ESSEC II 2010

- L'objet du problème est l'étude de la durée de fonctionnement d'un système (une machine, un organisme, un service ...) démarré à la date $t = 0$ et susceptible de tomber en panne à une date aléatoire. Après une partie préliminaire sur les propriétés de la loi exponentielle, on introduira dans la deuxième partie, les notions permettant d'étudier des propriétés de la date de première panne. Enfin, dans une troisième partie on examinera le fonctionnement d'un système satisfaisant certaines propriétés particulières.
- Les trois parties sont dans une large mesure indépendantes.
- Toutes les variables aléatoires intervenant dans le problème sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.
- Pour toute variable aléatoire Y, on notera $\mathbb{E}(Y)$ son espérance lorsqu'elle existe.
- On adoptera les conventions suivantes :
  - × on dira qu'une fonction f continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et continue à droite en 0 est continue sur $\mathbb{R}_+$.
  - × en outre, si T est une variable aléatoire positive dont la loi admet la densité f continue sur $\mathbb{R}_+$, sa fonction de répartition $F_T(t) = \mathbb{P}([T \leqslant t]) = \displaystyle\int_0^t f(u)\ du$, est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et dérivable à droite en 0.
  - × on conviendra d'écrire $F_T'(t) = f(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $F_T'(0)$ désignant donc dans ce cas la dérivée à droite en 0.

I. Généralités sur la loi exponentielle

On rappelle qu'une variable aléatoire suit la loi exponentielle de paramètre μ ($\mu > 0$) si elle admet pour densité la fonction f_μ définie par :

$$f_\mu(x) = \begin{cases} \mu\ \mathrm{e}^{-\mu x} & \text{si} \quad x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

1. Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre μ.

a) Donner l'espérance $\mathbb{E}(X)$ et la variance $\mathbb{V}(X)$.

b) Justifier que pour tout entier naturel n, X^n admet une espérance et déterminer une relation de récurrence entre $\mathbb{E}(X^{n+1})$ et $\mathbb{E}(X^n)$ pour tout entier naturel n.

c) En déduire $\mathbb{E}(X^n)$ pour tout $n > 0$.

d) Retrouver la valeur de $\mathbb{V}(X)$ à l'aide de la question précédente.

2. *Propriété caractéristique*

a) Soient $\mu > 0$ et X une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre μ.
Justifier que pour tout réel x positif ou nul, le nombre $\mathbb{P}([X > x])$ est non nul.
Montrer que pour tous réels positifs x et y :

$$\mathbb{P}_{[X>x]}([X > x + y]) = \mathbb{P}([X > y])$$

b) Réciproquement, soit X une variable aléatoire positive admettant une densité f continue et strictement positive sur $\mathbb{R}_+$, et telle que pour tous réels positifs x et y :

$$\mathbb{P}_{[X>x]}([X > x + y]) = \mathbb{P}([X > y])$$

(i) Soit $R(x) = \mathbb{P}([X > x])$. Justifier que $R(x)$ est non nul pour tout réel positif.

(ii) On pose $\mu = f(0)$. Montrer que pour tout x réel positif, on a la relation $R'(x) + \mu R(x) = 0$.

(iii) Calculer la dérivée de $x \mapsto R(x)\, \mathrm{e}^{\mu x}$ sur $\mathbb{R}_+$.

(iv) Déduire que X suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.

3. Soient deux réels strictement positifs μ_1 et μ_2. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes suivant respectivement les lois exponentielles de paramètres μ_1 et μ_2.

a) On pose $Y = \max(X_1, X_2)$.
Déterminer la fonction de répartition F_Y de Y et en déduire la densité de la variable Y.

b) On pose $Z = \min(X_1, X_2)$.
Déterminer la fonction de répartition F_Z de Z et en déduire la loi de Z.

II. Fiabilité

Soit T une variable aléatoire positive qui représente la durée de vie (c'est-à-dire le temps de fonctionnement avant la survenue d'une première panne) d'un système. On suppose que T est une variable à densité f_T continue sur $\mathbb{R}_+$ et ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}_+^*$.
On appelle fiabilité de T la fonction R_T définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$R_T(t) = \mathbb{P}([T \geqslant t]) = \mathbb{P}([T > t]) = 1 - F_T(t)$$

où F_T est la fonction de répartition de T.

4. Soient t un réel positif ou nul et h un réel strictement positif.
La dégradation du système sur l'intervalle $[t, t+h]$ est mesurée par la probabilité $\mathbb{P}([t \leqslant T \leqslant t + h])$.
Exprimer cette quantité à l'aide de la fonction R_T.

