t)\,f_{-X_2}(y-t)\,dt$$

car $t\mapsto f_{X_1}(t)\,f_{-X_2}(y-t)$ est nulle en dehors de $]y,+\infty[$.
Soit $B\in[y,+\infty[$. On obtient :

$$\begin{aligned}\int_y^{B} f_{X_1}(t)\,f_{-X_2}(y-t)\,dt &= \int_y^{B} \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda\,t}\,\lambda\,\mathrm{e}^{\lambda\,(y-t)}\,dt \\ &= \lambda^2\,\mathrm{e}^{\lambda\,y}\int_y^{B}\mathrm{e}^{-2\,\lambda\,t}\,dt \\ &= \lambda^{\cancel{2}}\,\mathrm{e}^{\lambda\,y}\,\frac{1}{2\,\cancel{\lambda}}\int_y^{B} 2\,\lambda\,\mathrm{e}^{-2\,\lambda\,t}\,dt\end{aligned}$$

Or, comme $\displaystyle\int_0^{+\infty} 2\,\lambda\,\mathrm{e}^{-2\,\lambda\,t}\,dt$ est convergente (*cf* point précédent), alors $\displaystyle\int_y^{+\infty} 2\,\lambda\,\mathrm{e}^{-2\,\lambda\,t}\,dt$ est aussi convergente.
De plus, en conservant la notation $U\hookrightarrow\mathcal{E}(2\,\lambda)$:

$$\begin{aligned}\int_y^{+\infty} 2\,\lambda\,\mathrm{e}^{-2\,\lambda\,t}\,dt &= \int_y^{+\infty} f_U(t)\,dt \\ &= \mathbb{P}([U\geqslant y]) \\ &= 1-\mathbb{P}([U\leqslant y]) && \textit{(car } U \textit{ est une v.a.r. à densité)} \\ &= 1-\left(1-\mathrm{e}^{-2\,\lambda\,y}\right) \\ &= \mathrm{e}^{-2\,\lambda\,y}\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\int_y^{+\infty} f_{X_1}(t)\,f_{-X_2}(y-t)\,dt \;=\; \frac{\lambda}{2}\,\mathrm{e}^{\lambda\,y}\times\mathrm{e}^{-2\,\lambda\,y} \;=\; \frac{\lambda}{2}\,\mathrm{e}^{-\lambda\,y} \;=\; \frac{\lambda}{2}\,\mathrm{e}^{-\lambda\,|y|} \qquad \textit{(car } y\geqslant 0\textit{)}$$

$$\boxed{\forall y\geqslant 0,\ \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(t)\,f_{-X_2}(y-t)\,dt = \frac{\lambda}{2}\,\mathrm{e}^{-\lambda\,|y|}}$$

□

d) Établir que la fonction $y \mapsto \frac{\lambda}{2} \mathrm{e}^{-\lambda\,|y|}$ est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$; on admet que c'est une densité de la variable aléatoire Y.

Démonstration.

- La fonction $y \mapsto \frac{\lambda}{2}\ \mathrm{e}^{-\lambda\,|y|}$ est continue sur $\mathbb{R}$ car elle est la composée $h = h_2 \circ h_1$ de :
  - × $h_1 : y \mapsto -\lambda\,|y|$ qui est :
    - continue sur $\mathbb{R}$,
    - telle que : $h_1(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$.
  - × $h_2 : y \mapsto \frac{\lambda}{2}\ \mathrm{e}^{y}$ qui est continue sur $\mathbb{R}$

$$\boxed{\text{La fonction } y \mapsto \frac{\lambda}{2}\mathrm{e}^{-\lambda\,|y|} \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$$

- Soit $y \in \mathbb{R}$. Alors, comme $\lambda > 0$: $\frac{\lambda}{2}\ \mathrm{e}^{-\lambda\,|y|} \geqslant 0$.

$$\boxed{\forall y \in \mathbb{R},\ \frac{\lambda}{2}\mathrm{e}^{-\lambda\,|y|} \geqslant 0}$$

- Démontrons que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda}{2}\ \mathrm{e}^{-\lambda\,|y|}\ dy$ est convergente et vaut 1.
  - × Étudions tout d'abord $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{\lambda}{2}\ \mathrm{e}^{-\lambda\,|y|}\ dy$.

    Pour tout $y \in [0, +\infty[$.
$$\frac{\lambda}{2}\ \mathrm{e}^{-\lambda\,|y|} \ = \ \frac{1}{2} \times \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda\,y}$$
    Or l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda\,y}\ dy$ est convergente (et vaut 1) car c'est le moment d'ordre 0 de $X_1 \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$. Ainsi l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{\lambda}{2}\ \mathrm{e}^{-\lambda\,|y|}\ dy$ est convergente et :
$$\int_{0}^{+\infty} \frac{\lambda}{2}\ \mathrm{e}^{-\lambda\,|y|}\ dy \ = \ \frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty} \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda\,y}\ dy \ = \ \frac{1}{2} \times 1 \ = \ \frac{1}{2}$$
  - × On sait alors :
    - l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{\lambda}{2}\ \mathrm{e}^{-\lambda\,|y|}\ dy$ est convergente,
    - la fonction $y \mapsto \frac{\lambda}{2}\ \mathrm{e}^{-\lambda\,|y|}$ est paire. En effet, pour tout $y \in \mathbb{R}$:
$$\frac{\lambda}{2}\ \mathrm{e}^{-\lambda\,|-y|} \ = \ \frac{\lambda}{2}\ \mathrm{e}^{-\lambda\,|y|}$$
    On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda}{2}\ \mathrm{e}^{-\lambda\,|y|}\ dy$ est convergente et :
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda}{2}\ \mathrm{e}^{-\lambda\,|y|}\ dy \ = \ 2\int_{0}^{+\infty} \frac{\lambda}{2}\ \mathrm{e}^{-\lambda\,|y|}\ dy \ = \ 2 \times \frac{1}{2} \ = \ 1$$

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda}{2}\ \mathrm{e}^{-\lambda\,|y|}\ dy \text{ est convergente et vaut 1.}}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que la fonction } y \mapsto \frac{\lambda}{2}\ \mathrm{e}^{-\lambda\,|y|} \text{ est une densité de probabilité.}}$$

□

e) Déterminer pour tout y réel, $f_{|Y|}(y)$. Reconnaître la loi de $|Y| = T - Z$.

Démonstration.

- Tout d'abord, d'après ***7.a)*** : $|Y|(\Omega) = [0, +\infty[$.
- Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent :
  - × si $x \in]-\infty, 0[$, alors $[|Y| \leqslant x] = \varnothing$ (car $|Y|(\Omega) = [0, +\infty[$). D'où :

$$F_{|Y|}(x) \;=\; \mathbb{P}([|Y| \leqslant x]) \;=\; \mathbb{P}(\varnothing) \;=\; 0$$

  - × si $x \in [0, +\infty[$, alors :

$$\begin{aligned} F_{|Y|}(x) &= \mathbb{P}([|Y| \leqslant x]) \\ &= \mathbb{P}([-x \leqslant Y \leqslant x]) \\ &= \int_{-x}^{x} f_{|Y|}(t)\, dt && \textit{(d'après la question précédente)} \\ &= 2 \int_{0}^{x} f_{|Y|}(t)\, dt && \textit{(car } f_{|Y|} \textit{ est paire (cf question précédente))} \\ &= \cancel{2} \int_{0}^{x} \frac{\lambda}{\cancel{2}}\, \mathrm{e}^{-\lambda |t|}\, dt \\ &= \int_{0}^{x} \lambda\, \mathrm{e}^{-\lambda t}\, dt \\ &= \Big[-\mathrm{e}^{-\lambda t} \Big]_{0}^{x} \;=\; 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } F_{|Y|} : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}.}$$

- On reconnaît la fonction de répartition d'une v.a.r. de loi $\mathcal{E}(\lambda)$. Or la fonction de répartition caractérise la loi.

$$\boxed{\text{On en déduit } |Y| \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda) \text{ et donc : } f_{|Y|} : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \lambda\, \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}.}$$

□

Partie II. Loi géométrique

Soit p un réel de $]0,1[$ et $q = 1-p$. Soit X_1 et X_2 deux variables indépendantes de même loi géométrique de paramètre p (d'espérance $\frac{1}{p}$).
On pose : $Y = X_1 - X_2$, $T = \max(X_1, X_2)$ et $Z = \min(X_1, X_2)$.
On rappelle que $T + Z = X_1 + X_2$ et $T - Z = |X_1 - X_2| = |Y|$.

8. a) Rappeler sans démonstration les valeurs respectives de $\mathbb{V}(X_1)$ et de $\mathbb{P}([X_1 \leqslant k])$, pour tout k de $X_1(\Omega)$.

Démonstration.

$$\boxed{\text{Comme } X_1 \hookrightarrow \mathcal{G}(p), \text{ alors : } \mathbb{V}(X_1) = \frac{q}{p^2} \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}^*,\ \ \mathbb{P}([X_1 \leqslant k]) = 1 - q^k.}$$

Commentaire

- L'énoncé insiste bien sur la non nécessité d'une démonstration, notamment pour les valeurs, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ de $\mathbb{P}([X_1 \leqslant k])$. Celles-ci ne sont pas un attendu du programme, mais c'est une propriété très classique de la loi géométrique. Elle doit donc être connue et on se doit de savoir la redémontrer.
- Rappelons maintenant la démonstration. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
  Notons : $[X_1 \leqslant k] \ = \ \bigcup\limits_{i=1}^{k} [X_1 = i]$. On en déduit :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{P}([X_1 \leqslant k]) & = & \mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{i=1}^{k} [X_1 = i]\right) & \\
 & = & \sum\limits_{i=1}^{k} \mathbb{P}([X_1 = i]) & \textit{(les événements } [X_1 = i] \textit{ étant incompatibles)} \\
 & = & \sum\limits_{i=1}^{k} p\ q^{i-1} & \textit{(car } X_1 \hookrightarrow \mathcal{G}(p)\textit{)} \\
 & = & p \sum\limits_{i=0}^{k-1} q^i \ = \ p\ \dfrac{1-q^k}{1-q} & \textit{(car } q \neq 1\textit{)} \\
 & = & 1 - q^k &
\end{array}$$

□

b) Calculer $\mathbb{E}(X_1 + X_2)$, $\mathbb{V}(X_1 + X_2)$, $\mathbb{E}(X_1 - X_2)$, $\mathbb{V}(X_1 - X_2)$.

Démonstration.

- Les v.a.r. $X_1 + X_2$ et $X_1 - X_2$ admettent une variance (et donc une espérance) en tant que combinaisons linéaires de v.a.r. qui en admettent une.
- Par linéarité de l'espérance :
  × tout d'abord :

$$\mathbb{E}(X_1 + X_2) \ = \ \mathbb{E}(X_1) + \mathbb{E}(X_2) \ = \ \frac{1}{p} + \frac{1}{p} \ = \ \frac{2}{p}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(X_1 + X_2) = \frac{2}{p}}$$

  × ensuite :

$$\mathbb{E}(X_1 - X_2) \ = \ \mathbb{E}(X_1) - \mathbb{E}(X_2) \ = \ \frac{1}{p} - \frac{1}{p} \ = \ 0$$

$$\boxed{\mathbb{E}(X_1 - X_2) = 0}$$

- Comme les v.a.r. X_1 et X_2 sont indépendantes :

$$\mathbb{V}(X_1+X_2) \;=\; \mathbb{V}(X_1)+\mathbb{V}(X_2) \;=\; \frac{q}{p^2}+\frac{q}{p^2} \;=\; 2\,\frac{q}{p^2}$$

$$\boxed{\mathbb{V}(X_1+X_2) = 2\,\frac{q}{p^2}}$$

- Comme les v.a.r. X_1 et X_2 sont indépendantes, par lemme des coalitions, les v.a.r. X_1 et $-X_2$ le sont aussi. Ainsi :

$$\mathbb{V}(X_1-X_2) \;=\; \mathbb{V}(X_1)+\mathbb{V}(-X_2) \;=\; \mathbb{V}(X_1)+\mathbb{V}(X_2) \;=\; 2\,\frac{q}{p^2}$$

$$\boxed{\mathbb{V}(X_1-X_2) = 2\,\frac{q}{p^2}.}$$

Commentaire

Attention à l'erreur classique. Même si X_1 et X_2 sont indépendantes :

$$\mathbb{V}(X_1-X_2) \;\cancel{=}\; \mathbb{V}(X_1)-\mathbb{V}(X_2)$$

□

c) Établir la relation : $\mathbb{P}([X_1 = X_2]) = \dfrac{p}{1+q}$.

Démonstration.

- Tout d'abord : $[X_1 = X_2] = [X_1 - X_2 = 0]$.
- La famille $([X_2 = k])_{k\in\mathbb{N}^*}$ forme un système complet d'événements.
  Ainsi, par formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X_1-X_2=0]) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_2=k]\cap[X_1-X_2=0]) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_2=k]\cap[X_1-k=0]) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_2=k]\cap[X_1=k]) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_2=k])\;\mathbb{P}([X_1=k]) && \textit{(car X_1 et X_2 sont indépendantes)} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} p\,q^{k-1}\;p\,q^{k-1} \\
&= p^2 \sum_{k=1}^{+\infty} (q^2)^{k-1} \\
&= p^2 \sum_{k=0}^{+\infty} (q^2)^{k} \;=\; p^2\,\frac{1}{1-q^2} && \textit{(car $q^2\in\,]-1,1[$)} \\
&= p^{\cancel{2}}\,\frac{1}{\cancel{(1-q)}(1+q)} \;=\; \frac{p}{1+q}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}([X_1 = X_2]) = \frac{p}{1+q}}$$

□

9. a) Montrer que Z suit la loi géométrique de paramètre $1-q^2$.
En déduire $\mathbb{E}(Z)$, $\mathbb{V}(Z)$ et $\mathbb{E}(T)$.

