EML 2010

Exercice 1 - (à reprendre : énoncé bidouillé)

Partie I : Un endomorphisme de l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2

- On note $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2.
- On note : $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $G = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $H = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- On note $\mathcal{S}_2$ l'ensemble des matrices carrées symétriques d'ordre 2.

1. Calculer AFA, AGA, AHA.

Démonstration.

- $AFA = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$
- $AGA = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 12 \end{pmatrix}$
- $AHA = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$

$$\boxed{AFA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix},\ AGA = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 12 \end{pmatrix} \text{ et } AHA = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}}$$

□

2. Montrer que $\mathcal{S}_2$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et que (F, G, H) est une base de $\mathcal{S}_2$. Déterminer la dimension de $\mathcal{S}_2$.

Démonstration.

- Soit $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Alors il existe $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tel que $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

$$\begin{array}{rcl} M \in \mathcal{S}_2 & \Leftrightarrow & {}^tM = M \\ & \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} a & = & a \\ c & = & b \\ b & = & c \\ d & = & d \end{array} \right. \\ & \Leftrightarrow & b = c \end{array}$$

- On obtient alors l'écriture de $\mathcal{S}_2$ suivante :

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{S}_2 & = & \{M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \ / \ {}^tM = M\} \\ & = & \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \ / \ b = c \right\} \\ & = & \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \ / \ (a, b, d) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ & = & \left\{ a \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ / \ (a, b, d) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ & = & \left\{ a \cdot F + b \cdot G + d \cdot H \ / \ (a, b, d) \in \mathbb{R}^3 \right\} \ = \ \mathrm{Vect}\,(F, G, H) \end{array}$$

$$\boxed{\mathcal{S}_2 \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \text{, donc un espace vectoriel.}}$$

- La famille (F, G, H) :
  - × engendre $\mathcal{S}_2$, d'après le point précédent,
  - × est libre dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
    Démontrons-le.
    Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$.
    Supposons que $\lambda_1 \cdot F + \lambda_2 \cdot G + \lambda_3 \cdot H = 0$. Ainsi :
    $$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_2 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
    Ce qui équivaut au système suivant :
    $$\left\{ \begin{array}{rcl} \lambda_1 & = & 0 \\ \lambda_2 & = & 0 \\ \lambda_3 & = & 0 \end{array} \right.$$
    Donc la famille (F, G, H) est libre.

$$\boxed{\text{Ainsi, } (F, G, H) \text{ est une base de } \mathcal{S}_2.}$$

$$\boxed{\text{Enfin, comme } (F, G, H) \text{ est constituée de 3 vecteurs, } \dim(\mathcal{S}_2) = 3.}$$

$\square$

3. a) Montrer que : $\forall S \in \mathcal{S}_2, \ ASA \in \mathcal{S}_2$.

Démonstration.
Soit $S \in \mathcal{S}_2$.

$$\begin{array}{rcll} {}^t(ASA) & = & {}^t((AS)A) & \\ & = & {}^tA \, {}^t(AS) & \\ & = & {}^tA \, {}^tS \, {}^tA & \\ & = & ASA & \quad (\textit{car } {}^tA = A \textit{ et } {}^tS = S) \end{array}$$

Donc $ASA \in \mathcal{S}_2$.

$$\boxed{\forall S \in \mathcal{S}_2, \ ASA \in \mathcal{S}_2}$$

Remarque
On applique ici la formule suivante :

$$\forall (A, B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))^2, \ {}^t(AB) = {}^tB \, {}^tA$$

Il faut bien faire attention à l'ordre d'apparition des matrices dans cette formule : ${}^t(AB) \cancel{=} {}^tA \, {}^tB$.

$\square$

b) Déterminer le rang de la famille (AFA, AGA, AHA).

Démonstration.

- Notons tout d'abord que :
  - × $AFA = 4H$,
  - × $AGA = 4G + 12H$,
  - × $AHA = 4F + 6G + 9H$.

- Ainsi :

$$\begin{array}{rcl} \text{rg}(AFA, AGA, AHA) &=& \text{rg}(4H, 4G + 12H, 4F + 6G + 9H) \\ &=& \text{rg}(H, G + 3H, 4F + 6G + 9H) \\ &=& \text{rg}(H, (G + \cancel{3H}) - \cancel{3H}, (4F + 6G + \cancel{9H}) - \cancel{9H}) \\ &=& \text{rg}(H, G, 4F + 6G) \\ &=& \text{rg}(H, G, (4F + \cancel{6G}) - \cancel{6G}) \\ &=& \text{rg}(H, G, 4F) \\ &=& \text{rg}(H, G, F) \\ &=& \text{rg}(F, G, H) \end{array}$$

Or la famille (F, G, H) est libre d'après la question ***2.***.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \text{rg}(F, G, H) = 3 \ \text{ et } \ \text{rg}(AFA, AGA, AHA) = 3.}$$

Remarque

- Rappelons que : $\text{rg}(F, G, H) = \dim(\text{Vect}\,(F, G, H))$.
Par définition, la famille (F, G, H) engendre $\text{Vect}\,(F, G, H)$.
On cite dans la démonstration l'argument de liberté.
Ceci permet de démontrer que (F, G, H) est une base de $\text{Vect}\,(F, G, H)$ et donc que :

$$\dim(\text{Vect}\,(F, G, H)) = 3$$

- On peut rédiger cette question différemment.
Un première possibilité est de rédiegr directement avec les matrices.

$$\begin{array}{rll} & \text{rg}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 12 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}\right) & \\ = & \text{rg}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}\right) & \begin{array}{l} \textit{(on met à jour la } 1^{\text{ère}} \textit{ et } 2^{\text{ème}} \\ \textit{matrice en les multipliant par } \frac{1}{4}\textit{)} \end{array} \\ = & \text{rg}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}\right) & \begin{array}{l} \textit{(on met à jour la } 2^{\text{ème}} \textit{ matrice} \\ \textit{en lui retirant } 3 \textit{ fois la } 1^{\text{ère}}\textit{)} \end{array} \\ = & \text{rg}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}\right) & \begin{array}{l} \textit{(on met à jour la } 3^{\text{ème}} \textit{ matrice} \\ \textit{en lui retirant } 9 \textit{ fois la } 1^{\text{ère}}\textit{)} \end{array} \\ = & \text{rg}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) & \begin{array}{l} \textit{(on met à jour la } 3^{\text{ème}} \textit{ matrice} \\ \textit{en lui retirant } 6 \textit{ fois la } 1^{\text{ère}}\textit{)} \end{array} \\ = & \text{rg}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) & \begin{array}{l} \textit{(on met à jour la } 3^{\text{ème}} \textit{ matrice} \\ \textit{en la multipliant par } \frac{1}{4}\textit{)} \end{array} \\ = & \text{rg}(F, G, H) = 3 & \end{array}$$

- On pouvait aussi démontrer directement que la famille (AFA, AGA, AHA) est libre.
Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$.
Supposons que $\lambda_1 \cdot AFA + \lambda_2 \cdot AGA + \lambda_3 \cdot AHA = 0$. Or :

$$\begin{array}{rcl} \lambda_1 \cdot AFA + \lambda_2 \cdot AGA + \lambda_3 \cdot AHA &=& \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 12 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} \\ &=& \begin{pmatrix} 4\lambda_3 & 4\lambda_2 + 6\lambda_3 \\ 4\lambda_2 + 6\lambda_3 & 4\lambda_1 + 12\lambda_2 + 9\lambda_3 \end{pmatrix} \end{array}$$

Ainsi, la première égalité équivaut au système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 4\lambda_1 & + & 12\lambda_2 & + & 9\lambda_3 & = & 0 \\ & & 4\lambda_2 & + & 6\lambda_3 & = & 0 \\ & & & & 4\lambda_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \right.$$
(par remontées successives) □

Partie 2 : Réduction d'une matrice carrée d'ordre 3

On note : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 6 \\ 4 & 12 & 9 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$

1. On note de plus :

$$\begin{array}{rcl} E_{-4} & = & \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \ / \ MX = -4X\} \\ E_1 & = & \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \ / \ MX = X\} \\ E_{16} & = & \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \ / \ MX = 16X\} \end{array}$$

Montrer que chacun de ces ensembles est un espace vectoriel. Donner une base et la dimension de chacun d'eux.