5. Montrer que, pour tout réel t positif ou nul,

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{\mathbb{P}([t \leqslant T \leqslant t + h])}{h} = f_T(t)$$

6. ***a)*** Justifier que pour tout réel t positif, $R_T(t) > 0$.
On appelle taux de défaillance la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par le rapport $\lambda(t) = \dfrac{f_T(t)}{R_T(t)}$.

b) On note : $g : t \mapsto \ln\left(\dfrac{1}{R_T(t)}\right)$. Démontrer que $\lambda = g'$.

c) Déduire l'expression de R_T en fonction de λ à l'aide d'une intégrale.

7. Soit Z une variable aléatoire réelle positive de densité g continue sur $\mathbb{R}_+$, admettant une espérance.
On pose $R_Z(t) = \mathbb{P}([Z > t])$ pour $t \geqslant 0$.

a) Soit v la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $v(t) = tR_Z(t)$.
Démontrer, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$: $tg(t) = R_Z(t) - v'(t)$ où v' désigne la dérivée de v.

b) Montrer que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} v(t) = 0$.

c) En déduire que $\mathbb{E}(Z) = \displaystyle\int_0^{+\infty} R_Z(t)\, dt$.

8. On suppose désormais que T admet une espérance. Soit t un réel positif fixé, le système ayant fonctionné sans panne jusqu'à la date t, on appelle durée de survie la variable aléatoire $T_t = T - t$ représentant le temps s'écoulant entre la date t et la première panne.
On a donc, pour tout réel x positif :

$$R_{T_t}(x) = \mathbb{P}([T_t > x]) = \mathbb{P}_{[T>t]}([T > t + x])$$

a) Démontrer, pour tout réel x positif : $R_{T_t}(x) = \dfrac{R_T(t+x)}{R_T(t)}$.

b) En déduire :

$$\mathbb{E}(T_t) = \frac{1}{R_T(t)} \int_t^{+\infty} R_T(u)\ du$$

Les questions suivantes illustrent les notions introduites précédemment pour des systèmes simples.

9. ***a)*** On suppose que T suit la loi exponentielle de paramètre μ.
Déterminer la fiabilité et le taux de défaillance.

b) On suppose que le système est composé de deux organes 1 et 2 montés en série, dont les durées de vie sont supposées indépendantes, ce qui implique qu'il tombe en panne dès que l'un d'eux tombe en panne. On note T_i la durée de vie de l'organe i, f_{T_i} la densité de sa loi qu'on suppose exponentielle de paramètre μ_i.
Déterminer la fiabilité du système et son taux de défaillance.

c) On suppose que le système est composé de deux organes 1 et 2 montés en parallèle, dont les durées de vie sont supposées indépendantes, ce qui implique qu'il tombe en panne quand les deux organes sont en panne. On note T_i la durée de vie de l'organe i, f_{T_i} la densité de sa loi qu'on suppose exponentielle de paramètre μ_i.
Déterminer la fiabilité du système.

10. Soit $\varphi_{n,\beta}$ la fonction définie par :

$$\varphi_{n,\beta} : t \mapsto \begin{cases} \dfrac{\beta}{(n-1)!}\ (\beta t)^{n-1}\ \mathrm{e}^{-\beta t} & \text{si } t \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

où $\beta > 0$ est une constante strictement positive et n un entier naturel non nul.

a) Démontrer que $\varphi_{n,\beta}$ est une densité de probabilité (loi d'Erlang).

b) On suppose que T a pour densité la fonction $\varphi_{n,\beta}$. Montrer que la fiabilité à la date t est :

$$R_T(t) = \mathrm{e}^{-\beta t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\beta t)^k}{k!}$$

11. Soit $\psi_{\beta,\eta}$ la fonction définie par :

$$\psi_{\beta,\eta} : t \mapsto \begin{cases} \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta-1} \mathrm{e}^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta}} & \text{si } t \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où $\beta \geqslant 1, \eta > 0$.

a) Vérifier que $\psi_{\beta,\eta}$ est une densité de probabilité (loi de Weibull).

b) On suppose que T a pour densité la fonction $\psi_{\beta,\eta}$.
Déterminer la fiabilité $R_T(t)$ et le taux de défaillance $\lambda(t)$ à la date t.

c) Étudier $\lim\limits_{t \to +\infty} \lambda(t)$ en fonction de la valeur de β.