Démonstration.

- Comme $X_1(\Omega) = X_2(\Omega) = \mathbb{N}^*$ alors : $Z(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$.
- Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
  - × Déterminons d'abord : $\mathbb{P}([Z > k])$.

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([Z>k]) & = & \mathbb{P}([X_1 > k] \cap [X_2 > k]) & \\ & = & \mathbb{P}([X_1 > k]) \times \mathbb{P}([X_2 > k]) & \textit{(car } X_1 \textit{ et } X_2 \textit{ sont indépendantes)} \\ & = & \big(1 - \mathbb{P}([X_1 \leqslant k]\big)\, \big(1 - \mathbb{P}([X_2 \leqslant k]\big) & \\ & = & \big(\cancel{1} - (\cancel{1} - q^k)\big)\, \big(\cancel{1} - (\cancel{1} - q^k)\big) & \textit{(d'après la question } \textbf{1.}\textit{)} \\ & = & q^k\, q^k \;=\; \left(q^2\right)^k & \end{array}$$

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}([Z>k]) = \left(q^2\right)^k}$$

  - × De plus :

$$\begin{array}{rcll} [Z > k-1] & = & [Z \geqslant k] & \textit{(car } Z \textit{ est à valeurs entières)} \\ & = & [Z = k] \cup [Z > k] & \end{array}$$

Les événements $[Z = k]$ et $[Z > k]$ étant incompatibles :

$$\mathbb{P}([Z > k-1]) = \mathbb{P}([Z = k]) + \mathbb{P}([Z > k])$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathbb{P}([Z = k]) = \mathbb{P}([Z > k-1]) - \mathbb{P}([Z > k]).}$$

  - × Deux cas se présentent alors :
    - si $k \geqslant 2$, alors $(k-1, k) \in \left(\mathbb{N}^*\right)^2$. D'où, d'après le 1^er point :

$$\mathbb{P}([Z=k]) \;=\; \left(q^2\right)^{k-1} - \left(q^2\right)^k \;=\; \left(q^2\right)^{k-1} \left(1 - q^2\right)$$

    - si $k = 1$, alors :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([Z=1]) & = & \mathbb{P}(\Omega) - \mathbb{P}([Z > 1]) & \textit{(car } Z(\Omega) \subset \mathbb{N}^* \textit{)} \\ & = & 1 - \left(q^2\right)^1 \;=\; 1 - q^2 & \end{array}$$

Or, on remarque :

$$\left(q^2\right)^{1-1} \left(1 - q^2\right) \;=\; 1 - q^2$$

La formule précédente reste donc valide pour $k = 1$.

Finalement, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{P}([Z=k]) \;=\; \left(q^2\right)^{k-1} \left(1 - q^2\right) \;=\; \Big(1 - \left(1 - q^2\right)\Big)^{k-1} \left(1 - q^2\right)$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } Z \hookrightarrow \mathcal{G}\left(1 - q^2\right).}$$

$$\boxed{\text{De plus : } \mathbb{E}(Z) = \frac{1}{1-q^2} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(Z) = \frac{1 - (1-q^2)}{(1-q^2)^2} = \frac{q^2}{(1-q^2)^2}.}$$

- Enfin, comme $T + Z = X_1 + X_2$, alors :

$$T = X_1 + X_2 - Z$$

La v.a.r. T admet donc une espérance comme combinaison linéaire de v.a.r. qui en admettent une. De plus :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{E}(T) & = & \mathbb{E}(X_1 + X_2 - Z) & \\
& = & \mathbb{E}(X_1 + X_2) - \mathbb{E}(Z) & \textit{(par linéarité de l'espérance)} \\
& = & \dfrac{2}{p} - \dfrac{1}{1-q^2} & \\
& = & \dfrac{2}{1-q} - \dfrac{1}{(1-q)(1+q)} & \\
& = & \dfrac{2\,(1+q) - 1}{1-q^2} \; = \; \dfrac{1+2q}{1-q^2} &
\end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(T) = \frac{1+2q}{1-q^2}}$$

□

b) Soit k un entier de $\mathbb{N}^*$. Justifier l'égalité : $[Z = k] \cup [T = k] = [X_1 = k] \cup [X_2 = k]$.
En déduire la relation suivante : $\mathbb{P}([T = k]) = 2\ \mathbb{P}([X_1 = k]) - \mathbb{P}([Z = k])$.

Démonstration.
Soit $\omega \in \Omega$.

- Tout d'abord :

$$\begin{array}{cl}
& \omega \in [Z = k] \ \cup \ [T = k] \\
\Leftrightarrow & Z(\omega) = k \ \texttt{OU} \ T(\omega) = k \\
\Leftrightarrow & \max(X_1(\omega), X_2(\omega)) = k \ \texttt{OU} \ \min(X_1(\omega), X_2(\omega)) = k
\end{array}$$

Deux cas se présentent :

× si $\max(X_1(\omega), X_2(\omega)) = X_1(\omega)$ alors, $\min(X_1(\omega), X_2(\omega)) = X_2(\omega)$ et :

$$\begin{array}{cl}
& \max(X_1(\omega), X_2(\omega)) = k \ \texttt{OU} \ \min(X_1(\omega), X_2(\omega)) = k \\
\Leftrightarrow & X_2(\omega) = k \ \texttt{OU} \ X_1(\omega) = k
\end{array}$$

× si $\max(X_1(\omega), X_2(\omega)) = X_2(\omega)$, alors :

$$\begin{array}{cl}
& \max(X_1(\omega), X_2(\omega)) = k \ \texttt{OU} \ \min(X_1(\omega), X_2(\omega)) = k \\
\Leftrightarrow & X_1(\omega) = k \ \texttt{OU} \ X_2(\omega) = k
\end{array}$$

On en déduit :

$$\begin{array}{cl}
& \omega \in [Z = k] \ \cup \ [T = k] \\
\Leftrightarrow & X_1(\omega) = k \ \texttt{OU} \ X_2(\omega) = k \\
\Leftrightarrow & \omega \in [X_1 = k] \ \cup \ [X_2 = k]
\end{array}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } [Z = k] \cup [T = k] = [X_1 = k] \cup [X_2 = k]}$$

- De plus :
  - × D'une part :

$$\begin{array}{rcl}\mathbb{P}([Z=k]\cup[T=k]) & = & \mathbb{P}([Z=k])+\mathbb{P}([T=k])-\mathbb{P}([Z=k]\cap[T=k]) \\ & = & \mathbb{P}([Z=k])+\mathbb{P}([T=k])-\mathbb{P}([X_1=k]\cap[X_2=k])\end{array}$$

En effet, on peut démontrer en procédant comme en début de question que :

$$[Z=k]\cap[T=k] \ = \ [X_1=k]\cap[X_2=k]$$

  - × D'autre part :

$$\begin{array}{rll} & \mathbb{P}([X_1=k]\cup[X_2=k]) & \\ = & \mathbb{P}([X_1=k])+\mathbb{P}([X_2=k])-\mathbb{P}([X_1=k]\cap[X_2=k]) & \\ = & 2\,\mathbb{P}([X_1=k])-\mathbb{P}([X_1=k]\cap[X_2=k]) & \textit{(car } X_1 \textit{ et } X_2 \textit{ ont même loi)}\end{array}$$

- D'après ce qui précède :

$$\begin{array}{ll} & \mathbb{P}([Z=k]\ \cup\ [T=k]) \ = \ \mathbb{P}([X_1=k]\ \cup\ [X_2=k]) \\ \text{d'où} & \mathbb{P}([Z=k])+\mathbb{P}([T=k])-\cancel{\mathbb{P}([X_1=k]\cap[X_2=k])} \ = \ 2\,\mathbb{P}([X_1=k])-\cancel{\mathbb{P}([X_1=k]\cap[X_2=k])} \\ \text{et} & \mathbb{P}([T=k]) \ = \ 2\,\mathbb{P}([X_1=k])-\mathbb{P}([Z=k])\end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{P}([T=k]) \ = \ 2\,\mathbb{P}([X_1=k])-\mathbb{P}([Z=k])}$$

Commentaire

- Dans l'énoncé, il est demander de « justifier l'égalité » et non de la démontrer. Cette nuance signifie généralement que des points seront attribués même pour une explication avec les mains.
- Il est pratique pour conclure que de dire que les événements $[T=k]$ et $[Z=k]$ (resp. $[X_1=k]$ et $[X_2=k]$) sont incompatibles. Mais on ne peut en aucun cas affirmer une telle chose !
  Il peut exister $\omega\in\Omega$ tel que $\max(X_1(\omega),X_2(\omega))=k$ et $\min(X_1(\omega),X_2(\omega))=k$.
  Cela se produit pour tout $\omega\in\Omega$ tel que : $X_1(\omega)=X_2(\omega)=k$.

□

c) Établir la formule : $\mathbb{V}(T)=\dfrac{q(2q^2+q+2)}{(1-q^2)^2}$.

Démonstration.

- Tout d'abord, comme $X_1(\Omega)=X_2(\Omega)=\mathbb{N}^*$ alors : $T(\Omega)\subset\mathbb{N}^*$.
- La v.a.r. $T=X_1+X_2-Z$ admet une variance en tant que combinaison linéaire de v.a.r. qui en admettent une.

- Par définition du moment d'ordre 2 :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{E}(T^2) & = & \sum\limits_{k=1}^{+\infty} k^2 \, \mathbb{P}([T=k]) & \\
& = & \sum\limits_{k=1}^{+\infty} k^2 \big(2\,\mathbb{P}([X_1=k]) - \mathbb{P}([Z=k])\big) & \textit{(d'après la question précédente)} \\
& = & 2 \sum\limits_{k=1}^{+\infty} k^2 \, \mathbb{P}([X_1=k]) - \sum\limits_{k=1}^{+\infty} k^2 \, \mathbb{P}([Z=k]) & \\
& = & 2 \, \mathbb{E}(X_1^2) - \mathbb{E}(Z^2) & \\
& = & 2 \, \big(\mathbb{V}(X_1) + (\mathbb{E}(X_1))^2\big) - \big(\mathbb{V}(Z) + (\mathbb{E}(Z))^2\big) & \textit{(par la formule de Kœnig-Huygens)} \\
& = & 2 \, \left(\dfrac{q}{p^2} + \left(\dfrac{1}{p}\right)^2\right) - \left(\dfrac{q^2}{(1-q^2)^2} + \left(\dfrac{1}{1-q^2}\right)^2\right) & \textit{(d'après les questions précédentes)} \\
& = & 2 \, \dfrac{q+1}{p^2} - \dfrac{q^2+1}{(1-q^2)^2} &
\end{array}$$

$$\boxed{T \text{ admet un moment d'ordre 2 et } \mathbb{E}(T^2) = 2 \, \dfrac{q+1}{p^2} - \dfrac{q^2+1}{(1-q^2)^2}.}$$

- Par la formule de Kœnig-Huygens :

$$\begin{array}{rcl}
\mathbb{V}(T) & = & \mathbb{E}(T^2) - \big(\mathbb{E}(T)\big)^2 \\
& = & \left(2 \, \dfrac{q+1}{p^2} - \dfrac{q^2+1}{(1-q^2)^2}\right) - \left(\dfrac{1+2q}{1-q^2}\right)^2 \\
& = & 2 \, \dfrac{q+1}{p^2} - \dfrac{q^2+1}{(1-q^2)^2} - \dfrac{1+4q+4q^2}{(1-q^2)^2} \\
& = & 2 \, \dfrac{q+1}{p^2} - \dfrac{2+4q+5q^2}{(1-q^2)^2} \\
& = & 2 \, \dfrac{q+1}{(1-q)^2} - \dfrac{2+4q+5q^2}{((1-q)\,(1+q))^2} \\
& = & 2 \, \dfrac{(q+1)(1+q)^2}{(1-q)^2\,(1+q)^2} - \dfrac{2+4q+5q^2}{((1-q)\,(1+q))^2} \\
& = & \dfrac{1}{(1-q)^2\,(1+q)^2} \big(2\,(1+q)^3 - (2+4q+5q^2)\big) \\
& = & \dfrac{1}{(1-q)^2\,(1+q)^2} \big(2\,(1+3q+3q^2+q^3) - (2+4q+5q^2)\big) \\
& = & \dfrac{1}{(1-q)^2\,(1+q)^2} \big(2q+q^2+2q^3\big) \ = \ \dfrac{q\,(2+q+2q^2)}{(1-q)^2\,(1+q)^2}
\end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{V}(T) = \dfrac{q\,(2+q+2q^2)}{(1-q)^2\,(1+q)^2}}$$

Commentaire

- Il faut prendre le réflexe de connaître la formule de Kœnig-Huygens dans les deux sens.

$$\begin{array}{rrcl} \text{L'écriture} & \mathbb{V}(X_1) & = & \mathbb{E}(X_1^2) - (\mathbb{E}(X_1))^2 \\ \text{fournit l'égalité} & \mathbb{E}(X_1^2) & = & \mathbb{V}(X_1) + (\mathbb{E}(X_1))^2 \end{array}$$

  C'est cette dernière égalité qui est utilisée dans la démonstration.