Démonstration.
Cas de E_{-4} :

- Montrons que E_{-4} est un espace vectoriel.
  Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

$$\begin{array}{rcl} X \in E_{-4} & \Longleftrightarrow & MX = -4X \\ & \Longleftrightarrow & (M+4I)X = 0 \\ & \Longleftrightarrow & \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 8 & 6 \\ 4 & 12 & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & \Longleftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 4x & & & + & 4z & = & 0 \\ & & 8y & + & 6z & = & 0 \\ 4x & + & 12y & + & 13z & = & 0 \end{array}\right. \\ & \underset{\substack{L_1 \leftarrow \frac{1}{4}L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2}}{\Longleftrightarrow} & \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & & & + & z & = & 0 \\ & & 4y & + & 3z & = & 0 \\ 4x & + & 12y & + & 13z & = & 0 \end{array}\right. \\ & \underset{L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1}{\Longleftrightarrow} & \left\{\begin{array}{rcrcl} x & & + & z & = 0 \\ & 4y & + & 3z & = 0 \\ & 12y & + & 9z & = 0 \end{array}\right. \\ & \Longleftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcrcl} x & & + & z & = 0 \\ & 4y & + & 3z & = 0 \end{array}\right. \\ & \Longleftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -z \\ 4y & = & -3z \end{array}\right. \end{array}$$

Finalement on obtient l'expression de E_{-4} suivante :

$$\begin{aligned}
E_{-4} &= \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \ / \ MX = 4X\} \\
&= \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \ / \ x = -z \ \text{ et } \ y = -\frac{3}{4}z\} \\
&= \{\begin{pmatrix} -z \\ -\frac{3}{4}z \\ z \end{pmatrix} \ / \ z \in \mathbb{R}\} \\
&= \{z \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{3}{4} \\ 1 \end{pmatrix} \ / \ z \in \mathbb{R}\} \\
&= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{3}{4} \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}\right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{En particulier, } E_{-4} \text{ est un espace vectoriel.}}$$

- Déterminons une base de E_{-4}.

  On sait que la famille $\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}\right)$:

  × engendre E_{-4} d'après le point précédent,

  × est une famille libre de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ car elle est constituée d'un unique vecteur non nul.

$$\boxed{\text{Ainsi, } \left(\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}\right) \text{ est une base de } E_{-4}.}$$

$$\boxed{\text{Comme } \left(\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}\right) \text{ est constituée d'un vecteur, } \dim(E_{-4}) = 1.}$$

Cas de E_1 :

- Montrons que E_1 est un espace vectoriel.

  Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

$$\begin{array}{rcl}
X \in E_1 & \Longleftrightarrow & MX = X \\
& \Longleftrightarrow & (M - I)X = 0 \\
& \Longleftrightarrow & \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \\ 4 & 12 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -x & & & + & 4z & = & 0 \\ & & 3y & + & 6z & = & 0 \\ 4x & + & 12y & + & 8z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \underset{L_3 \leftarrow \frac{1}{4} L_3}{\overset{L_2 \leftarrow \frac{1}{3} L_2}{\Longleftrightarrow}} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -x & & & + & 4z & = & 0 \\ & & y & + & 2z & = & 0 \\ x & + & 3y & + & 2z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \overset{L_3 \leftarrow L_3 + L_1}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -x & & & + & 4z & = & 0 \\ & & y & + & 2z & = & 0 \\ & & 3y & + & 6z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \overset{L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -x & & & + & 4z & = & 0 \\ & & y & + & 2z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcl} x & & & = & 4z \\ & & y & = & -2z \end{array} \right.
\end{array}$$

Finalement on obtient l'expression de E_1 suivante :

$$\begin{array}{rcl}
E_1 & = & \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \ / \ MX = X\} \\
& = & \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \ / \ x = 4z \text{ et } y = -2z\} \\
& = & \{\begin{pmatrix} 4z \\ -2z \\ z \end{pmatrix} \ / \ z \in \mathbb{R}\} \\
& = & \{z \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \ / \ z \in \mathbb{R}\} \ = \ \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)
\end{array}$$

$$\boxed{\text{En particulier, } E_1 \text{ est un espace vectoriel.}}$$

- Déterminons une base de E_1.

  On sait que la famille $\left(\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$:

  $\times$ engendre E_1 d'après le point précédent,

  $\times$ est une famille libre de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ car elle est constituée d'un unique vecteur non nul.

$$\boxed{\text{Ainsi, } \left(\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \text{ est une base de } E_1.}$$

$$\boxed{\text{Comme } \left(\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \text{ est constituée d'un vecteur, } \dim(E_1) = 1}$$

Cas de E_{16} :

- Montrons que E_{16} est un espace vectoriel.

  Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned}
X \in E_{16} &\iff MX = 16X \\
&\iff (M - 16\ I)X = 0 \\
&\iff \begin{pmatrix} -16 & 0 & 4 \\ 0 & -12 & 6 \\ 4 & 12 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -16x & & & + & 4z & = & 0 \\ & - & 12y & + & 6z & = & 0 \\ 4x & + & 12y & - & 7z & = & 0 \end{array}\right. \\
&\underset{L_2 \leftarrow -\frac{1}{6}L_2}{\overset{L_1 \leftarrow -\frac{1}{4}L_1}{\iff}} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 4x & & & - & z & = & 0 \\ & & 2y & - & z & = & 0 \\ 4x & + & 12y & - & 7z & = & 0 \end{array}\right. \\
&\overset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 4x & & & - & z & = & 0 \\ & & 2y & - & z & = & 0 \\ & & 12y & - & 6z & = & 0 \end{array}\right. \\
&\overset{L_3 \leftarrow L_3 - 6L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 4x & & & - & z & = & 0 \\ & & 2y & - & z & = & 0 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} 4x & = & z \\ 2y & = & z \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Finalement on obtient l'expression de E_{16} suivante :

$$\begin{aligned}
E_{16} &= \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \ / \ MX = 16X\} \\
&= \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \ / \ x = \frac{1}{4}z \ \text{ et } \ y = \frac{1}{2}z\} \\
&= \{ \begin{pmatrix} \frac{1}{4}z \\ \frac{1}{2}z \\ z \end{pmatrix} \ / \ z \in \mathbb{R}\} \\
&= \{z \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \ / \ z \in \mathbb{R}\} \\
&= \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{En particulier, } E_{16} \text{ est un espace vectoriel.}}$$

- Déterminons une base de E_{16}.

  On sait que la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right)$:

  × engendre E_{16} d'après le point précédent,

  × est une famille libre de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ car elle est constituée d'un unique vecteur non nul.

$$\boxed{\text{Ainsi, } \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right) \text{ est une base de } E_{16}.}$$

$$\boxed{\text{Comme } \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right) \text{ est constituée d'un vecteur, } \dim(E_{16}) = 1}$$

□

2. On note $P = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ -4 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.

Démonstration.

On applique la méthode de Gauss-Jordan.

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ -4 & 1 & 4 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue les opérations $\left\{ \begin{array}{l} L_2 \leftarrow 4L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{array} \right.$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 0 & -20 & 5 \\ 0 & 5 & 5 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue l'opération $\left\{ L_3 \leftarrow 4L_3 + L_2 \right.$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 0 & -20 & 5 \\ 0 & 0 & 25 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & 0 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix} \right.$$

La matrice $\begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 0 & -20 & 5 \\ 0 & 0 & 25 \end{pmatrix}$ est triangulaire supérieure à coefficients diagonaux tous non nuls.

Elle est donc inversible. Ainsi, P est inversible.

On effectue les opérations $\left\{ \begin{array}{l} L_1 \leftarrow 25L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow 5L_2 - L_3 \end{array} \right.$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 100 & 100 & 0 \\ 0 & -100 & 0 \\ 0 & 0 & 25 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 24 & -4 & -4 \\ -16 & 16 & -4 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue les opérations $\left\{ \begin{array}{l} L_1 \leftarrow \frac{1}{4}L_1 \\ L_2 \leftarrow -\frac{1}{4}L_2 \end{array} \right.$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 25 & 25 & 0 \\ 0 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 25 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 6 & -1 & -1 \\ 4 & -4 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue l'opération $\left\{ L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \right.$. On obtien alors :

$$\begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 25 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 4 & -4 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix} \right.$$

$$\boxed{P \text{ est inversible et } P^{-1} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 4 & -4 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}.}$$

□

3. Montrer que : $M = PDP^{-1}$.

Démonstration.

$$\begin{aligned} PDP^{-1} &= \frac{1}{25} P \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 4 & -4 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ -4 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -8 & -12 & 8 \\ 4 & -4 & 1 \\ 16 & 64 & 64 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 100 \\ 0 & 100 & 150 \\ 100 & 300 & 225 \end{pmatrix} \\ &= M \end{aligned}$$

$$\boxed{M = PDP^{-1}.}$$

Remarque

- Ce type de questions est l'occasion de vérifier vos précédents calculs : si vous n'obtenez pas le résultat attendu c'est que vous avez certainement commis une erreur dans le calcul de P^{-1}.
- L'énoncé demande de faire le produit de 3 matrices. Le résultat attendu étant énoncé, il suffit de faire le premier produit et d'affirmer que le second donne le résultat souhaité. Évidemment, pour agir ainsi, il faut être sûr de vos précédents. Sinon, le correcteur jugera que c'est une tentative d'arnaque, ce qui est peu apprécié. □

4. Vérifier que $(D+4I)(D-I)(D-16I)$ est la matrice nulle.

Démonstration.

$$\begin{aligned}(D+4I)(D-I)(D-16I) &= (D+4I)\begin{pmatrix}-5&0&0\\0&0&0\\0&0&15\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-20&0&0\\0&-15&0\\0&0&0\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}0&0&0\\0&5&0\\0&0&20\end{pmatrix}\begin{pmatrix}100&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\boxed{(D+4I)(D-I)(D-16I)=0}$$

□

5. En déduire : $M^3 = 13M^2 + 52M - 64I$.

Démonstration.