III. Système Poissonien

On considère maintenant un système dont le fonctionnement est défini comme suit : pour tout réel t positif, la variable aléatoire N_t à valeurs entières représente le nombre de pannes qui se produisent dans l'intervalle $[0,t]$. On considère que le système est réparé immédiatement après chaque panne.
On notera en particulier que pour $s \leqslant t$, on a $N_s \leqslant N_t$.
On suppose qu'on a les quatre propriétés suivantes :

- $N_0 = 0$ et $0 < \mathbb{P}([N_t = 0]) < 1$ pour tout $t > 0$.
- Pour tous réels $t_0, t_1, \ldots, t_n$ tels que $0 \leqslant t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ les variables $N_{t_0}, N_{t_1} - N_{t_0}, N_{t_2} - N_{t_1}, \ldots, N_{t_n} - N_{t_{n-1}}$ sont mutuellement indépendantes (accroissements indépendants).
- Pour tous réels s et t tels que $0 < s < t$, $N_t - N_s$ suit la même loi que N_{t-s} (accroissements stationnaires).
- $\displaystyle\lim_{h \to 0^+} \frac{\mathbb{P}([N_h > 1])}{h} = 0$.

On pose, sous réserve d'existence, pour tout $u \geqslant 0$ et pour tout s dans [0,1], $G_u(s) = \mathbb{E}(s^{N_u})$, avec la convention $0^0 = 1$.

12. ***a)*** Justifier que pour tout $u \geqslant 0$, $G_u(s)$ existe pour tout s dans [0,1] et qu'on a, pour tout $s \in [0,1]$:

$$G_u(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([N_u = k])\ s^k$$

b) Montrer par ailleurs que, pour tous réels u et v positifs ou nuls, et pour tout réel s tel que $0 \leqslant s \leqslant 1$, on a :

$$G_{u+v}(s) = G_u(s) G_v(s)$$

13. On fixe s tel que $0 \leqslant s \leqslant 1$.

a) Montrer que $G_1(s) > 0$.
On pose $\theta(s) = -\ln G_1(s)$ et, pour $u \geqslant 0$, $\psi(u) = G_u(s)$.

b) Montrer que $\psi(k) = \mathrm{e}^{-k\theta(s)}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

c) Soit q un entier naturel non nul. En considérant $G_{\frac{1}{q}}(s)$, montrer que $\psi(\frac{1}{q}) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{q}\theta(s)}$.

d) Montrer que si p est entier naturel et q un entier naturel non nul, on a $\psi(r) = \mathrm{e}^{-r\theta(s)}$ où on a posé $r = \frac{p}{q}$.

e) Montrer que pour tout réel positif u, $G_u(s) = \mathrm{e}^{-u\theta(s)}$.

f) En déduire que pour tout $s \in [0,1]$, $\displaystyle\lim_{h \to 0^+} \frac{G_h(s) - 1}{h} = -\theta(s)$.

14. Montrer par ailleurs que pour tout $s \in [0,1]$,

$$G_h(s) - 1 = \mathbb{P}([N_h = 1])\ (s-1) + \sum_{k=2}^{+\infty} \mathbb{P}([N_h = k])\ (s^k - 1)$$

15. Montrer que pour tout $s \in [0,1]$: $\displaystyle\lim_{h \to 0^+} \frac{\sum_{k=2}^{+\infty} \mathbb{P}([N_h = k])\ (s^k - 1)}{h} = 0$.

16. ***a)*** En déduire qu'il existe $\alpha \geqslant 0$ tel que $\alpha = \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{\mathbb{P}([N_h = 1])}{h}$ et que pour pour tout $s \in [0,1]$:

$$\theta(s) = \alpha(1-s)$$

b) En considérant $G_u(0)$, montrer que $\alpha > 0$.

c) On fixe un temps $u > 0$. Montrer que pour tout $s \in [0,1]$,

$$G_u(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([N_u = k])\ s^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \left[\mathrm{e}^{-\alpha u} \frac{(\alpha u)^k}{k!} \right] s^k$$

d) Déduire que pour tout $u > 0$, la variable aléatoire N_u suit la loi de Poisson de paramètre αu.

Une famille de variables aléatoires ayant les mêmes caractéristiques que la famille $(N_t)_{t \geqslant 0}$ est un **processus de Poisson** et la constante α s'appelle le **paramètre** du processus de Poisson.

17. Soit T la variable aléatoire désignant la date de la première panne. Soit $t > 0$.
Comparer les événements $[T > t]$ et $[N_t = 0]$.
En déduire que T suit la loi exponentielle de paramètre α.

18. Pour t positif fixé, on pose pour h réel positif, $\tilde{N}_h = N_{t+h} - N_t$.

a) Montrer que $\tilde{N}_h$ est la variable aléatoire qui représente le nombre de pannes survenues dans l'intervalle de temps $]t, t+h]$.

b) Montrer que la famille $(\tilde{N}_h)_{h \geqslant 0}$ est un processus de Poisson de paramètre α.

c) En déduire que la première panne survenant après la date t se produit à une date suivant la loi exponentielle de paramètre α.

d) En déduire que le processus de Poisson a la propriété que, pour chaque date t donnée, le taux de défaillance du système après t est constant.