- On pouvait aussi calculer $\mathbb{V}(T)$ en s'aidant de l'égalité :

$$T + Z \ = \ X_1 + X_2$$

  En effet :

$$\mathbb{V}(T+Z) \ = \ \mathbb{V}(X_1 + X_2) \ = \ \frac{2\ q}{p^2}$$

  Par ailleurs :

$$\mathbb{V}(T+Z) \ = \ \mathbb{V}(T) + \mathbb{V}(Z) + 2\ \mathrm{Cov}(T, Z)$$

  On en déduit :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{V}(T) & = & \dfrac{2\ q}{p^2} - \mathbb{V}(Z) - 2\ \mathrm{Cov}(T,Z) \\[2mm] & = & \dfrac{2\ q}{p^2} - \dfrac{q^2}{(1-q^2)^2} - 2\ \mathrm{Cov}(T,Z) \end{array}$$

  Par la formule de Kœnig-Huygens :

$$\begin{array}{rcll} \mathrm{Cov}(T,Z) & = & \mathbb{E}(TZ) - \mathbb{E}(T)\ \mathbb{E}(Z) & \\ & = & \mathbb{E}(X_1 X_2) - \mathbb{E}(T)\ \mathbb{E}(Z) & \textit{(car } TZ = X_1 X_2 \textit{ (*))} \\ & = & \mathbb{E}(X_1)\ \mathbb{E}(X_2) - \mathbb{E}(T)\ \mathbb{E}(Z) & \textit{(car } X_1 \textit{ et } X_2 \textit{ sont indépendantes)} \\[2mm] & = & \dfrac{1}{p}\ \dfrac{1}{p} - \dfrac{1+2q}{1-q^2}\ \dfrac{1}{1-q^2} & \\[2mm] & = & \dfrac{1}{p^2} - \dfrac{1+2q}{(1-q^2)^2} & \end{array}$$

  ((*) $TZ = \max(X_1, X_2)\ \min(X_1, X_2) = X_1\ X_2$*)*
  En combinant tous ces résultats, on obtient :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{V}(T) & = & \dfrac{2\ q}{p^2} - \dfrac{q^2}{(1-q^2)^2} - 2\left(\dfrac{1}{p^2} - \dfrac{1+2q}{(1-q^2)^2}\right) \\[2mm] & = & \dfrac{2\ (q-1)}{p^2} + \dfrac{-q^2+4q+2}{(1-q^2)^2} \\[2mm] & = & \dfrac{2\ (q-1)}{(1-q)^2} + \dfrac{-q^2+4q+2}{(1-q^2)^2} \\[2mm] & = & \dfrac{1}{(1-q^2)^2} \left(2\ (q-1)(1+q)^2 - q^2 + 4q + 2\right) \\[2mm] & = & \dfrac{1}{(1-q^2)^2}\ \left(2q + q^2 + 2q^3\right) \ = \ \dfrac{q\ (2+q+2q^2)}{(1-q^2)^2} \end{array}$$

□

10. a) Préciser $(T-Z)(\Omega)$. Exprimer pour tout j de $\mathbb{N}^*$, l'évènement $[Z=j]\cap[Z=T]$ en fonction des évènements $[X_1=j]$ et $[X_2=j]$.
En déduire pour tout j de $\mathbb{N}^*$, l'expression de $\mathbb{P}([Z=j]\cap[Z=T])$.

Démonstration.

- Rappelons que : $T-Z=|X_1-X_2|$.
Tout d'abord, comme $X_1(\Omega)=X_2(\Omega)=\mathbb{N}^*$ alors :

$$\begin{array}{rcl} (X_1-X_2)(\Omega) & = & \{X_1(\omega)-X_2(\omega) \mid \omega\in\Omega\} \\ & \subset & \{i-j \mid (i,j)\in(\mathbb{N}^*)^2\} \ = \ \mathbb{Z} \end{array}$$

Ainsi, $(|X_1-X_2|)(\Omega)\subset\mathbb{Z}\cap\mathbb{R}_+=\mathbb{N}$.

$$\boxed{(T-Z)(\Omega)\subset\mathbb{N}}$$

- Soit $j\in\mathbb{N}^*$.

$$\begin{array}{rcl} [Z=j] \ \cap \ [Z=T] & = & [\min(X_1,X_2)=j] \ \cap \ [\min(X_1,X_2)=\max(X_1,X_2)] \\ & = & [\min(X_1,X_2)=j] \ \cap \ [\max(X_1,X_2)=j] \\ & = & [X_1=j] \ \cap \ [X_2=j] \end{array}$$

$$\boxed{\forall j\in\mathbb{N}^*, [Z=j] \ \cap \ [Z=T]=[X_1=j] \ \cap \ [X_2=j]}$$

- Ainsi :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([Z=j] \ \cap \ [Z=T]) & = & \mathbb{P}([X_1=j] \ \cap \ [X_2=j]) & \\ & = & \mathbb{P}([X_1=j]) \ \times \ \mathbb{P}([X_2=j]) & \textit{(car } X_1 \textit{ et } X_2 \textit{ sont indépendantes)} \\ & = & p\ q^{j-1}\times p\ q^{j-1} \ = \ p^2\ q^{2j-2} & \end{array}$$

$$\boxed{\forall j\in\mathbb{N}^*, \mathbb{P}([Z=j] \ \cap \ [Z=T])=p^2\ q^{2j-2}}$$

□

b) Montrer que pour tout couple (j,l) de $(\mathbb{N}^*)^2$, on a : $\mathbb{P}([Z=j]\cap[T-Z=l])=2p^2q^{2j+l-2}$.

Démonstration.

- Soit $(j,l)\in(\mathbb{N}^*)^2$.

$$\begin{array}{rcl} [Z=j] \ \cap \ [T-Z=l] & = & [Z=j] \ \cap \ [T-j=l] \\ & = & [Z=j] \ \cap \ [T=j+l] \\ & = & [\min(X_1,X_2)=j] \ \cap \ [\max(X_1,X_2)=j+l] \\ & = & \big([X_1=j]\cap[X_2=j+l]\big) \ \cup \ \big([X_1=j+l]\cap[X_2=j]\big) \end{array}$$

Il s'agit d'une réunion de deux événements incompatibles. En effet :

$$\begin{array}{rl} & \big([X_1=j]\cap[X_2=j+l]\big) \ \cap \ \big([X_1=j+l]\cap[X_2=j]\big) \\ = & \big([X_1=j]\cap[X_1=j+l]\big)\cap\big([X_2=j]\cap[X_2=j+l]\big) \\ = & \varnothing \ \cap \ \varnothing \ = \ \varnothing \quad \textit{(car } l\neq 0\textit{)} \end{array}$$

- Ainsi :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}([Z=j] \ \cap \ [T-Z=l]) \\
= \ & \mathbb{P}\big(\,[X_1=j] \cap [X_2=j+l]\,\big) \ + \ \mathbb{P}\big(\,[X_1=j+l] \cap [X_2=j]\,\big) \\
= \ & \mathbb{P}\big(\,[X_1=j]\,\big) \times \mathbb{P}([X_2=j+l]\,\big) \ + \ \mathbb{P}\big(\,[X_1=j+l]\,\big) \times \mathbb{P}\big(\,[X_2=j]\,\big) && \textit{(car } X_1 \textit{ et } X_2 \textit{ sont indépdendantes)} \\
= \ & p\ q^{j-1} \times p\ q^{j+l-1} \ + \ p\ q^{j+l-1} \times p\ q^{j-1} \\
= \ & p^2\ q^{2j+l-2} + p^2\ q^{2j+l-2} \ = \ 2\ p^2\ q^{2j+l-2}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall (j,l) \in (\mathbb{N}^*)^2,\ \mathbb{P}([Z=j] \ \cap \ [T-Z=l]) = 2\ p^2\ q^{2j+l-2}}$$

□

c) Montrer que pour tout k de $\mathbb{Z}$, $\mathbb{P}([X_1-X_2=k]) = \dfrac{pq^{|k|}}{1+q}$.
(on distinguera trois cas : $k=0$, $k>0$ et $k<0$)

Démonstration.
Soit $k \in \mathbb{Z}$. Trois cas se présentent.

- Si $k=0$:

$$\mathbb{P}([X_1-X_2=k]) = \mathbb{P}([X_1-X_2=0]) = \mathbb{P}([X_1=X_2]) = \frac{p}{1+q} = \frac{pq^0}{1+q}$$

- Si $k>0$:
La famille $([X_2=i])_{i\in\mathbb{N}^*}$ forme un système complet d'événements.
Ainsi, par la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X_1-X_2=k]) \ &= \ \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_2=i] \ \cap \ [X_1-X_2=k]) \\
&= \ \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_2=i] \ \cap \ [X_1-i=k]) \\
&= \ \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_2=i] \ \cap \ [X_1=i+k]) \\
&= \ \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_2=i]) \ \times \ \mathbb{P}([X_1=i+k]) && \textit{(car } X_1 \textit{ et } X_2 \textit{ sont indépendantes)} \\
&= \ \sum_{i=1}^{+\infty} p\ q^{i-1} \ \times \ p\ q^{i+k-1} \\
&= \ p^2\ q^k \sum_{i=1}^{+\infty} q^{2i-2} \ = \ p^2\ q^k \sum_{i=1}^{+\infty} \left(q^2\right)^{i-1} \\
&= \ p^2\ q^k \sum_{i=0}^{+\infty} \left(q^2\right)^{i} && \textit{(par décalage d'indice)} \\
&= \ p^2\ q^k\ \frac{1}{1-q^2} \ = \ p^{\cancel{2}}\ q^k\ \frac{1}{\cancel{(1-q)}\ (1+q)} && \textit{(car } q^2 \in \,]-1,1[\textit{)} \\
&= \ \frac{p\ q^k}{1+q} \ = \ \frac{p\ q^{|k|}}{1+q}
\end{aligned}$$

- Si $k < 0$:

  On procède de la même manière que dans le point précédent. On obtient :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{P}([X_1 - X_2 = k]) & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_2 = i]) \times \mathbb{P}([X_1 = i+k]) & \\
& = & \displaystyle\sum_{\substack{i=1 \\ \text{tel que } i+k \in \mathbb{N}^*}}^{+\infty} \mathbb{P}([X_2 = i]) \times \mathbb{P}([X_1 = i+k]) & \\
& + & \displaystyle\sum_{\substack{i=1 \\ \text{tel que } i+k \notin \mathbb{N}^*}}^{+\infty} \mathbb{P}([X_2 = i]) \times \cancel{\mathbb{P}([X_1 = i+k])} & \textit{(}[X_1 = i+k] = \varnothing \\ & & & \textit{car } i+k \notin \mathbb{N}^* \textit{)} \\
& = & \displaystyle\sum_{i=-k+1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_2 = i]) \times \mathbb{P}([X_1 = i+k]) & \left(\textit{car} \quad \begin{array}{rl} & i+k \geqslant 1 \\ \Leftrightarrow & i \geqslant -k+1 \end{array}\right) \\
& = & \displaystyle\sum_{i=-k+1}^{+\infty} p\ q^{i-1} \times p\ q^{i+k-1} & \\
& = & \displaystyle\sum_{i=1}^{+\infty} p\ q^{i-k-1} \times p\ q^{i-1} & \textit{(par décalage d'indice)} \\
& = & p^2\ q^{-k} \displaystyle\sum_{i=1}^{+\infty} q^{2i-2} & \\
& = & \dfrac{p^2\ q^{-k}}{(1-q)(1+q)} \ = \ \dfrac{p\ q^{|k|}}{1+q} & \textit{(en procédant comme} \\ & & & \textit{au point précédent)}
\end{array}$$

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{Z},\ \mathbb{P}([X_1 - X_2 = k]) = \frac{p\ q^{|k|}}{1+q}}$$

□

d) En déduire la loi de la variable aléatoire $|X_1 - X_2|$.

Démonstration.

- Rappelons que : $T - Z = |X_1 - X_2|$.

$$\boxed{(|X_1 - X_2|)(\Omega) \subset \mathbb{N}}$$

- Soit $k \in \mathbb{N}$. Remarquons tout d'abord :

$$[\ |X_1 - X_2| = k] \ = \ [X_1 - X_2 = k] \ \cup \ [X_1 - X_2 = -k]$$

  Deux cas se présentent :

  × si $k \neq 0$, alors les événements $[X_1 - X_2 = k]$ et $[X_1 - X_2 = -k]$ sont incompatibles. Ainsi :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{P}([\ |X_1 - X_2| = k]) & = & \mathbb{P}([X_1 - X_2 = k]) + \mathbb{P}([X_1 - X_2 = -k]) & \\
& = & \dfrac{p\ q^k}{1+q} + \dfrac{p\ q^k}{1+q} \ = \ 2\ \dfrac{p\ q^k}{1+q} & \textit{(car } |k| = k \textit{)}
\end{array}$$

  × si $k = 0$:

$$\mathbb{P}([\ |X_1 - X_2| = 0]) \ = \ \mathbb{P}([X_1 - X_2 = 0]) \ = \ \frac{p}{1+q}$$

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}([\ |X_1 - X_2| = k]) = 2\ \frac{p\ q^k}{1+q} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}([\ |X_1 - X_2| = 0]) = \frac{p}{1+q}}$$

□

e) Établir à l'aide des questions précédentes que les variables Z et $T - Z$ sont indépendantes.