- Les matrices I et D commutent. On peut donc écrire :

$$\begin{aligned}(D+4I)(D-I)(D-16I) &= (D+4I)(D^2-17D+16I)\\ &= D^3-13D^2-52D+64I\end{aligned}$$

- On en déduit, d'après la question précédente :

$$\begin{aligned} & D^3-13D^2-52D+64I=0\\ \textit{i.e.} \quad & D^3 = 13D^2+52D-64I\end{aligned}$$

- Or, on sait que $M = PDP^{-1}$. Donc :

$$\begin{aligned} M^2 &= (PDP^{-1})(PDP^{-1}) = PD(P^{-1}P)DP^{-1} = PD^2P^{-1}\\ \text{de même} \quad M^3 &= M^2M = (PD^2P^{-1})(PDP^{-1}) = PD^2(P^{-1}P)DP^{-1} = PD^3P^{-1}\end{aligned}$$

- On obtient alors :

$$\begin{aligned} PD^3P^{-1} &= P(13D^2+52D-64I)P^{-1}\\ &= 13PD^2P^{-1}+52PDP^{-1}-64PP^{-1}\\ &= 13M^2+52M-64I\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } M^3 = 13M^2+52M+64.}$$

□

Exercice 2 - (à reprendre : ajouter fonctions de deux variables)

On note $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application de classe C^2, définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$f(x) = x - \ln(1 + x^2)$$

et $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.
On donne la valeur approchée : $\ln(2) \approx 0,69$.

Partie I : Étude de f et tracé de $\mathcal{C}$

1. a) Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x)$.

Démonstration.

- La fonction $x \mapsto \ln(1 + x^2)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ car est la composée $h \circ g$ des fonctions :
  - $\times$ $g : x \mapsto 1 + x^2$ dérivable sur $\mathbb{R}$ car polynomiale, et telle que $g(\mathbb{R}) \subset \,]0, +\infty[$.
  (pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1 + x^2 \geqslant 1 > 0$)
  - $\times$ $h : x \mapsto \ln(x)$, dérivable sur $]0, +\infty[$.
- On en déduit que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2}\ 2x = \frac{(1+x^2) - 2x}{1+x^2} = \frac{1 - 2x + x^2}{1+x^2} = \frac{(1-x)^2}{1+x^2}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \frac{(1-x)^2}{1+x^2}}$$

□

b) En déduire le sens de variation de f.

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Comme $1 + x^2 > 0$, la quantité $f'(x) = \dfrac{(1-x)^2}{1+x^2}$ est du signe de $(1-x)^2$.
On en déduit le tableau de variations suivant pour f.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$+$	
Variations de f	$-\infty$	↗		↗	$+\infty$

- Détaillons les différents éléments de ce tableau.
  - Déterminons tout d'abord $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Si $x > 0$:

$$\ln(1+x^2) = \ln\left(x^2\ \left(\frac{1}{x^2}+1\right)\right) = \ln(x^2) + \ln\left(\frac{1}{x^2}+1\right) = 2\ \ln(x) + \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$$

On a alors :

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & x - \ln(1+x^2) \\ & = & x - 2\ \ln(x) - \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) \\ & = & x\ \left(1 - 2\ \dfrac{\ln(x)}{x} - \dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x}\right) \end{array}$$

Or : $\dfrac{\ln(x)}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées.

Et : $\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ car $\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(1) = 0$ et $x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

On en déduit que : $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$$

  - Déterminons maintenant $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. Remarquons que :

× $x \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$

× comme $1+x^2 \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $\ln(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, alors, par théorème de composition des limites : $-\ln(1+x^2) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

$$\boxed{\text{On en déduit que : } \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.}$$

Commentaire

- On utilise dans cette démonstration l'égalité : $\ln(x^2) = 2\ln(x)$. Insistons sur le fait que cette égalité n'est vérifiée que lorsqu'on peut l'écrire. Autrement dit, cette égalité est vérifiée seulement lorsque $x > 0$ (la quantité $\ln(x)$ est alors bien définie).
- Dans le cas où $x < 0$ on peut écrire :

$$\ln(x^2) = \ln((-x)(-x)) = \ln(-x) + \ln(-x) = 2\ln(-x)$$

□

c) Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x)$.

Démonstration.
Par le même raisonnement qu'en ***1.a)***, on démontre que la fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcl} f''(x) & = & \dfrac{2\ (1-x)(-1)(1+x^2) - (1-x)^2\ 2x}{(1+x^2)^2} \\ & = & -2\ (1-x)\ \dfrac{(1+x^2) + x\ (1-x)}{1+x^2} \\ & = & -2\ (1-x)\ \dfrac{1+\cancel{x^2}+x-\cancel{x^2}}{(1+x^2)^2} \ = \ -2\ (1-x)\ \dfrac{1+x}{(1+x^2)^2} \end{array}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) = 2\ (x-1)\ \frac{1+x}{(1+x^2)^2}}$$

□

2. Déterminer la limite de f en $-\infty$ et la limite de f en $+\infty$.

Démonstration.
Cette question a été résolue en ***1.b)***.

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$$

Commentaire

- En question ***1.b)***, il est demandé de donner les variations de f. Formellement, on ne demande donc pas le tableau de variations. On l'a fait car c'est le bon outil pour représenter graphiquement les choses. Dans ce cas, on doit exposer les calculs de limite en ***1.b)***.
- Il faut veiller à éviter de renvoyer le correcteur à une autre page / question pour la résolution d'une question. Il faut au contraire toujours faciliter la lecture pour le correcteur. En commençant par respecter scrupuleusement la numérotation des questions.
- L'ordre des questions de l'énoncé n'était peut-être pas heureux mais en lisant l'énoncé jusqu'au bout, on évite de répondre aux questions au mauvais endroit. On s'efforcera de respecter au maximum l'esprit de l'énoncé.

□

3. Montrer que $\mathcal{C}$ admet deux points d'inflexion dont on déterminera les coordonnées.

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme $(1+x^2)^2 > 0$, $f''(x)$ est du signe de $(x-1)(1+x)$.
C'est un polynôme de degré 2 dont le cœfficient du terme de plus haut degré est positif.
On en déduit que :

– $\forall x \in \,]-1,1[,\ f''(x) < 0$
  ($f''(x) < 0$ dans l'intervalle défini par les racines du polynôme)

– $\forall x \in \,]-\infty,-1[\, \cup \,]1,+\infty[,\ f''(x) > 0$

Ainsi, f'' s'annule en changeant de signe en -1 et en 1.

$$\boxed{\text{La courbe représentative de } f \text{ admet deux points d'inflexion : } (-1,-1-\ln(2)) \text{ et } (1,1-\ln(2)).}$$

Commentaire

On pouvait aussi dresser le tableau de signe de $f''(x)$.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
Signe de $x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $1+x$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

□

4. Tracer $\mathcal{C}$. On utilisera un repère orthonormé d'unité graphique 2 centimètres, et on précisera la tangente à $\mathcal{C}$ en l'origine et en chacun des points d'inflexion.

Démonstration.

- Déterminons l'équation des tangentes demandées.
  - Au point $(0, f(0))$, la courbe $\mathcal{C}$ admet pour tangente la droite d'équation :

$$y = f(0) + f'(0)(x - 0) = x$$

  - Au point $(-1, f(-1))$, la courbe $\mathcal{C}$ admet pour tangente la droite d'équation :

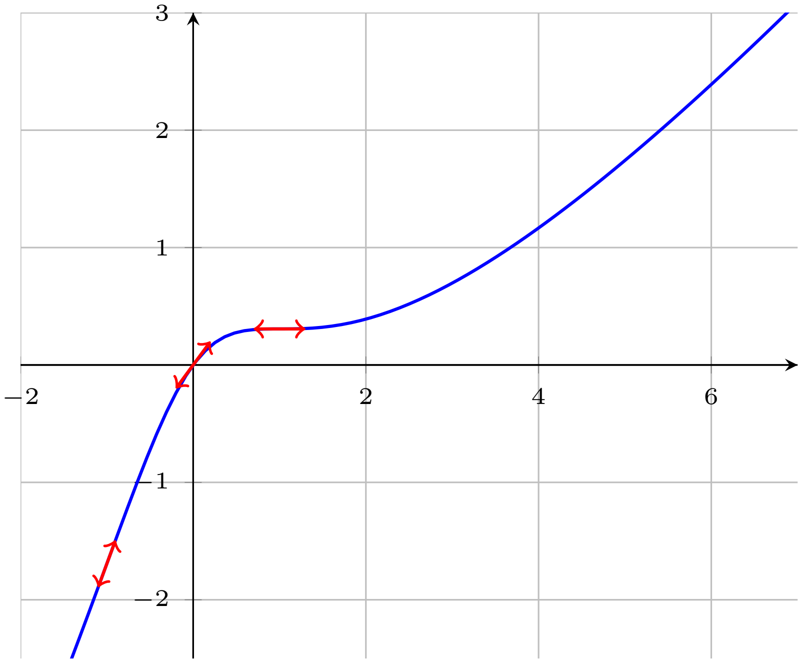
$$y = f(-1) + f'(-1)(x - (-1)) = (-1 - \ln(2)) + 2\ (x + 1) = 2x + (1 - \ln(2))$$

  - Au point $(1, f(1))$, la courbe $\mathcal{C}$ admet pour tangente la droite d'équation :

$$y = f(1) + f'(1)(x - 1) = 1 - \ln(2)$$

  (comme $f'(1) = 0$, on obtient une tangente horizontale)

- En regroupant toutes les informations précédentes on obtient le graphe suivant.



□

5. Calculer $\displaystyle\int_0^1 x f(x)\ dx$.
A cet effet, on pourra utiliser le changement de variable défini par $t = 1 + x^2$.

Démonstration.

- La fonction $x \mapsto x f(x)$ est continue sur $[0, 1]$. L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 x f(x) dx$ est donc bien définie.
  Par linéarité de l'intégration, on a :

$$\int_0^1 x f(x)\ dx \ = \ \int_0^1 x\ \left(x - \ln(1 + x^2)\right)\ dx \ = \ \int_0^1 x^2\ dx - \int_0^1 x\ \ln(1 + x^2)\ dx$$

- Tout d'abord :

$$\int_0^1 x^2 \, dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3} \left[x^3 \right]_0^1 = \frac{1}{3} (1^3 - 0^3) = \frac{1}{3}$$

- La fonction $x \mapsto 1 + x^2$ est C^1 sur $[0, 1]$.
  On peut donc effectuer le changement de variable $\boxed{t = 1 + x^2}$.

$$\left| \begin{array}{l} t = 1 + x^2 \\ \quad \text{(et donc } x^2 = t - 1\text{, et } x = \sqrt{t-1} \text{ car } \sqrt{x^2} = |x| = x \text{ puisque } x \in [0,1]) \\ \hookrightarrow dt = 2x \;\, dx \quad \text{ et } \quad dx = \dfrac{1}{2x} \; dt = \dfrac{1}{2\sqrt{t-1}} \; dt \\ \bullet \; x = 0 \;\Rightarrow\; t = 1 + 0^2 = 1 \\ \bullet \; x = 1 \;\Rightarrow\; t = 1 + 1^2 = 2 \\ \textit{(ainsi } t \in [1,2] \textit{ et donc } t - 1 \in [0,1] \textit{ ce qui permet de justifier l'écriture } \sqrt{t-1}\textit{)} \end{array} \right.$$

  On a donc :

$$\int_0^1 x \; \ln(1 + x^2) \; dx = \int_1^2 \cancel{\sqrt{t-1}} \; \ln(t) \; \frac{1}{2\,\cancel{\sqrt{t-1}}} \; dt = \frac{1}{2} \int_1^2 \ln(t) \; dt$$

  On procède alors par intégration par parties (IPP).

$$\left| \begin{array}{rclcrcl} u(t) & = & \ln(t) & \quad & u'(t) & = & \dfrac{1}{t} \\[2ex] v'(t) & = & 1 & & v(t) & = & t \end{array} \right.$$

  Cette IPP est valide car les fonctions u et v sont C^1 sur $[1, 2]$. On obtient :

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_1^2 \ln(t) \; dt & = & \left[\, t \; \ln(t) \, \right]_1^2 - \displaystyle\int_1^2 \cancel{t} \; \frac{1}{\cancel{t}} \; dt \\ & = & (2 \; \ln(2) - 1 \; \cancel{\ln(1)}) - 1 \\ & = & 2 \; \ln(2) - 1 \end{array}$$

- Il reste à combiner tous ces résultats :

$$\int_0^1 x \; f(x) \; dx = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \; (2 \; \ln(2) - 1) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \ln(2) = \frac{5}{6} - \ln(2)$$

$$\boxed{\int_0^1 x f(x) \; dx = \frac{5}{6} - \ln(2)}$$

□

Commentaire

- On démontre, dans cette question, un résultat classique : la fonction $x \mapsto x \ln(x) - x$ est une primitive de la fonction ln.
- Ce résultat n'est pas officiellement au programme mais son utilisation directe ne serait certainement pas sanctionnée. Pour autant, il est important de savoir le démontrer rapidement : cela pourrait être explicitement demandé.

Partie II : Étude d'une suite et d'une série associées à f

On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $u_0 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$$

1. Montrer que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante.

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Remarquons tout d'abord que :

$$f(x) - x = -\ln(1 + x^2) \leqslant 0$$

En effet, $1 + x^2 \geqslant 1$ et donc, par croissance de la fonction ln, $\ln(1 + x^2) \geqslant 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall x \in \mathbb{R}, \ f(x) \leqslant x.}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}$. On appplique l'inégalité précédente à $x = u_n \in \mathbb{R}$. On obtient :

$$u_{n+1} = f(u_n) \leqslant u_n$$

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est bien décroissante.}}$$

□

2. Établir que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge et déterminer sa limite.

Démonstration.

- La fonction f est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$. On en déduit que :

$$f([0, +\infty[) \ = \ [f(0), \lim_{x\to+\infty} f(x)[\ = \ [0, +\infty[$$

$$\boxed{\forall x \geqslant 0, \ f(x) \geqslant 0}$$

- Démontrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n) :\ u_n \geqslant 0$.
  - ▶ **Initialisation** :
    Par définition : $u_0 = 1 \geqslant 0$.
    On en déduit $\mathcal{P}(0)$.
  - ▶ **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
    Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n + 1)$ (*i.e.* $u_{n+1} \geqslant 0$).
    Par hypothèse de récurrence, $u_n \geqslant 0$.
    En appliquant l'inégalité au-dessus à $x = u_n \geqslant 0$, on obtient :

$$u_{n+1} = f(u_n) \geqslant 0$$

    D'où $\mathcal{P}(n + 1)$.

  Ainsi, par principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)$.
- La suite (u_n) est :
  × décroissante,
  × minorée par 0.
  Elle est donc convergente vers une limite $\ell \geqslant 0$.

- La fonction f étant continue en ℓ, on obtient :

$$\begin{array}{ccc} u_{n+1} & = & f(u_n) \\ {\scriptstyle n \to +\infty}\downarrow & & {\scriptstyle n \to +\infty}\downarrow \\ \ell & = & f(\ell) \end{array}$$

Ainsi, ℓ est un point fixe de f.

- Déterminons alors l'ensemble des points fixes de f.
Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcl} f(x) = x & \Leftrightarrow & \cancel{x} - \ln\left(1 + x^2\right) = \cancel{x} \\ & \Leftrightarrow & \ln\left(1 + x^2\right) = 0 \\ & \Leftrightarrow & \exp\left(\ln\left(1 + x^2\right)\right) = \exp(0) \\ & \Leftrightarrow & \cancel{1} + x^2 = \cancel{1} \\ & \Leftrightarrow & x^2 = 0 \\ & \Leftrightarrow & x = 0 \end{array}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que la suite } (u_n) \text{ converge vers } 0\text{, seul point fixe de } f.}$$

□

3. Écrire un programme en **Scilab** qui calcule et affiche un entier n tel que $u_n \leqslant 10^{-3}$.

Démonstration.

```
n = 0
u = 1
while u > 10 ^ (-3)
    n = n + 1
    u = u - log(1 + u ^ 2)
end
disp(n)
```

Commentaire

- D'après la question précédente, on sait que la suite (u_n) converge vers 0. On en déduit qu'il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geqslant n_0, \ |u_n - 0| \leqslant 10^{-3}$$

Toujours d'après la question précédente : $|u_n - 0| = |u_n| = u_n$ car $u_n \geqslant 0$.

- Ainsi, on est assuré de la terminaison de la boucle `while`. Le programme consiste en fait à rechercher le premier rang n_0 tel que l'inégalité $u_n \leqslant 10^{-3}$ est vérifiée.

□

4. a) Établir : $\forall x \in [0;1], \ f(x) \leqslant x - \dfrac{1}{2}x^2$.