Démonstration.
Il s'agit de démontrer :

$$\forall j \in Z(\Omega),\ \forall l \in (T-Z)(\Omega),\ \mathbb{P}([Z=j] \cap [T-Z=l]) \ = \ \mathbb{P}([Z=j]) \times \mathbb{P}([T-Z=l])$$

avec $Z(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$ et $(T-Z)(\Omega) \subset \mathbb{N}$.

- Soit $(j,l) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Comme $T - Z = |X_1 - X_2|$, alors :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([Z=j]) \times \mathbb{P}([T-Z=l]) &= \mathbb{P}([Z=j]) \times \mathbb{P}([|X_1-X_2|=l]) \\
&= \left(q^2\right)^{j-1} (1-q^2) \times 2\ \frac{p\ q^l}{1+q} && \textit{(d'après les questions précédentes)} \\
&= q^{2j-2}\ (1-q)\ \cancel{(1+q)} \times 2\ \frac{p\ q^l}{\cancel{1+q}} \\
&= q^{2j-2}\ p \times 2p\ q^l \ = \ 2\ p^2\ q^{2j+l-2} \\
&= \mathbb{P}([Z=j]\ \cap\ [T-Z=l]) && \textit{(d'après \textbf{3.c)})}
\end{aligned}$$

- Il reste à étudier le cas où $j \in \mathbb{N}^*$ et $l = 0$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([Z=j]) \times \mathbb{P}([T-Z=0]) &= \mathbb{P}([Z=j]) \times \mathbb{P}([|X_1-X_2|=0]) \\
&= \left(q^2\right)^{j-1} (1-q^2) \times \frac{p}{1+q} && \textit{(d'après les questions précédentes)} \\
&= q^{2j-2}\ (1-q)\ \cancel{(1+q)} \times \frac{p}{\cancel{1+q}} \\
&= q^{2j-2}\ p \times p \ = \ p^2\ q^{2j-2} \\
&= \mathbb{P}([Z=j]\ \cap\ [T-Z=l]) && \textit{(d'après \textbf{3.a)})}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Les variables } Z \text{ et } T-Z \text{ sont donc indépendantes.}}$$

□

11. a) À l'aide du résultat de la question ***10.e)***, calculer $\mathrm{Cov}(Z,T)$.
Les variables Z et T sont-elles indépendantes ?

Démonstration.

- D'après la question ***10.e)***, les variables Z et $T-Z$ sont indépendantes. On en déduit :

$$\mathrm{Cov}(Z, T-Z) = 0$$

Or, par linéarité gauche de l'opérateur Cov :

$$\underbrace{\mathrm{Cov}(Z,T-Z)}_{0} \ = \ \mathrm{Cov}(Z,T) \ - \ \underbrace{\mathrm{Cov}(Z,Z)}_{\mathbb{V}(Z)}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathrm{Cov}(Z,T) \ = \ \mathbb{V}(Z) \ = \ \frac{q^2}{(1-q^2)^2}}$$

- Comme $q \neq 0$, $\mathrm{Cov}(Z,T) \neq 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi, les v.a.r. } Z \text{ et } T \text{ ne sont pas indépendantes.}}$$

□

b) Calculer en fonction de q, le coefficient de corrélation linéaire ρ de Z et T.

Démonstration.
Par définition :

$$\begin{aligned}
\rho(Z,T) &= \frac{\mathrm{Cov}(Z,T)}{\sqrt{\mathbb{V}(Z)}\ \sqrt{\mathbb{V}(T)}} \\
&= \frac{\mathbb{V}(Z)}{\sqrt{\mathbb{V}(Z)}\ \sqrt{\mathbb{V}(T)}} = \frac{\cancel{\sqrt{\mathbb{V}(Z)}}\ \sqrt{\mathbb{V}(Z)}}{\cancel{\sqrt{\mathbb{V}(Z)}}\ \sqrt{\mathbb{V}(T)}} \\
&= \sqrt{\frac{\frac{q^2}{(1-q^2)^2}}{\frac{q\ (2+q+2q^2)}{(1-q^2)^2}}} = \sqrt{\frac{q^2}{\cancel{(1-q^2)^2}}\ \frac{\cancel{(1-q^2)^2}}{q\ (2+q+2q^2)}} \\
&= \sqrt{\frac{q}{2+q+2q^2}}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\rho(Z,T) = \sqrt{\frac{q}{2+q+2q^2}}}$$

□

c) Déterminer la loi de probabilité du couple (Z,T).

Démonstration.

- On rappelle que $Z(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$ et $T(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$.
- Soit $(i,j) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Trois cas se présentent :
  - × si $i < j$: alors $[Z = j] \cap [T = i] = \varnothing$.
    En effet, $Z = \min(X_1, X_2) \leqslant \max(X_1, X_2) = T$.

$$\boxed{\text{Si } i < j,\ \mathbb{P}([Z = j] \cap [T = i]) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0}$$

  - × si $i = j$: alors $[Z = j] \cap [T = j] = [X_1 = j] \cap [X_2 = j]$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([Z = j] \cap [T = j]) &= \mathbb{P}([X_1 = j] \cap [X_2 = j]) \\
&= \mathbb{P}([X_1 = j]) \times \mathbb{P}([X_2 = j]) && \textit{(car } X_1 \textit{ et } X_2 \textit{ sont indépendantes)} \\
&= p\ q^{j-1} \times p\ q^{j-1} = p^2\ q^{2j-2}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}([Z = j] \cap [T = j]) = p^2\ q^{2j-2}}$$

  - × si $i > j$: alors $[Z = j] \cap [T = i] = ([X_1 = j] \cap [X_2 = i]) \cup ([X_1 = i] \cap [X_2 = j])$.

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}([Z = j] \cap [T = i]) \\
= {}& \mathbb{P}\big(\, ([X_1 = j] \cap [X_2 = i]) \cup ([X_1 = i] \cap [X_2 = j])\, \big) \\
= {}& \mathbb{P}([X_1 = j] \cap [X_2 = i]) + \mathbb{P}([X_1 = i] \cap [X_2 = j]) && \textit{(car } [X_1 = j] \cap [X_2 = i] \textit{ et } [X_1 = i] \cap [X_2 = j] \textit{ sont incompatibles)} \\
= {}& \mathbb{P}([X_1 = j]) \times \mathbb{P}([X_2 = i]) + \mathbb{P}([X_1 = i]) \times \mathbb{P}([X_2 = j]) && \textit{(car } X_1 \textit{ et } X_2 \textit{ sont indépendantes)} \\
= {}& p\ q^{j-1} \times p\ q^{i-1} + p\ q^{i-1} \times p\ q^{j-1} = 2\ p^2\ q^{i+j-2}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Si } i > j,\ \mathbb{P}([Z = j] \cap [T = i]) = 2\ p^2\ q^{i+j-2}.}$$

□

d) Déterminer pour tout j de $\mathbb{N}^*$, la loi de probabilité conditionnelle de T sachant l'évènement $[Z = j]$.

Démonstration.
Soit $j \in \mathbb{N}^*$.

- Rappelons que $T(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$.
- Soit $i \in \mathbb{N}^*$.

$$\mathbb{P}_{[Z=j]}([T = i]) = \frac{\mathbb{P}([Z = j] \cap [T = i])}{\mathbb{P}([Z = j])} = \frac{\mathbb{P}([Z = j] \cap [T = i])}{(q^2)^{j-1}\ (1-q^2)}$$

La loi du couple (Z, T) étant donnée par cas, trois cas se présentent encore ici :

× si $i < j$: alors $\mathbb{P}([Z = j] \cap [T = i]) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$.

$$\boxed{\text{Si } i < j,\ \mathbb{P}_{[Z=j]}([T = i]) = 0.}$$

× si $i = j$: alors $\mathbb{P}([Z = j] \cap [T = j]) = p^2\ q^{2j-2}$.

$$\mathbb{P}_{[Z=j]}([T = j]) = \frac{\mathbb{P}([Z = j] \cap [T = j])}{(q^2)^{j-1}\ (1-q^2)} = \frac{p^2\ \cancel{q^{2j-2}}}{\cancel{(q^2)^{j-1}}\ (1-q^2)} = \frac{p^{\cancel{2}}}{\cancel{(1-q)}\ (1+q)} = \frac{p}{1+q}$$

$$\boxed{\mathbb{P}_{[Z=j]}([T = j]) = \frac{p}{1+q}}$$

× si $i > j$: alors $\mathbb{P}([Z = j] \cap [T = i]) = 2\ p^2 q^{i+j-2}$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{[Z=j]}([T = i]) &= \frac{\mathbb{P}([Z = j] \cap [T = j])}{(q^2)^{j-1}\ (1-q^2)} \\
&= \frac{2\ p^2\ q^{i+j-2}}{(q^2)^{j-1}\ (1-q^2)} \\
&= \frac{2\ p^2 \cancel{q^{j-2}}\ q^i}{q^j\ \cancel{q^{j-2}}\ (1-q^2)} \\
&= \frac{2\ p^{\cancel{2}}\ q^i}{q^j\ \cancel{(1-q)}\ (1+q)} \\
&= \frac{2\ p\ q^i}{q^j (1+q)} = \frac{2\ p\ q^{i-j}}{1+q}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Si } i > j,\ \mathbb{P}_{[Z=j]}([T = i]) = \frac{2\ p\ q^{i-j}}{1+q}.}$$

□

e) Soit j un élément de $\mathbb{N}^*$. On suppose qu'il existe une variable aléatoire D_j à valeur dans $\mathbb{N}^*$, dont la loi de probabilité est la loi conditionnelle de T sachant l'évènement $[Z = j]$.
Calculer $\mathbb{E}(D_j)$.

Démonstration.

- La v.a.r. D_j admet une espérance si et seulement si la série $\sum\limits_{i \geqslant 1} i\ \mathbb{P}_{[Z=j]}([T = i])$ est absolument convergente. Cette série étant à termes positifs, cela revient à démontrer qu'elle est convergente.

- Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{array}{cl} & \sum\limits_{i=1}^{N} i\ \mathbb{P}_{[Z=j]}([T=i]) \\ = & \sum\limits_{i=1}^{j-1} i\ \mathbb{P}_{[Z=j]}([T=i]) \ + \ \sum\limits_{i=j}^{j} i\ \mathbb{P}_{[Z=j]}([T=i]) \ + \ \sum\limits_{i=j+1}^{N} i\ \mathbb{P}_{[Z=j]}([T=i]) \quad \textit{(par relation de Chasles en supposant } N > j\textit{)} \\ = & 0 \ + \ \dfrac{p}{1+q} \ + \ \sum\limits_{i=j+1}^{N} i\ \dfrac{2\ p\ q^{i-j}}{1+q} \quad \textit{(d'après la question précédente)} \end{array}$$

- Étudions en particulier la somme de droite :

$$\begin{array}{rcl} \sum\limits_{i=j+1}^{N} i\ \dfrac{2\ p\ q^{i-j}}{1+q} & = & \dfrac{2\ p}{1+q} \sum\limits_{i=j+1}^{N} i\ q^{i-j} \\ & = & \dfrac{2\ p}{1+q} \sum\limits_{i=1}^{N-j} i\ q^{(i+j)-j} \quad \textit{(par décalage d'indice)} \\ & = & \dfrac{2\ p}{1+q} \sum\limits_{i=1}^{N-j} i\ q^{i} \ = \ \dfrac{2\ p\ q}{1+q} \sum\limits_{i=1}^{N-j} i\ q^{i-1} \end{array}$$

On reconnaît la somme partielle (d'ordre $N-j$) d'une série géométrique dérivée première de raison $q \in\ ]-1,1[$. Elle est donc convergente.

- Ainsi, la série $\sum\limits_{i \geqslant 1} i\ \mathbb{P}_{[Z=j]}([T=i])$ est convergente et par passage à la limite :

$$\begin{array}{rcl} \sum\limits_{i=1}^{+\infty} i\ \mathbb{P}_{[Z=j]}([T=i]) & = & \dfrac{p}{1+q} + \dfrac{2\ p\ q}{1+q} \sum\limits_{i=1}^{+\infty} i\ q^{i-1} \\ & = & \dfrac{p}{1+q} + \dfrac{2\ \cancel{p}\ q}{1+q}\ \dfrac{1}{(1-q)^{\cancel{2}}} \\ & = & \dfrac{1}{(1+q)(1-q)} \left(p\ (1-q) + 2\ q\right) \\ & = & \dfrac{1}{1-q^2} \left((1-q)^2 + 2\ q\right) \ = \ \dfrac{1+q^2}{1-q^2} \end{array}$$

$$\boxed{\text{La variable } D_j \text{ admet une espérance et } \mathbb{E}(D_j) = \dfrac{1+q^2}{1-q^2}}$$

□

Commentaire

- Dans cette question, on détermine $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} i\ \mathbb{P}_{[Z=j]}([T=i])$. Cette écriture est très proche de l'écriture de $\mathbb{E}(T)$: on a simplement remplacé ici l'application probabilité $\mathbb{P}$ par l'application probabilité $\mathbb{P}_{[Z=j]}$. Autrement dit, on détermine l'espérance de T sachant que l'événement $[Z=j]$ est réalisé.
- Cet objet est relativement classique en mathématiques. Il s'agit de l'espérance conditionnelle de la variable T relativement à l'événement $[Z=j]$. Elle se note : $\mathbb{E}(T \mid [Z=j])$.
(cette notation n'est pas très heureuse au vu de celle des probabilités conditionnelles)
- On peut noter que ces calculs d'espérances conditionnelles permettent de déterminer l'espérance. Sous réserve d'existence des objets considérés :
$$\mathbb{E}(T) \ = \ \sum_{j=1}^{+\infty} \mathbb{P}([Z=j])\ \mathbb{E}(T \mid [Z=j])$$
Il faut considérer cette égalité comme une formule des probabilités totales (qui est à la base de ce résultat) adaptée à la notion d'espérance.

Partie III. Convergences

Dans les questions 1 à 4, λ désigne un paramètre réel strictement positif, inconnu.
Pour n élément de $\mathbb{N}^*$, on considère un n-échantillon $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ de variables aléatoires à valeurs strictement positives, indépendantes, de même loi exponentielle de paramètre λ.
On pose pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ et $J_n = \lambda S_n$.

12. Calculer pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{E}(S_n)$, $\mathbb{V}(S_n)$, $\mathbb{E}(J_n)$ et $\mathbb{V}(J_n)$.

Démonstration.

- Les v.a.r. S_n et J_n admettent une variance (et donc une espérance) en tant que combinaison linéaire de v.a.r. qui en admettent une.
- Pour la v.a.r. S_n :
  - tout d'abord :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{E}(S_n) & = & \mathbb{E}\left(\sum\limits_{k=1}^{n} X_k\right) & \\ & = & \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k) & \textit{(par linéarité de l'espérance)} \\ & = & \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\lambda} & \textit{(car : } \forall k \in [\![1, n]\!], X_k \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)\textit{)} \\ & = & \dfrac{n}{\lambda} & \end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(S_n) = \dfrac{n}{\lambda}}$$

  - ensuite :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{V}(S_n) & = & \mathbb{V}\left(\sum\limits_{k=1}^{n} X_k\right) & \\ & = & \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{V}(X_k) & \textit{(car } X_1, \ldots, X_n \textit{ indépendantes)} \\ & = & \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\lambda^2} & \textit{(car : } \forall k \in [\![1, n]\!], X_k \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)\textit{)} \\ & = & \dfrac{n}{\lambda^2} & \end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{V}(S_n) = \dfrac{n}{\lambda^2}}$$

- Pour la v.a.r. J_n :
  - par linéarité de l'espérance :

$$\mathbb{E}(J_n) = \mathbb{E}(\lambda\, S_n) = \lambda\, \mathbb{E}(S_n) = \cancel{\lambda} \times \dfrac{n}{\cancel{\lambda}}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathbb{E}(J_n) = n.}$$

  - de plus :

$$\mathbb{V}(J_n) = \mathbb{V}(\lambda\, S_n) = \lambda^2\, \mathbb{V}(S_n) = \cancel{\lambda^2} \times \dfrac{n}{\cancel{\lambda^2}}$$

$$\boxed{\text{D'où : } \mathbb{V}(J_n) = n.}$$

□

13. On admet qu'une densité f_{J_n} de J_n est donnée par $f_{J_n}(x) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{e}^{-x} x^{n-1}}{(n-1)!} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$.

a) À l'aide du théorème de transfert, établir pour tout n supérieur ou égal à 3, l'existence de $\mathbb{E}\left(\dfrac{1}{J_n}\right)$ et de $\mathbb{E}\left(\dfrac{1}{J_n^2}\right)$, et donner leur valeurs respectives.

Démonstration.
Soit $n \in [\![3, +\infty[\![$.

- Par théorème de transfert, la v.a.r. $\dfrac{1}{J_n}$ admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x}\, f_{J_n}(x)\, dx$ est absolument convergente.
- Or, pour tout $x \in]0, +\infty[$: $\dfrac{1}{x}\, f_{J_n}(x) \geqslant 0$.
  Il suffit donc de démontrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x}\, f_{J_n}(x)\, dx$ est convergente.
- Soit $x \in]0, +\infty[$.
  $$\frac{1}{x}\, f_{J_n}(x) = \frac{1}{x} \times \frac{\mathrm{e}^{-x}\, x^{n-1}}{(n-1)!} = \frac{1}{(n-1)!}\, x^{n-2}\, \mathrm{e}^{-x}$$
  Or, comme $n-2 \in \mathbb{N}$, d'après ***1.a)***, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^{n-2}\, \mathrm{e}^{-x}\, dx$ est convergente.
  $$\boxed{\text{Ainsi, la v.a.r. } \frac{1}{J_n} \text{ admet une espérance.}}$$
- De plus :
  $$\mathbb{E}\left(\frac{1}{J_n}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x}\, f_{J_n}(x)\, dx = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^{+\infty} x^{n-2}\, \mathrm{e}^{-x}\, dx = \frac{1}{(n-1)!}\, I_{n-2}$$
  $$\boxed{\text{Comme } n-2 \in \mathbb{N}, \text{ d'après } \textbf{\textit{1.b)}} : \mathbb{E}\left(\frac{1}{J_n}\right) = \frac{1}{(n-1)!} \times (n-2)! = \frac{1}{n-1}.}$$
- Par théorème de transfert, la v.a.r. $\dfrac{1}{J_n^2}$ admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, f_{J_n}(x)\, dx$ est absolument convergente.
- Or, pour tout $x \in]0, +\infty[$: $\dfrac{1}{x^2}\, f_{J_n}(x) \geqslant 0$.
  Il suffit donc de démontrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, f_{J_n}(x)\, dx$ est convergente.
- Soit $x \in]0, +\infty[$.
  $$\frac{1}{x^2}\, f_{J_n}(x) = \frac{1}{x^2} \times \frac{\mathrm{e}^{-x}\, x^{n-1}}{(n-1)!} = \frac{1}{(n-1)!}\, x^{n-3}\, \mathrm{e}^{-x}$$
  Or, comme $n-3 \in \mathbb{N}$, d'après ***1.a)***, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^{n-3}\, \mathrm{e}^{-x}\, dx$ est convergente.
  $$\boxed{\text{Ainsi, la v.a.r. } \frac{1}{J_n^2} \text{ admet une espérance.}}$$

- De plus :

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{J_n^2}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, f_{J_n}(x)\, dx = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^{+\infty} x^{n-3}\,\mathrm{e}^{-x}\, dx = \frac{1}{(n-1)!}\, I_{n-3}$$

Comme $n-3 \in \mathbb{N}$, d'après ***1.b)*** : $\mathbb{E}\left(\dfrac{1}{J_n^2}\right) = \dfrac{1}{(n-1)!} \times (n-3)! = \dfrac{1}{(n-1)\,(n-2)}$.

□

b) On pose pour tout n supérieur ou égal à 3 : $\widehat{\lambda_n} = \dfrac{n}{S_n}$. Justifier que $\widehat{\lambda_n}$ est un estimateur de λ. Est-il sans biais ? Calculer la limite, lorsque n tend vers $+\infty$, du risque quadratique associé à $\widehat{\lambda_n}$ en λ.

Démonstration.
Soit $n \in [\![3, +\infty[\![$.

- La v.a.r. $\widehat{\lambda_n} = \dfrac{n}{S_n} = \dfrac{n}{\sum\limits_{k=1}^{n} X_k}$ s'exprime :
  - × à l'aide du n-échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$,
  - × sans mention du paramètre λ.

La v.a.r. $\widehat{\lambda_n}$ est donc un estimateur de λ.

- On remarque :

$$\widehat{\lambda_n} = n \times \frac{1}{S_n} = n \times \frac{1}{\frac{J_n}{\lambda}} = n\,\lambda \times \frac{1}{J_n}$$

Or, d'après la question précédente, la v.a.r. $\dfrac{1}{J_n}$ admet un moment d'ordre 2 et donc une variance. On en déduit que la v.a.r. $\widehat{\lambda_n}$ admet une variance (et donc une espérance) en tant que transformée linéaire de $\dfrac{1}{J_n}$ qui en admet une.

- De plus :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_\lambda\left(\widehat{\lambda_n}\right) &= \mathbb{E}_\lambda\left(n\,\lambda \times \frac{1}{J_n}\right) \\ &= n\,\lambda\,\mathbb{E}_\lambda\left(\frac{1}{J_n}\right) && \textit{(par linéarité de l'espérance)} \\ &= n\,\lambda\,\frac{1}{n-1} && \textit{d'après } \textbf{\textit{13.a)}} \end{aligned}$$

Comme $n \geqslant 3$, alors : $\mathbb{E}_\lambda\left(\widehat{\lambda_n}\right) = \dfrac{n}{n-1}\,\lambda \neq \lambda$.
La v.a.r. $\widehat{\lambda_n}$ n'est donc pas un estimateur sans biais de λ.

- Par décomposition biais-variance :

$$\begin{aligned} r_\lambda\left(\widehat{\lambda_n}\right) &= \mathbb{V}_\lambda\left(\widehat{\lambda_n}\right) + \left(b_\lambda\left(\widehat{\lambda_n}\right)\right)^2 \\ &= \mathbb{V}_\lambda\left(n\,\lambda \times \frac{1}{J_n}\right) + \left(\mathbb{E}_\lambda\left(\widehat{\lambda_n}\right) - \lambda\right)^2 \\ &= n^2\,\lambda^2\,\mathbb{V}_\lambda\left(\frac{1}{J_n}\right) + \left(\frac{n}{n-1}\,\lambda - \lambda\right)^2 \\ &= n^2\,\lambda^2\,\mathbb{V}_\lambda\left(\frac{1}{J_n}\right) + \left(\frac{1}{n-1}\,\lambda\right)^2 \end{aligned}$$

Or, par formule de Koenig-Huygens :

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}_\lambda\left(\frac{1}{J_n}\right) &= \mathbb{E}_\lambda\left(\frac{1}{J_n^2}\right) - \left(\mathbb{E}_\lambda\left(\frac{1}{J_n}\right)\right)^2 \\
&= \frac{1}{(n-1)\,(n-2)} - \frac{1}{(n-1)^2} \qquad \textit{(d'après } \textbf{\textit{13.a)}}\textit{)} \\
&= \frac{n-1-(n-2)}{(n-1)^2\,(n-2)} = \frac{1}{(n-1)^2\,(n-2)}
\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
r_\lambda\left(\widehat{\lambda_n}\right) &= \frac{n^2}{(n-1)^2\,(n-2)}\ \lambda^2 + \frac{1}{(n-1)^2}\ \lambda^2 \\
&= \frac{n^2+(n-2)}{(n-1)^2\,(n-2)}\ \lambda^2 \\
&= \frac{\cancel{(n-1)}\,(n+2)}{(n-1)^{\cancel{2}}\,(n-2)}\ \lambda^2 \\
&= \frac{n+2}{(n-1)\,(n-2)}\ \lambda^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On obtient alors : } \lim_{n\to+\infty} r_\lambda\left(\widehat{\lambda_n}\right) = 0.}$$

Commentaire

Rappelons que l'on a le résultat suivant :

$$\lim_{n\to+\infty} r_\lambda\left(\widehat{\lambda_n}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \widehat{\lambda_n} \text{ est un estimateur convergent de } \lambda$$

Ainsi, la v.a.r. $\widehat{\lambda_n}$ est un estimateur convergent de λ.

□

14. Dans cette question, on veut déterminer un intervalle de confiance du paramètre λ au risque α. On note Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite, et u_α le réel strictement positif tel que $\Phi(u_\alpha) = 1 - \dfrac{\alpha}{2}$.

a) Énoncer le théorème de la limite centrée. En déduire que la variable aléatoire N_n définie par $N_n = \lambda\ \dfrac{S_n}{\sqrt{n}} - \sqrt{n}$ converge en loi vers la loi normale centrée réduite.

Démonstration.

- Énonçons le théorème central limite.

  Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.r. :
  - × indépendantes,
  - × de même loi,
  - × de même espérance m,
  - × et de même variance σ^2 **non nulle**.

  Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note :

  $$S_n = X_1 + \cdots + X_n \quad \text{et} \quad S_n^* = \frac{S_n - nm}{\sigma\sqrt{n}}$$

  Alors : $S_n^* \underset{n\to+\infty}{\overset{\mathscr{L}}{\longrightarrow}} Z$ où $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$.

- Démontrons : $S_n^* = N_n$.

$$\begin{aligned} S_n^* &= \frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{\sqrt{\mathbb{V}(S_n)}} \\ &= \frac{S_n - \frac{n}{\lambda}}{\sqrt{\frac{n}{\lambda^2}}} && \textit{(d'après \textbf{12.})} \\ &= \frac{\cancel{\frac{1}{\lambda}}\ \lambda\, S_n - n}{\cancel{\frac{1}{\lambda}}\ \sqrt{n}} \\ &= \lambda\, \frac{S_n}{\sqrt{n}} - \sqrt{n} \ = \ N_n \end{aligned}$$

$$\boxed{S_n^* = N_n}$$

- La suite $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.r. :
  - × indépendantes,
  - × de même loi $\mathcal{E}(\lambda)$,
  - × de même variance $\dfrac{1}{\lambda^2}$ **non nulle**.

$$\boxed{\text{Par théorème central limite : } N_n \underset{n\to+\infty}{\overset{\mathscr{L}}{\longrightarrow}} Z \quad \text{où} \quad Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1).}$$

□

b) En déduire que pour n assez grand, on a approximativement : $\mathbb{P}\big([-u_\alpha \leqslant N_n \leqslant u_\alpha]\big) = 1-\alpha$.