Démonstration.
Soit $x \in [0, 1]$.

- Raisonnons par équivalence :

$$f(x) \leqslant x - \frac{1}{2}\,x^2 \ \Leftrightarrow\ \cancel{x} - \ln(1+x^2) \leqslant \cancel{x} - \frac{1}{2}\,x^2 \ \Leftrightarrow\ 2\,\ln(1+x^2) \geqslant x^2 \ \Leftrightarrow\ 2\,\ln(1+x^2) - x^2 \geqslant 0$$

- On considère alors la fonction $g : x \mapsto 2\ \ln(1+x^2) - x^2$.
  Cette fonction est dérivable sur $[0,1]$ (même sur $\mathbb{R}$) car $x \mapsto \ln(1+x^2)$ l'est.

$$g'(x) \ = \ 2\ \frac{1}{1+x^2}\ 2x - 2x \ = \ 2x\ \frac{2}{1+x^2} - 1 \ = \ 2x\ \frac{2-(1+x^2)}{1+x^2} \ = \ 2x\ \frac{1-x^2}{1+x^2}$$

- Tout d'abord : $1+x^2 \geqslant 1 > 0$.
  Comme $x \in [0,1]$, $2x \geqslant 0$ et ainsi la quantité $g'(x)$ est du signe de $(1-x^2) = (1-x)(1+x)$ et est nulle si $x=0$. On reconnaît l'expression d'un polynôme du second degré de racines évidentes -1 et 1 et dont le cœfficient du terme de plus haut degré est négatif. Ainsi :

$$\forall x \in [-1,1],\ g'(x) \geqslant 0$$

- La fonction g est donc croissante sur $[0,1]$. On en déduit que :

$$\forall x \in [0,1],\ g(x) \geqslant g(0) = 2\ \ln(1+0^2) - 0^2 = 0$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Cette inégalité étant équivalente à celle qu'on souhaite montrer, on a bien :}\\ \forall x \in [0,1],\ f(x) \leqslant x - \dfrac{1}{2}\ x^2\end{array}}$$

□

b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n^2 \ \leqslant\ 2\ (u_n - u_{n+1})$.

Démonstration.

- Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après la question précédente :

$$\begin{array}{rl} & f(x) \leqslant x - \dfrac{1}{2}\ x^2 \\ \text{donc} & \dfrac{1}{2}\ x^2 \leqslant x - f(x) \\ \text{ainsi} & x^2 \leqslant 2\ (x - f(x)) \end{array}$$

$$\boxed{\forall x \in [0,1],\ x^2 \leqslant 2\ (x - f(x))}$$

- On a démontré en question ***2.*** que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 0$.
  On sait de plus, d'après la question ***1.***, que la suite (u_n) est décroissante. On en déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant u_0 = 1$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [0,1]}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}$. En appliquant l'inégalité précédente à $x = u_n \in [0,1]$, on obtient :

$$u_n^2 \leqslant 2\ (u_n - f(u_n))$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall n \in \mathbb{N},\ u_n^2 \leqslant 2\ (u_n - u_{n+1}).}$$

□

c) Démontrer que la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} u_n^2$ converge.

Démonstration.

- Démontrons tout d'abord que la série $\sum (u_n - u_{n+1})$ est convergente.
  Pour ce faire, on étudie la suite de ses sommes partielles (S_n) :

$$S_n \ = \ \sum_{k=0}^{n} (u_k - u_{k+1}) \ = \ u_0 - u_{n+1} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} u_0 - 0 = 1$$

$$\boxed{\text{La série } \sum (u_n - u_{n+1}) \text{ est convergente (de somme 1).}}$$

- – D'après la question précédente :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ 0 \leqslant u_n^2 \leqslant 2\ (u_n - u_{n+1})$$

  – Or la série $\sum (u_n - u_{n+1})$ est convergente (on ne change pas la nature d'une série en multipliant son terme général par un réel).
  – On en déduit, par le critère de comparaison des séries à termes positifs que la série $\sum u_n^2$ est elle aussi convergente.

$$\boxed{\text{La série } \sum u_n^2 \text{ est convergente.}}$$

□

Exercice 3

Les deux parties sont indépendantes

Partie I

Une gare dispose de deux guichets. Trois clients notés C_1, C_2, C_3 arrivent en même temps. Les clients C_1 et C_2 se font servir tandis que le client C_3 attend puis effectue son opération dès que l'un des deux guichets se libère.
On définit X_1, X_2, X_3 les variables aléatoires égales à la durée d'opération des clients C_1, C_2, C_3 respectivement. Ces durées sont mesurées en minutes et arrondies à l'unité supérieure ou égale. On suppose que les variables X_1, X_2, X_3 suivent la loi géométrique de paramètre p, $p \in]0,1[$ et qu'elles sont indépendantes. On note $q = 1 - p$.
On note A l'événement : « C_3 termine en dernier son opération ».
Ainsi l'événement A est égal à l'événement : $[\min(X_1, X_2) + X_3 > \max(X_1, X_2)]$.
On se propose de calculer la probabilité de A.

1. Rappeler la loi de X_1 ainsi que son espérance $\mathbb{E}(X_1)$ et sa variance $\mathbb{V}(X_1)$.
On définit la variable aléatoire $\Delta = |X_1 - X_2|$.

Démonstration.
D'après l'énoncé, $X_1 \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$. Autrement dit :
- $X_1(\Omega) = \mathbb{N}^*$.
- $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}([X_1 = k]) = p\, q^{k-1}$.

$$\boxed{\text{Enfin : } \mathbb{E}(X_1) = \frac{1}{p} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X_1) = \frac{q}{p^2}.}$$
□

2. Calculer la probabilité $\mathbb{P}([\Delta = 0])$.

Démonstration.
- Tout d'abord : $[\Delta = 0] \ = \ [|X_1 - X_2| = 0] \ = \ [X_1 - X_2 = 0]$.
- La famille $([X_2 = k])_{k\in\mathbb{N}^*}$ est un système complet d'événements.
  Ainsi, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X_1 - X_2 = 0]) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_2 = k] \cap [X_1 - X_2 = 0]) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_2 = k] \cap [X_1 = k]) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_2 = k])\ \mathbb{P}([X_1 = k]) && \textit{(car } X_1 \textit{ et } X_2 \textit{ sont indépendantes)} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} p\, q^{k-1}\ p\, q^{k-1} \\
&= p^2 \sum_{k=1}^{+\infty} (q^2)^{k-1} \\
&= p^2 \sum_{k=0}^{+\infty} (q^2)^{k} \ = \ p^2 \, \frac{1}{1-q^2} && \textit{(en reconnaissant la somme d'une série géométrique de raison } q^2 \in]-1,1[\textit{)} \\
&= p^{\cancel{2}} \, \frac{1}{\cancel{(1-q)}(1+q)} \ = \ \frac{p}{1+q}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}([X_1 = X_2]) = \frac{p}{1+q}}$$
□

3. Soit n un entier naturel non nul.

a) Justifier : $\mathbb{P}([X_1 - X_2 = n]) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_2 = k])\, \mathbb{P}([X_1 = n+k])$.

Démonstration.
La famille $([X_2 = k])_{k\in\mathbb{N}^*}$ est un système complet d'événements.
Ainsi, par la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X_1 - X_2 = n]) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_2 = k] \ \cap \ [X_1 - X_2 = n]) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_2 = k] \ \cap \ [X_1 = k + n]) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_2 = k]) \ \times \ \mathbb{P}([X_1 = k + n]) && \textit{(car } X_1 \textit{ et } X_2 \textit{ sont indépendantes)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}([X_1 - X_2 = n]) \ = \ \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_2 = k])\, \mathbb{P}([X_1 = k + n])}$$

□

b) En déduire : $\mathbb{P}([\Delta = n]) = \dfrac{2pq^n}{1+q}$.

Démonstration.

- Remarquons tout d'abord :

$$[\Delta = n] \ = \ [\ |X_1 - X_2| = n] \ = \ [X_1 - X_2 = n] \ \cup \ [X_1 - X_2 = -n]$$

- Comme $n \neq 0$, les événements $[X_1 - X_2 = n]$ et $[X_1 - X_2 = -n]$ sont incompatibles.
Ainsi :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([\ |X_1 - X_2| = n]) &= \mathbb{P}([X_1 - X_2 = n]) \ + \ \mathbb{P}([X_1 - X_2 = -n]) \\
&= \mathbb{P}([X_1 - X_2 = n]) \ + \ \mathbb{P}([X_2 - X_1 = n])
\end{aligned}$$

- Reprenons le calcul de la question précédente.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X_1 - X_2 = n]) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_2 = k]) \ \times \ \mathbb{P}([X_1 = k + n]) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} p\ q^{k-1} \ \times \ p\ q^{k+n-1} \\
&= p^2\ q^n \sum_{k=1}^{+\infty} q^{2k-2} \\
&= p^2\ q^n \sum_{k=1}^{+\infty} \left(q^2\right)^{k-1} \\
&= p^2\ q^n \sum_{k=0}^{+\infty} \left(q^2\right)^{k} && \textit{(par décalage d'indice)} \\
&= p^2\ q^n\ \frac{1}{1-q^2} && \textit{(en reconnaissant la somme d'une série géométrique de raison } q^2 \in\ ]-1,1[\textit{)} \\
&= p^{\cancel{2}}\ q^n\ \frac{1}{\cancel{(1-q)}\ (1+q)} \ = \ \frac{p\ q^n}{1+q}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}\big([X_1 - X_2 = n]\big) = \frac{p\,q^n}{1+q}}$$

- On vient de démontrer que pour tout couple (U, V) de v.a.r. indépedantes et de même loi géométrique on a :

$$\mathbb{P}([U - V = n]) = \frac{p\, q^n}{1+q}$$

$$\boxed{\text{En choisissant } U = Z_2 \text{ et } V = Z_1, \text{ on obtient : } \mathbb{P}([Z_2 - Z_1 = n]) = \frac{p\, q^n}{1+q}.}$$

- Et ainsi :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([\ \Delta = n]) &= \mathbb{P}([X_1 - X_2 = n]) \quad + \quad \mathbb{P}([X_2 - X_1 = n]) \\ &= 2\ \mathbb{P}([X_1 - X_2 = n]) \ = \ 2\ \frac{p\, q^n}{1+q} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}([\ \Delta = n]) \ = \ 2\ \frac{p\, q^n}{1+q}.}$$

Commentaire

- Lorsque deux v.a.r. X_1 et X_2 ont même loi, on a évidemment, pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$:

$$\mathbb{P}\big(\,[a \leqslant X_1 \leqslant b]\,\big) \ = \ \mathbb{P}\big(\,[a \leqslant X_2 \leqslant b]\,\big)$$

Ce type de résultat est vérifié pour tout événement écrit avec une seule v.a.r. (on peut alors remplacer X_1 par X_2).

- Lorsque l'on travaille sur une somme de v.a.r. , il faut faire attention. De manière générale :

$$\mathbb{P}([X_1 + X_2 = n]) \ \cancel{=}\ \mathbb{P}([X_1 + X_1 = n]) = \mathbb{P}([\ 2\, X_1 = n])$$

On ne peut remplacer la v.a.r. X_2 par la v.a.r. X_1 déjà présente dans l'expression. Par contre, si on dispose d'une autre v.a.r. X_3 elle aussi de même loi que X_1 et X_2, on peut écrire :

$$\mathbb{P}([X_1 + X_2 = n]) \ = \ \mathbb{P}([X_1 + X_3 = n])$$

Cela peut être vu comme un renommage de la v.a.r. considéré.

- C'est cette idée qui nous a permis d'établir l'égalité :

$$\mathbb{P}([X_1 - X_2 = n]) \ = \ \mathbb{P}([X_2 - X_1 = n])$$

Il était aussi possible d'effectuer le calcul de $\mathbb{P}([X_2 - X_1 = n])$ en mettant en place de nouveau la rédaction à l'aide de la formule des probabilités totales.
La famille $([X_1 = k])_{k \in \mathbb{N}^*}$ est un système complet d'événements.
Ainsi, par la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([X_2 - X_1 = n]) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_1 = k] \ \cap \ [X_2 - X_1 = n]) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_1 = k] \ \cap \ [X_2 = k + n]) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_1 = k]) \ \times \ \mathbb{P}([X_2 = k + n]) && \textit{(car } X_1 \textit{ et } X_2 \textit{ sont indépendantes)} \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} p\ q^{k-1} \ \times \ p\ q^{k+n-1} \ = \ \frac{p\, q^n}{1+q} \end{aligned}$$

□

4. ***a)*** Montrer que Δ admet une espérance $\mathbb{E}(\Delta)$ et la calculer.

Démonstration.

- Tout d'abord : $\Delta = |X_1 - X_2| \geqslant 0$.

$$\boxed{\text{Les v.a.r. } X_1 \text{ et } X_2 \text{ étant à valeurs entières, } \Delta(\Omega) \subset \mathbb{N}.}$$

- La v.a.r. Δ admet une espérance si et seulement si la série $\sum n\, \mathbb{P}\big([\Delta = n]\big)$ est absolument convergente. Cette série étant à termes positifs, cela revient à démontrer qu'elle est convergente.
- Soit $N \in \mathbb{N}$.

$$\begin{array}{rcll} \sum\limits_{k=0}^{N} k\, \mathbb{P}\big([\Delta = k]\big) & = & \sum\limits_{k=1}^{N} k\, \mathbb{P}\big([\Delta = k]\big) & \\ & = & \sum\limits_{k=1}^{N} k\, \mathbb{P}\big([\Delta = k]\big) & \\ & = & \sum\limits_{k=1}^{N} k\, \dfrac{2\, p\, q^k}{1+q} & \textit{(d'après la question précédente et car } k \geqslant 1\textit{)} \\ & = & 2\, \dfrac{p\, q}{1+q} \sum\limits_{k=1}^{N} k\, q^{k-1} & \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} \quad 2\, \dfrac{\cancel{p}\, q}{1+q}\, \dfrac{1}{(1-q)^{\cancel{2}}} \end{array}$$

La limite est obtenue en reconnaissant la somme partielle d'ordre N d'une série géométrique dérivée première de raison $q \in \,]-1, 1[$.
On en déduit que Δ admet une espérance.

$$\boxed{\text{De plus : } \mathbb{E}(\Delta) = \dfrac{2\, q}{(1+q)(1-q)}.}$$

□

b) Montrer : $\mathbb{E}((X_1 - X_2)^2) = 2\, \mathbb{V}(X_1)$. En déduire que Δ admet une variance $\mathbb{V}(\Delta)$ et la calculer.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$(X_1 - X_2)^2 \;=\; {X_1}^2 - 2\, X_1 X_2 + {X_2}^2$$

La v.a.r. $(X_1 - X_2)^2$ admet une espérance car elle est la combinaison linéaire de v.a.r. qui en admettent une. Plus précisément :

× ${X_1}^2$ (resp. ${X_2}^2$) admet une espérance car X_1 suit une loi géométrique et admet donc un moment d'ordre 2.

× $X_1\, X_2$ admet une espérance car X_1 et X_2 admettent toutes les deux un moment d'ordre 2.

$$\boxed{\text{La v.a.r. } (X_1 - X_2)^2 \text{ admet une espérance.}}$$

- De plus :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{E}\big((X_1 - X_2)^2\big) & = & \mathbb{E}\big({X_1}^2 - 2\, X_1 X_2 + {X_2}^2\big) & \\ & = & \mathbb{E}\big({X_1}^2\big) - 2\, \mathbb{E}\big(X_1 X_2\big) + \mathbb{E}\big({X_2}^2\big) & \textit{(par linéarité de l'espérance)} \\ & = & \mathbb{E}\big({X_1}^2\big) - 2\, \mathbb{E}\big(X_1\big)\, \mathbb{E}\big(X_2\big) + \mathbb{E}\big({X_2}^2\big) & \textit{(car les v.a.r. } X_1 \textit{ et } X_2 \textit{ sont indépendantes)} \\ & = & \mathbb{E}\big({X_1}^2\big) - 2\, \mathbb{E}\big(X_1\big)\, \mathbb{E}\big(X_1\big) + \mathbb{E}\big({X_1}^2\big) & \textit{(les v.a.r. } X_1 \textit{ et } X_2 \textit{ ont même loi donc } \mathbb{E}(X_1) = \mathbb{E}(X_2) \textit{ et } \mathbb{E}(X_1^2) = \mathbb{E}(X_2^2)\textit{)} \\ & = & 2\, \Big(\mathbb{E}\big({X_1}^2\big) - \mathbb{E}\big(X_1\big)^2\Big) \;=\; 2\, \mathbb{V}(X_1) & \end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{E}\big((X_1 - X_2)^2\big) \;=\; 2\, \mathbb{V}(X_1)}$$

Commentaire

On pouvait aussi faire ce calcul de la façon ci-dessous.