Démonstration.
Comme $N_n \hookrightarrow Z$, alors :

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\big([-u_\alpha \leqslant N_n \leqslant u_\alpha]\big) &= \mathbb{P}\big([-u_\alpha \leqslant Z \leqslant u_\alpha]\big) \\ &= \Phi(u_\alpha) - \Phi(-u_\alpha) \\ &= \Phi(u_\alpha) - \big(1 - \Phi(u_\alpha)\big) \\ &= 2\,\Phi(u_\alpha) - 1 \\ &= 2\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) - 1 \ = \ 1-\alpha \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en déduit, pour } n \text{ assez grand : } \mathbb{P}\big([-u_\alpha \leqslant N_n \leqslant u_\alpha]\big) \approx 1-\alpha.}$$

□

c) Montrer que pour n assez grand, l'intervalle $\left[\left(1 - \dfrac{u_\alpha}{\sqrt{n}}\right)\ \widehat{\lambda_n}, \left(1 + \dfrac{u_\alpha}{\sqrt{n}}\right)\ \widehat{\lambda_n}\right]$ est un intervalle de confiance de λ au risque α. On note λ_0 la réalisation de $\widehat{\lambda_n}$ sur le n-échantillon.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}\big([-u_\alpha \leqslant N_n \leqslant u_\alpha]\big) \\ =\ & \mathbb{P}\left(\left[-u_\alpha \leqslant \lambda\, \frac{S_n}{\sqrt{n}} - \sqrt{n} \leqslant u_\alpha\right]\right) \\ =\ & \mathbb{P}\left(\left[\sqrt{n} - u_\alpha \leqslant \lambda\, \frac{S_n}{\sqrt{n}} \leqslant \sqrt{n} + u_\alpha\right]\right) \\ =\ & \mathbb{P}\left(\left[\frac{\sqrt{n}}{S_n}\,(\sqrt{n} - u_\alpha) \leqslant \lambda \leqslant \frac{\sqrt{n}}{S_n}\,(\sqrt{n} + u_\alpha)\right]\right) \quad \textit{(car } \left(\frac{\sqrt{n}}{S_n}\right)(\Omega) \subset\,]0,+\infty[\textit{)} \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}\big([-u_\alpha \leqslant N_n \leqslant u_\alpha] \big) \\
= \ & \mathbb{P}\left(\left[\frac{\sqrt{n}}{S_n} \sqrt{n} \left(1 - \frac{u_\alpha}{\sqrt{n}}\right) \leqslant \lambda \leqslant \frac{\sqrt{n}}{S_n} \sqrt{n} \left(1 + \frac{u_\alpha}{\sqrt{n}}\right) \right] \right) \\
= \ & \mathbb{P}\left(\left[\frac{n}{S_n} \left(1 - \frac{u_\alpha}{\sqrt{n}}\right) \leqslant \lambda \leqslant \frac{n}{S_n} \left(1 + \frac{u_\alpha}{\sqrt{n}}\right) \right] \right) \\
= \ & \mathbb{P}\left(\left[\widehat{\lambda_n} \left(1 - \frac{u_\alpha}{\sqrt{n}}\right) \leqslant \lambda \leqslant \widehat{\lambda_n} \left(1 + \frac{u_\alpha}{\sqrt{n}}\right) \right] \right)
\end{aligned}$$

Ainsi, d'après la question précédente :

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(\left[\widehat{\lambda_n} \left(1 - \frac{u_\alpha}{\sqrt{n}}\right) \leqslant \lambda \leqslant \widehat{\lambda_n} \left(1 + \frac{u_\alpha}{\sqrt{n}}\right) \right] \right) = 1 - \alpha$$

$$\boxed{\text{L'intervalle } \left[\left(1 - \frac{u_\alpha}{\sqrt{n}}\right) \widehat{\lambda_n}, \left(1 + \frac{u_\alpha}{\sqrt{n}}\right) \widehat{\lambda_n} \right] \text{ est donc un intervalle de confiance de } \lambda \text{ au risque } \alpha.}$$

□

15. Avec le n-échantillon $(X_1, X_2, \dots, X_n)$, on construit un nouvel intervalle de confiance de λ au risque β ($\beta \neq \alpha$), tel que la longueur de cet intervalle soit k ($k > 1$) fois plus petite que celle obtenue avec le risque α.

a) Justifier l'existence de la fonction réciproque Φ^{-1} de Φ.
Quel est le domaine de définition de Φ^{-1} ?

Démonstration.
La fonction Φ est :

- × continue sur $\mathbb{R}$, en tant que fonction de répartition d'une v.a.r. à densité,
- × strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
  En effet, la fonction Φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'est une primitive de la fonction $\varphi : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2\,\pi}} \, e^{-\frac{x^2}{2}}$ qui est continue sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\Phi'(x) = \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}} \, e^{-\frac{x^2}{2}} > 0$$

Elle réalise donc une bijection de $]-\infty, +\infty[$ sur $\Phi(]-\infty, +\infty[)$ où :

$$\Phi(]-\infty, +\infty[) = \left] \lim_{x \to -\infty} \Phi(x), \lim_{x \to +\infty} \Phi(x) \right[=]0, 1[$$

où la dernière égalité est obtenue car Φ est une fonction de répartition.

$$\boxed{\text{Ainsi, } \Phi \text{ réalise une bijection de } \mathbb{R} \text{ sur }]0, 1[.}$$

$$\boxed{\text{La fonction } \Phi^{-1} \text{ est donc définie sur }]0, 1[.}$$

Commentaire

- Il est toujours bon de garder en tête que la fonction Φ est bijective. C'est une propriété que l'on utilise fréquemment dans le contexte de l'estimation.
- On pourrait par exemple également s'en servir pour démontrer que le réel u_α existe et est unique. En effet :
  - × la fonction Φ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0,1[$,
  - × $1-\dfrac{\alpha}{2} \in \,]0,1[$, car $\alpha > 0$.

  On en déduit qu'il existe un unique $u_\alpha \in \mathbb{R}$ tel que : $\Phi(u_\alpha) = 1-\dfrac{\alpha}{2}$.

□

b) Établir l'égalité $\beta = 2\Phi\left(\dfrac{1}{k}\Phi^{-1}\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)\right)$.
En déduire que $\beta > \alpha$. Ce dernier résultat était-il prévisible ?

Démonstration.

- Déterminons l'intervalle de confiance de λ au risque β. Notons U_n et V_n les extrémités de ce nouvel intervalle.
  D'après l'énoncé, la longueur de cet intervalle est k fois plus petite que celle de risque α. Ainsi :
$$V_n - U_n \;=\; \frac{1}{k}\left(\left(\cancel{1}+\frac{u_\alpha}{\sqrt{n}}\right)\widehat{\lambda_n} - \left(\cancel{1}-\frac{u_\alpha}{\sqrt{n}}\right)\widehat{\lambda_n}\right) \;=\; 2\times\frac{u_\alpha}{k\sqrt{n}}\times\widehat{\lambda_n}$$
$$\boxed{\text{L'intervalle de confiance de } \lambda \text{ au risque } \beta \text{ est donc } \left[\left(1-\frac{u_\alpha}{k\sqrt{n}}\right)\widehat{\lambda_n},\ \left(1+\frac{u_\alpha}{k\sqrt{n}}\right)\widehat{\lambda_n}\right].}$$
- On obtient :
$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left[\left(1-\frac{u_\alpha}{k\sqrt{n}}\right)\widehat{\lambda_n} \leqslant \lambda \leqslant \left(1+\frac{u_\alpha}{k\sqrt{n}}\right)\widehat{\lambda_n}\right]\right) \;=\; 1-\beta$$
  Avec le même raisonnement qu'en question ***14.c)***, on a de plus :
$$\mathbb{P}\left(\left[\left(1-\frac{u_\alpha}{k\sqrt{n}}\right)\widehat{\lambda_n} \leqslant \lambda \leqslant \left(1+\frac{u_\alpha}{k\sqrt{n}}\right)\widehat{\lambda_n}\right]\right) \;=\; \mathbb{P}\left(\left[-\frac{u_\alpha}{k} \leqslant N_n \leqslant \frac{u_\alpha}{k}\right]\right)$$
  Or, comme $N_n \underset{n\to+\infty}{\xrightarrow{\mathscr{L}}} Z$:
$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left[-\frac{u_\alpha}{k} \leqslant N_n \leqslant \frac{u_\alpha}{k}\right]\right) \;=\; \mathbb{P}\left(\left[-\frac{u_\alpha}{k} \leqslant Z \leqslant \frac{u_\alpha}{k}\right]\right) \;=\; 2\,\Phi\left(\frac{u_\alpha}{k}\right)-1$$
  Ainsi :
$$1-\beta \;=\; \mathbb{P}\left(\left[\left(1-\frac{u_\alpha}{k\sqrt{n}}\right)\widehat{\lambda_n} \leqslant \lambda \leqslant \left(1+\frac{u_\alpha}{k\sqrt{n}}\right)\widehat{\lambda_n}\right]\right) \;=\; 2\,\Phi\left(\frac{u_\alpha}{k}\right)-1$$
$$\boxed{2\,\Phi\left(\frac{u_\alpha}{k}\right)-1 = 1-\beta}$$
- D'après le point précédent :
$$\begin{array}{lrcl} \text{comme} & 2\,\Phi\left(\dfrac{u_\alpha}{k}\right)-1 & = & 1-\beta \\[2ex] \text{alors} & \beta & = & 2-2\,\Phi\left(\dfrac{u_\alpha}{k}\right) \\[2ex] \text{donc} & \beta & = & 2\left(1-\Phi\left(\dfrac{u_\alpha}{k}\right)\right) \;=\; 2\,\Phi\left(-\dfrac{u_\alpha}{k}\right) \end{array}$$
$$\boxed{\beta = 2\,\Phi\left(-\frac{u_\alpha}{k}\right)}$$

- Enfin, exprimons u_α en fonction de α et Φ^{-1}.
  Par définition de u_α :

$$\Phi(u_\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{2} \ \Leftrightarrow\ \frac{\alpha}{2} = 1 - \Phi(u_\alpha) = \Phi(-u_\alpha) \ \Leftrightarrow\ \Phi^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = -u_\alpha \ \Leftrightarrow\ -\Phi^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = u_\alpha$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \beta = 2\,\Phi\left(-\frac{u_\alpha}{k}\right) = 2\,\Phi\left(-\frac{-\Phi^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{k}\right) = 2\,\Phi\left(\frac{1}{k}\ \Phi^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right).}$$

- D'après ce qui précède : $\dfrac{\beta}{2} = \Phi\left(\dfrac{1}{k}\ \Phi{-1}\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)\right)$. Ainsi :

$$\Phi^{-1}\left(\frac{\beta}{2}\right) \ = \ \frac{1}{k}\ \Phi^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

De plus :

$$\begin{array}{lrcll}
\text{comme} & k & > & 1 & \\
\text{alors} & \dfrac{1}{k} & < & 1 & \textit{(par stricte décroissance de } x \mapsto \dfrac{1}{x} \textit{ sur }]0,+\infty[\textit{)} \\
\text{donc} & \dfrac{1}{k}\ \Phi^{-1}\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) & > & \Phi^{-1}\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) & \textit{(car } \Phi^{-1}\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) < 0 \quad (*)\textit{)} \\
\text{d'où} & \Phi^{-1}\left(\dfrac{\beta}{2}\right) & > & \Phi^{-1}\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) & \\
\text{ainsi} & \dfrac{\beta}{2} & > & \dfrac{\alpha}{2} & \textit{(par stricte croissance de } \Phi \textit{ sur } \mathbb{R}\textit{)} \\
\text{enfin} & \beta & > & \alpha &
\end{array}$$

Détaillons l'argument $(*)$.

$$\begin{array}{lrcll}
 & \Phi^{-1}\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) & < & 0 & \\
\Leftrightarrow & \dfrac{\alpha}{2} & < & \Phi(0) & \textit{(par stricte croissance de } \Phi \textit{ sur } \mathbb{R}\textit{)} \\
\Leftrightarrow & \dfrac{\alpha}{2} & < & \dfrac{1}{2} & \\
\Leftrightarrow & \alpha & < & 1 &
\end{array}$$

Or cette dernière inégalité est vraie par définition de α. Ainsi, grâce au raisonnement par équivalence, la première aussi.

$$\boxed{\text{On a bien : } \beta > \alpha.}$$

Ce résultat était privisible car plus la précision de l'estimation exigée augmente (*i.e.* plus la longueur de l'intervalle de confiance est faible), plus le niveau de risque augmente (*i.e.* plus le niveau de confiance diminue)

□

Dans les questions 5 à 7, on suppose que $\lambda = 1$.

16. On pose pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $T_n = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.
Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, pour tout réel x positif ou nul, on pose :

$$g_n(x) = \int_0^x F_{T_n}(t)\, dt \quad \text{et} \quad h_n(x) = \int_0^x t\, f_{T_n}(t)\, dt$$

Commentaire

- Notons que l'énoncé définit ici des objets avant que l'on puisse statuer sur leur existence : on ne sait ni si la v.a.r. T_n est à densité, ni si les fonctions F_{T_n} et f_{T_n} sont continues par morceaux sur $[0, x]$. La question suivante s'effectuera donc en supposant que T_n est une v.a.r. à densité, de densité f_{T_n} et que la fonction F_{T_n} est suffisamment régulière, en l'occurence de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur le segment $[0, x]$.
- On aurait pu éviter d'effectuer ces hypothèses en énonçant les questions dans l'ordre suivant :

16. ***a)*** Déterminer pour tout réel t, l'expression de $F_{T_n}(t)$ en fonction de t.
En déduire que T_n est une v.a.r. à densité. On note f_{T_n} une de ses densités.

b) Exprimer $h_n(x)$ en fonction de $F_{T_n}(x)$ et $g_n(x)$.

c) Établir pour tout n supérieur ou égal à 2, la relation : $g_{n-1}(x) - g_n(x) = \dfrac{1}{n}\, F_{T_n}(x)$.

a) Exprimer $h_n(x)$ en fonction de $F_{T_n}(x)$ et $g_n(x)$.

Démonstration.
Soit $x \in [0, +\infty[$. On effectue une intégration par parties (IPP).

$$\left|\begin{array}{rclcrcl} u(t) & = & t & & u'(t) & = & 1 \\ v'(t) & = & f_{T_n}(t) & & v(t) & = & F_{T_n}(t) \end{array}\right.$$

Cette IPP est valide **sous réserve** que les fonctions u et v soient de classe $\mathcal{C}^1$ (par morceaux) sur $[0, x]$. On obtient :

$$\begin{array}{rcl} h_n(x) & = & \displaystyle\int_0^x t\, f_{T_n}(t)\, dt \\ & = & \left[\, t\, F_{T_n}(t)\, \right]_0^x - \displaystyle\int_0^x 1 \times F_{T_n}(t)\, dt \\ & = & x\, F_{T_n}(x) - g_n(x) \end{array}$$

$$\boxed{\forall x \in [0, +\infty[,\ h_n(x) = x\, F_{T_n}(x) - g_n(x)}$$

□

b) Déterminer pour tout réel t, l'expression de $F_{T_n}(t)$ en fonction de t.
Établir pour tout n supérieur ou égal à 2, la relation : $g_{n-1}(x) - g_n(x) = \dfrac{1}{n}\, F_{T_n}(x)$.

Démonstration.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Tout d'abord : $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $X_i(\Omega) = [0, +\infty[$ (car $X_i \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$).

$$\boxed{\text{Ainsi : } T_n(\Omega) \subset [0, +\infty[.}$$

- Soit $t \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent :
  × si $t \in]-\infty, 0[$, alors $[T_n \leqslant t] = \varnothing$ car $T_n(\Omega) \subset [0, +\infty[$. Ainsi :

$$F_{T_n}(t) \;=\; \mathbb{P}\big([T_n \leqslant t]\big) \;=\; \mathbb{P}(\varnothing) \;=\; 0$$

  × si $t \in [0, +\infty[$.

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{P}([T_n \leqslant t]) & = & \mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{i=1}^{n} [X_i \leqslant t]\right) & \\
& = & \prod\limits_{i=1}^{n} \mathbb{P}([X_i \leqslant t]) & \textit{(car les v.a.r. } X_1, \ldots, X_n \textit{ sont indépendantes)} \\
& = & \prod\limits_{i=1}^{n} \mathbb{P}([X_1 \leqslant t]) & \textit{(car les v.a.r. } X_1, \ldots, X_n \textit{ ont même loi)} \\
& = & \big(\mathbb{P}\big([X_1 \leqslant t]\big)\big)^n & \\
& = & \big(1 - \mathrm{e}^{-t}\big)^n & \textit{(car } X_1 \hookrightarrow \mathcal{E}(1) \textit{ et } t \geqslant 0\textit{)}
\end{array}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } F_{T_n} : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \big(1 - \mathrm{e}^{-t}\big)^n & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}.}$$

Commentaire

Démontrons que T_n est une v.a.r. à densité.

- La fonction F_{T_n} est continue :
  × sur $]-\infty, 0[$ en tant que fonction constante,
  × sur $]0, +\infty[$ car elle est la composée $F_{T_n} = u_2 \circ u_1$ de :
    – $u_1 : x \mapsto 1 - \mathrm{e}^{-x}$ qui est :
      ▸ continue sur $]0, +\infty[$,
      ▸ telle que : $u_1(]0, +\infty[) \subset \mathbb{R}$.
    – $u_2 : y \mapsto y^n$ qui est continue sur $\mathbb{R}$.
  × en 0. En effet :
    – d'une part : $\lim\limits_{x \to 0^-} F_{T_n}(x) = 0$
    – d'autre part : $\lim\limits_{x \to 0^+} F_{T_n}(x) = F_{Y_n}(0) = (1 - \mathrm{e}^{-0})^n = 0$.

  Ainsi :

$$\lim_{x \to 0^-} F_{T_n}(x) \;=\; F_{T_n}(0) \;=\; \lim_{x \to 0^+} F_{T_n}(x)$$

$$\boxed{\text{La fonction } F_{T_n} \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$$

- La fonction F_{T_n} est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$, par des arguments similaires à ceux de la continuité sur ces intervalles.

$$\boxed{\text{On en déduit que } F_{T_n} \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ sauf éventuellement en } 0.}$$

$$\boxed{\text{La v.a.r. } T_n \text{ est donc une v.a.r. à densité.}}$$

Commentaire

On a démontré que :
- × la fonction F_{T_n} est continue sur $[0, +\infty[$. Pour tout $x \in [0, +\infty[$, elle l'est alors sur le segment $[0, x]$. La fonction g_n est donc bien définie.
- × la fonction F_{T_n} est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$. Elle est même de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $[0, +\infty[$. Ainsi f_{T_n} est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$. Pour tout $x \in [0, +\infty[$, elle l'est alors sur le segment $[0, x]$. La fonction h_n est donc bien définie.
- × l'IPP de la question précédente est valide puisque, comme F_{T_n} est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $[0, x]$, la fonction v l'est aussi.

- Soit $n \in [\![2, +\infty[\![$. Soit $x \in [0, +\infty[$.

$$\begin{aligned}
g_{n-1}(x) - g_n(x) &= \int_0^x F_{T_{n-1}}(t)\ dt - \int_0^x F_{T_n}(t)\ dt \\
&= \int_0^x F_{T_{n-1}}(t) - F_{T_n}(t)\ dt \\
&= \int_0^x (1 - \mathrm{e}^{-t})^{n-1} - (1 - \mathrm{e}^{-t})^n\ dt \qquad \textit{(car } (n-1, n) \in (\mathbb{N}^*)^2\textit{)} \\
&= \int_0^x (1 - \mathrm{e}^{-t})^{n-1} \big(\cancel{1} - (\cancel{1} - \mathrm{e}^{-t})\big)\ dt \\
&= \int_0^x \mathrm{e}^{-t} (1 - \mathrm{e}^{-t})^{n-1}\ dt \\
&= \left[\frac{1}{n}\ (1 - \mathrm{e}^{-t})^n \right]_0^x \\
&= \frac{1}{n}\ (1 - \mathrm{e}^{-x})^n \ = \ \frac{1}{n}\ F_{T_n}(x) \qquad \textit{(car } x \geqslant 0\textit{)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in [\![2, +\infty[\![,\ \forall x \in [0, +\infty[,\ g_{n-1}(x) - g_n(x) = \frac{1}{n}\ F_{T_n}(x)}$$

□

c) En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, pour tout réel x positif ou nul, l'expression de $g_n(x)$ en fonction de x, $F_{T_1}(x)$, $F_{T_2}(x)$, $\dots$, $F_{T_n}(x)$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $x \in [0, +\infty[$.

- D'après la question précédente :

$$\forall k \in [\![2, +\infty[\![, \quad g_{k-1}(x) - g_k(x) \ = \ \frac{1}{k}\ F_{T_k}(x)$$

- En sommant les égalités précédentes pour k variant de 2 à n, on obtient :

$$\begin{array}{ccc}
\sum\limits_{k=2}^{n} \big(g_{k-1}(x) - g_k(x)\big) & = & \sum\limits_{k=2}^{n} \frac{1}{k}\ F_{T_k}(x) \\
\shortparallel & & \\
g_1(x) - g_n(x) & & \textit{(par télescopage)}
\end{array}$$

- De plus :

$$\begin{aligned} g_1(x) &= \int_0^x F_{T_1}(t)\ dt \ = \ \int_0^x 1-\mathrm{e}^{-t}\ dt \\ &= \Big[\ t+\mathrm{e}^{-t}\ \Big]_0^x \\ &= x+\mathrm{e}^{-x}-1 \ = \ x-F_{T_1}(x) \qquad\qquad \textit{(car } x \geqslant 0\textit{)} \end{aligned}$$

- Ainsi :

$$\begin{aligned} g_n(x) &= x - F_{T_1}(x) - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}\ F_{T_k}(x) \\ &= x - \frac{1}{1}\ F_{T_1}(x) - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}\ F_{T_k}(x) \\ &= x - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\ F_{T_k}(x) \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [0,+\infty[,\ g_n(x) = x - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\ F_{T_k}(x)}$$

□

d) Montrer que $F_{T_n}(x) - 1$ est équivalent à $-n\mathrm{e}^{-x}$, lorsque x tend vers $+\infty$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \in [0,+\infty[$:

$$F_{T_n}(x) - 1 \ = \ (1-\mathrm{e}^{-x})^n - 1$$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$. D'où : $(1-\mathrm{e}^{-x})^n - 1 \underset{x\to+\infty}{\sim} n \times (-\mathrm{e}^{-x})$.

$$\boxed{\text{Finalement : } F_{T_n}(x) - 1 \underset{x\to+\infty}{\sim} -n\,\mathrm{e}^{-x}.}$$

□

e) Déduire des questions ***c)*** et ***d)*** l'existence de $\mathbb{E}(T_n)$ et montrer que $\mathbb{E}(T_n) = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$.

Démonstration.

- La v.a.r. T_n admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\, f_{T_n}(t)\ dt$ est absolument convergente, ce qui équivaut à démontrer la convergence pour ce calcul de moment du type $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^r\ f_{T_n}(t)\ dt$.
- Tout d'abord, comme $T_n(\Omega) \subset [0,+\infty[$, la fonction f_{T_n} est nulle en dehors de $[0,+\infty[$. Ainsi :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t\, f_{T_n}(t)\ dt \ = \ \int_0^{+\infty} t\, f_{T_n}(t)\ dt$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{On en déduit que } T_n \text{ admet une espérance si et seulement si la fonction } h_n \\ \text{admet une limite quand } x \text{ tend vers } +\infty.\end{array}}$$

- Soit $x \in [0, +\infty[$. D'après ***16.a)*** :

$$\begin{array}{rcl} h_n(x) & = & x\, F_{T_n}(x) - g_n(x) \\ & = & x\, F_{T_n}(x) - \left(x - \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}\ F_{T_k}(x)\right) \quad \textit{(d'après } \textbf{\textit{16.c)}}\textit{)} \\ & = & x\left(F_{T_n}(x) - 1\right) + \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}\ F_{T_k}(x) \end{array}$$

Or :

× d'après la question précédente : $F_{T_n}(x) - 1 \underset{x\to+\infty}{\sim} -n\,\mathrm{e}^{-x}$. D'où :

$$x\left(F_{T_n}(x) - 1\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} -n\,x\,\mathrm{e}^{-x}$$

Comme, par croissances comparées : $\lim\limits_{x\to+\infty} -n\,x\,\mathrm{e}^{-x} = 0$, on en déduit :

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(F_{T_n}(x) - 1\right) = 0$$

× pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, la fonction F_{T_k} est une fonction de répartition. On en déduit :

$$\lim_{x\to+\infty} F_{T_k}(x) = 1$$

Ainsi : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{k}\ F_{T_k}(x) = \dfrac{1}{k}$. Et enfin :

$$\lim_{x\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\ F_{T_k}(x) \ = \ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \qquad \textit{(car cette somme est finie)}$$

On en déduit que la fonction h_n admet une limite quand x tend vers $+\infty$ et :

$$\lim_{x\to+\infty} h_n(x) \ = \ 0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \ = \ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

$$\boxed{\text{La v.a.r. } T_n \text{ admet donc une espérance.}}$$

- De plus :

$$\mathbb{E}(T_n) \ = \ \int_0^{+\infty} t\, f_{T_n}(t)\ dt \ = \ \lim_{x\to+\infty} h_n(x) \ = \ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(T_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}$$

□

17. On veut étudier dans cette question la convergence en loi de la suite de variables aléatoires $(G_n)_{n\geqslant 1}$ définie par : pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $G_n = T_n - \mathbb{E}(T_n)$.
On pose pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $\gamma_n = -\ln(n) + \mathbb{E}(T_n)$ et on admet sans démonstration que la suite $(\gamma_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente ; on note γ sa limite.

a) Montrer que pour tout x réel et n assez grand, on a : $F_{G_n}(x) = \left(1 - \dfrac{1}{n}\ \mathrm{e}^{-(x+\gamma_n)}\right)^n$.