- Tout d'abord, par linéarité de l'espérance :
$$\mathbb{E}(X_1 - X_2) = \mathbb{E}(X_1) - \mathbb{E}(X_2) = 0$$
car X_1 et X_2 ont même loi.
- Ainsi :
$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left((X_1 - X_2)^2\right) &= \mathbb{V}(X_1 - X_2) + \cancel{(\mathbb{E}(X_1 - X_2))^2} && \textit{(par formule de Koenig-Huygens)} \\ &= \mathbb{V}(X_1) + \mathbb{V}(-X_2) && \textit{(par indépendance de } X_1 \textit{ et } X_2\textit{)} \\ &= \mathbb{V}(X_1) + (-1)^2\, \mathbb{V}(X_2) \\ &= 2\, \mathbb{V}(X_1) && \textit{(car } X_1 \textit{ et } X_2 \textit{ ont même loi)} \end{aligned}$$

- Remarquons alors : $\Delta^2 = |X_2 - X_1|^2 = (X_2 - X_1)^2$.
On en conclut, d'après le point précédent, que la v.a.r. Δ admet un moment d'ordre 2.
De plus :
$$\begin{aligned} \mathbb{V}(\Delta) &= \mathbb{E}(\Delta^2) - \big(\mathbb{E}(\Delta)\big)^2 && \textit{(par la formule de Kœnig-Huygens)} \\ &= 2\, \mathbb{V}(X_1) - \left(\frac{2\,q}{(1+q)\,(1-q)}\right)^2 \\ &= 2\, \frac{q}{p^2} - \frac{4\,q^2}{(1+q)^2\,(1-q)^2} && \textit{(car } X_1 \hookrightarrow \mathcal{G}(p)\textit{)} \\ &= \frac{2\,q}{p^2} \left(1 - \frac{2\,q}{(1+q)^2}\right) \\ &= \frac{2\,q}{p^2}\, \frac{(1+q)^2 - 2\,q}{(1+q)^2} = \frac{2}{p^2}\, \frac{(1 + \cancel{2q} + q^2) - \cancel{2q}}{(1+q)^2} \end{aligned}$$
$$\boxed{\mathbb{V}(\Delta) = 2\, \frac{q\,(1+q^2)}{p^2\,(1+q)^2}}$$
□

5. Montrer que l'événement A est égal à l'événement $[X_3 > \Delta]$.

Démonstration.

- Remarquons tout d'abord :

$$A \;=\; [\min(X_1, X_2) + X_3 > \max(X_1, X_2)] \;=\; [X_3 > \max(X_1, X_2) - \min(X_1, X_2)]$$

- Démontrons alors : $\Delta = \max(X_1, X_2) - \min(X_1, X_2)$.
  Soit $\omega \in \Omega$.

$$\begin{array}{rcl} \Delta(\omega) & = & |X_2(\omega) - X_1(\omega)| \\[6pt] & = & \left\{ \begin{array}{ll} X_2(\omega) - X_1(\omega) & \text{si } X_2(\omega) \geqslant X_1(\omega) \\[6pt] X_1(\omega) - X_2(\omega) & \text{si } X_2(\omega) < X_1(\omega) \end{array} \right. \\[6pt] & = & \max\big(X_1(\omega), X_2(\omega)\big) - \min\big(X_1(\omega), X_2(\omega)\big) \\[6pt] & = & \big(\max(X_1, X_2) - \min(X_1, X_2)\big)(\omega) \end{array}$$

  On a donc démontré :

$$\forall \omega \in \Omega,\ \Delta(\omega) = \big(\max(X_1, X_2) - \min(X_1, X_2)\big)(\omega)$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \Delta = \max(X_1, X_2) - \min(X_1, X_2).}$$

$$\boxed{\text{Et : } A \;=\; [X_3 > \max(X_1, X_2) - \min(X_1, X_2)] \;=\; [X_3 > \Delta].}$$

Commentaire

- On rappelle qu'une v.a.r. X est une **application** de Ω dans $\mathbb{R}$. Ainsi, démontrer l'égalité de deux v.a.r. ($X = Y$) c'est démontrer que ces deux **applications** sont égales en tout point. Plus précisément :
$$X = Y \ \Leftrightarrow\ \forall \omega \in \Omega,\ X(\omega) = Y(\omega)$$
Au passage :
  - × lorsque l'on note $X = 5$, cela signifie que la v.a.r. X est la v.a.r. constante égale à 5 (la propriété : $\forall \omega \in \Omega,\ X(\omega) = 5$ est vérifiée).
  - × lorsqu'on écrit « la v.a.r. X prend la valeur 5 si ... » signifie qu'il **existe** (au moins) un tirage $\omega \in \Omega$ pour lequel $X(\omega) = 5$.

  Il existe malheureusement des énoncés dans lesquels ces deux expressions sont confondues. Ce ne devrait pas être le cas : il n'y a pas lieu de confondre les symboles $\forall$ et $\exists$.
- On trouvera dans certains corrigés une disjonction de cas du type :

  × Si $X_1 > X_2$: alors $\max(X_1, X_2) = X_1$ et $\min(X_1, X_2) = X_2$ ...
  × Si $X_1 \leqslant X_2$: alors $\max(X_1, X_2) = X_2$ et $\min(X_1, X_2) = X_1$ ...

  Cette disjonction de cas n'a pas de sens.
  Pour comprendre pourquoi ce n'est pas le cas, il faut avoir bien saisi la différence entre la relation d'ordre opérant sur les réels et celle opérant sur les applications.
  - × Lorsque a et b sont des réels, on a :
  $$a \leqslant b \quad \texttt{OU} \quad a > b$$
  On dit que la relation d'ordre $\leqslant$ définie sur les réels est une relation d'ordre **totale** : on peut toujours comparer deux réels.
  - × La relation d'ordre sur les v.a.r. est elle aussi notée $\leqslant$ et est définie par :
  $$X_1 \leqslant X_2 \ \Leftrightarrow\ \forall \omega \in \Omega,\ X_1(\omega) \leqslant X_2(\omega)$$
  Cette relation d'ordre n'est pas **totale**. Autrement dit, il existe des v.a.r. X_1 et X_2 qui ne sont pas comparables par la relation $\leqslant$. Plus précisément, dès qu'il existe deux tirages $\omega_1 \in \Omega$ et $\omega_2 \in \Omega$ tels que :
  $$X_1(\omega_1) \leqslant X_2(\omega_1) \quad \text{et} \quad X_1(\omega_2) > X_2(\omega_2)$$
  alors aucune des relations : $X_1 \leqslant X_2$ et $X_1 > X_2$ n'est vérifiée puisque chacune de ces deux inégalités définie une propriété qui doit être vérifiée **pour tout** ω.

  La relation d'ordre définie sur les v.a.r. est dite **partielle** (on ne peut pas comparer tous les v.a.r.). La disjonction de cas présentée plus haut fait l'hypothèse forte que l'on peut comparer les v.a.r. X_1 et X_2. Cette hypothèse n'est pas raisonnable et une telle disjonction n'a donc pas lieu d'être.

□

6. a) En déduire : $\mathbb{P}(A) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([\Delta = k])\, \mathbb{P}([X_3 > k])$.

Démonstration.
La famille $([\Delta = k])_{k\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements.
Ainsi, par la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X_3 > \Delta]) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([\Delta = k] \cap [X_3 > \Delta]) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([\Delta = k] \cap [X_3 > k]) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([\Delta = k]) \times \mathbb{P}([X_3 > k]) \quad \textit{(car } \Delta \textit{ et } X_3 \textit{ sont indépendantes)}
\end{aligned}$$

L'indépendance de X_3 et Δ est une conséquence du lemme des coalitions : comme X_1, X_2 et X_3 sont indépendantes, les v.a.r. $|X_2 - X_1|$ et X_3 sont indépendantes.

$$\boxed{\mathbb{P}([X_3 > \Delta]) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([\Delta = k]) \times \mathbb{P}([X_3 > k])}$$

□

b) Exprimer $\mathbb{P}(A)$ à l'aide de p et q.

Démonstration.

- D'après la question précédente :

$$\mathbb{P}([X_3 > \Delta]) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([\Delta = k]) \times \mathbb{P}([X_3 > k])$$

- Or :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([\Delta = 0]) \times \mathbb{P}([X_3 > 0]) &= \mathbb{P}([\Delta = 0]) \times 1 \quad \textit{(car } [X_3 > 0] = \Omega \textit{ puisque } X_3(\Omega) = \mathbb{N}^* \textit{)} \\
&= \frac{p}{1+q} \quad \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{2.}}\textit{)}
\end{aligned}$$

- Et, pour tout $k \in \mathbb{N}$: $\mathbb{P}([X_3 > k]) = q^k$.

Commentaire

- On utilise ici ce résultat sans donner la démonstration car elle n'est pas exigée par l'énoncé (ce qui arrive parfois).
- Il faut savoir démontrer cette propriété.
  Pour ce faire, démontrons tout d'abord :

$$\mathbb{P}([X > k]) = 1 - \mathbb{P}\Big(\overline{[X > k]}\Big) = 1 - \mathbb{P}([X \leqslant k])$$

Par ailleurs : $[X \leqslant k] = \bigcup\limits_{i=1}^{k} [X = i]$. On en déduit :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X \leqslant k]) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{k} [X = i]\right) \\
&= \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}([X = i]) \quad \textit{(par incompatibilité)} \\
&= \sum_{i=1}^{k} p\, q^{i-1} = p \sum_{i=0}^{k-1} q^i = p\, \frac{1-q^k}{1-q} = 1 - q^k
\end{aligned}$$

Enfin : $\mathbb{P}([X > k]) = 1 - \mathbb{P}([X \leqslant k]) = 1 - (1 - q^k) = q^k$.