Démonstration.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, d'après ***16.b)*** : $T_n(\Omega) \subset [0, +\infty[$.

$$\boxed{\text{Comme } G_n = T_n - \mathbb{E}(T_n), \text{ on en déduit : } G_n(\Omega) \subset [-\mathbb{E}(T_n), +\infty[.}$$

- Soit $x \in \mathbb{R}$.
  Tout d'abord : $\lim\limits_{n\to+\infty} -\mathbb{E}(T_n) = -\infty$. En effet :
  × d'après la question précédente : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{E}(T_n) = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$.
  × la série $\sum\limits_{k\geqslant 1} \dfrac{1}{k}$ est une série de Riemann d'exposant 1 ($1 \not> 1$). Elle est donc divergente. Comme c'est une série à termes positifs, sa suite des sommes partielles associée diverge vers $+\infty$.

  Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} -\mathbb{E}(T_n) = -\infty$, alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que : $\forall n \geqslant n_0$, $x \geqslant -\mathbb{E}(T_n)$.
  Soit $n \geqslant n_0$.

$$\begin{array}{rcll} F_{G_n}(x) & = & \mathbb{P}([T_n - \mathbb{E}(T_n) \leqslant x]) & \\ & = & \mathbb{P}([T_n \leqslant x + \mathbb{E}(T_n)]) & \\ & = & F_{T_n}\big(x + \mathbb{E}(T_n)\big) & \\ & = & \left(1 - \mathrm{e}^{-(x+\mathbb{E}(T_n))}\right)^n & \textit{(car, comme } n \geqslant n_0 \textit{ :} \\ & & & x + \mathbb{E}(T_n) \geqslant 0\textit{)} \\ & = & \left(1 - \mathrm{e}^{-(x+\gamma_n+\ln(n))}\right)^n & \textit{(par définition de } \gamma_n\textit{)} \\ & = & \left(1 - \mathrm{e}^{-(x+\gamma_n)}\ \mathrm{e}^{-\ln(n)}\right)^n & \\ & = & \left(1 - \dfrac{\mathrm{e}^{-(x+\gamma_n)}}{\mathrm{e}^{\ln(n)}}\right)^n & \\ & = & \left(1 - \dfrac{\mathrm{e}^{-(x+\gamma_n)}}{n}\right)^n & \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, pour } n \text{ assez grand } (n \geqslant n_0) : F_{G_n} : x \mapsto \left(1 - \dfrac{\mathrm{e}^{-(x+\gamma_n)}}{n}\right)^n.}$$

□

b) En déduire que pour tout x réel, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} F_{G_n}(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-(x+\gamma)}}$.

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Soit $n \geqslant n_0$.

$$F_{G_n}(x) \ = \ \left(1 - \dfrac{\mathrm{e}^{-\left(x+\gamma_n\right)}}{n}\right)^n \ = \ \exp\left(n \ln\left(1 - \dfrac{1}{n}\ \mathrm{e}^{-(x+\gamma_n)}\right)\right)$$

- D'après l'énoncé : $\lim\limits_{n\to+\infty} \gamma_n = \gamma$.
  Par continuité de la fonction exp en $-(x+\gamma)$: $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{-(x+\gamma_n)} = \mathrm{e}^{-(x+\gamma)}$.
- On en déduit : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}\ \mathrm{e}^{-(x+\gamma_n)} = 0$ Ainsi :

$$\ln\left(1 - \dfrac{1}{n}\ \mathrm{e}^{-(x+\gamma_n)}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{n}\ \mathrm{e}^{-(x+\gamma_n)} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{n}\ \mathrm{e}^{-(x+\gamma)} \qquad \textit{(car } \mathrm{e}^{-(x+\gamma)} \neq 0\textit{)}$$

  D'où :

$$n \ln\left(1 - \dfrac{1}{n}\ \mathrm{e}^{-(x+\gamma_n)}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \cancel{n} \times \left(-\dfrac{1}{\cancel{n}}\ \mathrm{e}^{-(x+\gamma)}\right) = -\mathrm{e}^{-(x+\gamma)}$$

- Par continuité de la fonction exp en $-\mathrm{e}^{-(x+\gamma)}$:

$$\lim_{n\to+\infty} \exp\left(n \ln\left(1-\frac{1}{n}\,\mathrm{e}^{-(x+\gamma_n)}\right)\right) \;=\; \exp\left(-\mathrm{e}^{-(x+\gamma)}\right)$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall x \in \mathbb{R},\ \lim_{n\to+\infty} F_{G_n}(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-(x+\gamma)}}.}$$

□

c) Montrer que la fonction $F_G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $F_G : x \mapsto \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-(x+\gamma)}}$ est la fonction de répartition d'une variable aléatoire G à densité. Conclure.

Démonstration.

- Démontrons que F_G est une fonction de répartition.
  - × La fonction F_G est continue sur $\mathbb{R}$ car elle est la composée $F_G = u_2 \circ u_1$ de :
    - $u_1 : x \mapsto -\mathrm{e}^{-(x+\gamma)}$ qui est :
      - ▸ continue sur $\mathbb{R}$,
      - ▸ telle que : $u_1(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$.
    - $u_2 : x \mapsto \mathrm{e}^x$ qui est continue sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\text{En particulier, } F_G \text{ est continue à droite en tout point de } \mathbb{R}.}$$

  - × La fonction F_G est dérivable sur $\mathbb{R}$, par des arguments similaires à ceux de la continuité sur cet intervalle.
    Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$F_G'(x) \;=\; \mathrm{e}^{-(x+\gamma)}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-(x+\gamma)}} \;>\; 0$$

$$\boxed{\text{La fonction } F_G \text{ est donc (strictement) croissante sur } \mathbb{R}.}$$

  - × Comme $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-(x+\gamma)} = +\infty$, alors : $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-(x+\gamma)}} = 0$.

$$\boxed{\text{D'où : } \lim_{x\to-\infty} F_G(x) = 0.}$$

  - × Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-(x+\gamma)} = 0$, alors, par continuité de exp en 0 : $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-(x+\gamma)}} = \mathrm{e}^0 = 1$.

$$\boxed{\text{D'où : } \lim_{x\to+\infty} F_G(x) = 1.}$$

$$\boxed{\text{La fonction } F_G \text{ est donc la fonction de répartition d'une v.a.r. notée } G.}$$

- Démontrons que G est une v.a.r. à densité.
  - × La fonction F_G est continue sur $\mathbb{R}$.
  - × La fonction F_G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, par des arguments similaires à ceux de la continuité sur cet intervalle.

$$\boxed{\text{La v.a.r. } G \text{ est une v.a.r. à densité.}}$$

- D'après la question précédente :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n\to+\infty} F_{G_n}(x) \;=\; \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-(x+\gamma)}} \;=\; F_G(x)$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } G_n \underset{n\to+\infty}{\overset{\mathscr{L}}{\longrightarrow}} G.}$$

Commentaire

- Le programme officiel liste certaines propriétés d'une fonction de répartition F :
  1) F est continue à droite en tout point,
  2) F est croissante sur $\mathbb{R}$,
  3) $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$
  4) $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$

  Cependant, il n'est pas précisé qu'il s'agit là d'une caractérisation d'une fonction de répartition : toute fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui vérifie les propriétés ***1.***, ***2.***, ***3.*** et ***4.*** peut être considérée comme la fonction de répartition d'une variable aléatoire.
- À l'époque de ce sujet, la caractérisation ci-dessus était inscrite dans le programme (ce n'est plus le cas). Cependant, son utilisation semble toujours apparaître aux concours. Plus précisément, elle semble nécessaire pour traiter des questions portant sur la convergence en loi (comme cette question) présentes dans les sujets `EML 2016` et `2017`. Il est donc conseillé de connaître la caractérisation ci-dessus.

$\square$

18. a) Soit X une variable aléatoire à densité de fonction de répartition F_X strictement croissante. Déterminer la loi de la variable aléatoire Y définie par $Y = F_X(X)$.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$\begin{array}{rcll} Y(\Omega) & = & \big(F_X(X)\big)(\Omega) \ = \ F_X\big(X(\Omega)\big) & \\ & = & F_X(]-\infty,+\infty[) & \\ & = & \left]\lim\limits_{x\to-\infty} F_X(x), \lim\limits_{x\to+\infty} F_X(x)\right[& \textit{(par continuité } (*) \textit{ et stricte croissance de } F_X \textit{ sur } \mathbb{R}) \\ & = &]0,1[& \textit{(car } F_X \textit{ est une fonction de répartition)} \end{array}$$

Précisons que l'assertion $(*)$ est vraie (la fonction F_X est bien continue sur $\mathbb{R}$), car F_X est la fonction de répartition de X qui est une v.a.r. à densité.

$$\boxed{Y(\Omega) =]0,1[}$$

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Trois cas se présentent :
  × si $x \in]-\infty, 0]$, alors $[Y \leqslant x] = \varnothing$ (car $Y(\Omega) =]0,1[$). D'où :

$$F_Y(x) \ = \ \mathbb{P}([Y \leqslant x]) \ = \ \mathbb{P}(\varnothing) \ = \ 0$$

  × si $x \in]0,1[$, alors :

$$F_Y(x) \ = \ \mathbb{P}([F_X(X) \leqslant x])$$

  Or la fonction F_X est :
  - continue sur $\mathbb{R}$, car c'est la fonction de répartition d'une v.a.r. à densité,
  - strictement croissante sur $\mathbb{R}$, d'après l'énoncé.

  Elle réalise donc une bijection de $]-\infty,+\infty[$ sur $F_X(]-\infty,+\infty[) =]0,1[$.

  En particulier, F_X admet une bijection réciproque F_X^{-1} strictement croissante sur $]0,1[$.

Ainsi :

$$\begin{array}{rcll} F_Y(x) & = & \mathbb{P}([F_X(X) \leqslant x]) & \\ & = & \mathbb{P}\left(\left[F_X^{-1}\big(F_X(X)\big) \leqslant F_X^{-1}(x)\right]\right) & \textit{(par stricte croissance de } F_X^{-1} \textit{ sur }]0,1[\textit{)} \\ & = & \mathbb{P}(\left[X \leqslant F_X^{-1}(x)\right]) & \\ & = & F_X\big(F_X^{-1}(x)\big) & \\ & = & x & \textit{(par définition de } F_X^{-1}\textit{)} \end{array}$$

× si $x \in [1, +\infty[$, alors $[Y \leqslant x] = \Omega$ (car $Y(\Omega) =]0,1[$). D'où :

$$F_Y(x) \ = \ \mathbb{P}([Y \leqslant x]) \ = \ \mathbb{P}(\Omega) \ = \ 1$$

$$\boxed{\text{Finalement : } F_Y : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ x & \text{si } x \in]0,1[\\ 1 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}.}$$

- On reconnaît la fonction de répartition d'une v.a.r. qui suit la loi $\mathcal{U}(]0,1[)$. Or la fonction de répartition caractérise la loi.

$$\boxed{\text{Ainsi : } Y \hookrightarrow \mathcal{U}(]0,1[).}$$

□

b) Écrire une fonction **Scilab** nommée `Gumbel` qui permet de simuler la variable aléatoire G.
On supposera que la constante γ est définie en langage **Scilab** par une constante `gamma`.
On rappelle que la fonction **Scilab** `rand()` permet de simuler la loi uniforme sur $]0,1[$.

Démonstration.

- On note U une v.a.r. de loi $\mathcal{U}(]0,1[)$. D'après la question précédente, la v.a.r. $F_X(X)$ suit la même loi que U.

$$\boxed{\text{On en déduit que } F_X^{-1}(U) \text{ suit la même loi que } X.}$$

- Pour simuler la v.a.r. X, on cherche donc à simuler $F_X^{-1}(U)$. Commençons alors par déterminer F_X^{-1}.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $y \in]0,1[$.

$$\begin{array}{rcll} y = F_X(x) & \Leftrightarrow & y = \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-(x+\gamma)}} & \\ & \Leftrightarrow & \ln(y) = -\mathrm{e}^{-(x+\gamma)} & \textit{(par bijectivité de } \ln \textit{ sur }]0,+\infty[\textit{)} \\ & \Leftrightarrow & -\ln(y) = \mathrm{e}^{-(x+\gamma)} & \\ & \Leftrightarrow & \ln\big(-\ln(y)\big) = -(x+\gamma) & \textit{(par bijectivité de } \ln \textit{ sur }]0,+\infty[\textit{)} \\ & \Leftrightarrow & -\ln\big(-\ln(y)\big) = x+\gamma & \\ & \Leftrightarrow & -\ln\big(-\ln(y)\big) - \gamma = x & \end{array}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } F_X^{-1} : y \mapsto -\ln\big(-\ln(y)\big) - \gamma.}$$

- On en déduit la fonction **Scilab** suivante.

```
function x = Gumbel()
    u = rand()
    x = -log(-log(u)) - gamma
endfunction
```

Commentaire

Cette question est une application directe de la **méthode d'inversion** vue en TP. Elle a également été traitée en cours pour démontrer le résultat classique suivant : si U est une v.a.r. telle que $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1[)$, alors la v.a.r. $W = -\frac{1}{\lambda} \ln(1-U)$ suit la loi $\mathcal{E}(\lambda)$.

□