- On en conclut :

$$\begin{array}{rcl}
\mathbb{P}([X_3 > \Delta]) & = & \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([\Delta = k]) \ \times \ \mathbb{P}([X_3 > k]) \\
& = & \mathbb{P}([\Delta = 0]) \ \times \ \mathbb{P}([X_3 > 0]) + \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([\Delta = k]) \ \times \ \mathbb{P}([X_3 > k]) \\
& = & \dfrac{p}{1+q} + \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{2\,p\,q^k}{1+q} \ \times \ q^k \\
& = & \dfrac{p}{1+q} + 2\ \dfrac{p}{1+q} \sum\limits_{k=1}^{+\infty} q^{2k} \\
& = & \dfrac{p}{1+q} + 2\ \dfrac{p}{1+q} \left(\sum\limits_{k=0}^{+\infty} (q^2)^k - 1 \right) \\
& = & \dfrac{p}{1+q} + 2\ \dfrac{p}{1+q} \left(\dfrac{1}{1-q^2} - 1 \right) \qquad \textit{(en reconnaissant la somme d'une série géométrique de raison } q^2 \in \,]-1,1[\textit{)} \\
& = & \dfrac{p}{1+q} \left(1 + 2\ \dfrac{\cancel{1} - (\cancel{1} - q^2)}{1-q^2} \right) \\
& = & \dfrac{p}{1+q}\ \dfrac{1-q^2+2q^2}{1-q^2} \\
& = & \dfrac{p}{1+q}\ \dfrac{1+q^2}{1-q^2} \ = \ \dfrac{\cancel{1-q}}{1+q}\ \dfrac{1+q^2}{\cancel{(1-q)}(1+q)} \ = \ \dfrac{1+q^2}{(1+q)^2}
\end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathbb{P}\big(\,[X_3 > \Delta]\,\big) = \dfrac{1+q^2}{(1+q)^2}.}$$

□

Partie II

Dans cette partie, X est une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p, $p \in \,]0,1[$ et Y est une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ, $\lambda \in \,]0,+\infty[$. On note $q = 1-p$. On suppose que X et Y sont indépendantes, c'est à dire :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \forall t \in [0,+\infty[, \quad \mathbb{P}([X = k] \cap [Y \leqslant t]) = \mathbb{P}([X = k])\,\mathbb{P}([Y \leqslant t])$$

7. Rappeler une densité de Y ainsi que son espérance et sa variance.

Démonstration.

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{Comme } Y \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda), \text{ alors une densité de } Y \text{ est : } f_Y : x \mapsto \left\{ \begin{array}{cl} \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{array} \right. \\ \text{De plus : } \mathbb{E}(Y) = \dfrac{1}{\lambda} \text{ et } \mathbb{V}(Y) = \dfrac{1}{\lambda^2}. \end{array}}$$

□

8. On définit la variable aléatoire $Z = \dfrac{Y}{X}$.

a) Montrer : $\forall t \in [0, +\infty[$, $\mathbb{P}([Z \geqslant t]) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X = k])\, \mathbb{P}([Y \geqslant kt])$.

Démonstration.

Soit $t \in [0, +\infty[$.

- Comme $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, alors la famille $([X = k])_{k\in\mathbb{N}^*}$ forme un système complet d'événements.
- Ainsi, par formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([Z \geqslant t]) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X = k] \cap [Z \geqslant t]) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}\left([X = k] \cap \left[\frac{Y}{X} \geqslant t\right]\right) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}\left([X = k] \cap \left[\frac{Y}{k} \geqslant t\right]\right) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X = k] \cap [Y \geqslant kt]) && \textit{(car } k > 0\textit{)} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X = k])\ \mathbb{P}([Y \geqslant kt]) && \textit{(car } X \textit{ et } Y \textit{ sont indépendantes)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall t \in [0, +\infty[,\ \mathbb{P}([Z \leqslant t]) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X = k])\ \mathbb{P}([Y \geqslant kt])}$$

□

b) En déduire : $\forall t \in [0, +\infty[$, $\mathbb{P}([Z \geqslant t]) = \dfrac{p\,\mathrm{e}^{-\lambda\, t}}{1 - q\,\mathrm{e}^{-\lambda\, t}}$.

Démonstration.

Soit $t \in [0, +\infty[$.

- D'après la question précédente :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([Z \geqslant t]) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X = k])\ \mathbb{P}([Y \geqslant kt]) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} q^{k-1}\, p\ \big(1 - F_Y(kt)\big) && \textit{(car } X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)\textit{)} \\
&= p \sum_{k=1}^{+\infty} q^{k-1}\ \mathrm{e}^{-\lambda\, kt} && \textit{(car } Y \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda) \textit{ et } kt \geqslant 0\textit{)} \\
&= p\,\mathrm{e}^{-\lambda\, t} \sum_{k=1}^{+\infty} q^{k-1}\ \mathrm{e}^{-\lambda\,(k-1)t} \\
&= p\,\mathrm{e}^{-\lambda\, t} \sum_{k=0}^{+\infty} q^{k}\ \mathrm{e}^{-\lambda\, kt} && \textit{(par décalage d'indice)} \\
&= p\,\mathrm{e}^{-\lambda\, t} \sum_{k=0}^{+\infty} \big(q\ \mathrm{e}^{-\lambda\, t}\big)^k \\
&= p\,\mathrm{e}^{-\lambda\, t}\ \frac{1}{1 - q\ \mathrm{e}^{-\lambda\, t}}
\end{aligned}$$

La dernière égalité est obtenue en identifiant la somme de la série géométrique de raison $q\,\mathrm{e}^{-\lambda\, t}$ où $\left|q\,\mathrm{e}^{-\lambda\, t}\right| < 1$ (car $|q| < 1$ et $t \geqslant 0$).

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall t \in [0, +\infty[,\ \mathbb{P}([Z \geqslant t]) = \frac{p\,\mathrm{e}^{-\lambda\, t}}{1 - q\,\mathrm{e}^{-\lambda\, t}}.}$$

Commentaire

On rappelle que, si $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$, alors sa fonction de répartition F_Y est définie par :

$$F_Y : x \mapsto \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$\square$

c) Montrer que la variable aléatoire Z admet une densité et déterminer une densité de Z.

Démonstration.

- Tout d'abord :
  - × comme $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$, alors : $Y(\Omega) = [0, +\infty[$,
  - × comme $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, alors : $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } Z(\Omega) \subset [0, +\infty[.}$$

- Déterminons la fonction de répartition F_Z de Z.
  Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent :
  - × si $x \in]-\infty, 0[$, alors $[Z \leqslant x] = \varnothing$ (car $Z(\Omega) \subset [0, +\infty[$). Donc :

$$F_Z(x) \ = \ \mathbb{P}([Z \leqslant x]) \ = \ \mathbb{P}(\varnothing) \ = \ 0$$

  - × si $x \in [0, +\infty[$, alors :

$$F_Z(x) \ = \ \mathbb{P}([Z \leqslant x]) \ = \ 1 - \mathbb{P}([Z > x])$$

Or : $[Z \geqslant x] \ = \ [Z = x] \cup [Z > x]$.
Les événements $[Z = x]$ et $[Z > x]$ sont incompatibles. Donc :

$$\mathbb{P}([Z \geqslant x]) \ = \ \mathbb{P}([Z = x]) + \mathbb{P}([Z > x])$$

On en déduit :

$$F_Z(x) \ = \ 1 - \big(\mathbb{P}([Z \geqslant x]) - \mathbb{P}([Z = x])\big) \ = \ 1 - \frac{p\,\mathrm{e}^{-\lambda x}}{1 - q\,\mathrm{e}^{-\lambda x}} + \mathbb{P}([Z = x])$$

où la dernière égalité est obtenue avec la question ***8.b)***.
Déterminons alors $\mathbb{P}([Z = x])$.
Avec le même raisonnement qu'en question ***8.a)***, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([Z = x]) \ &= \ \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X = k])\ \mathbb{P}([Y = kt]) \\ &= \ 0 \qquad \textit{(car, comme } Y \textit{ est une v.a.r. à densité : } \forall a \in \mathbb{R},\ \mathbb{P}([Y = a]) = 0\textit{)} \end{aligned}$$

On en déduit :

$$F_Z(x) \ = \ 1 - \frac{p\,\mathrm{e}^{-\lambda x}}{1 - q\,\mathrm{e}^{-\lambda x}} - 0$$

$$\boxed{\text{Finalement : } F_Z : x \mapsto \begin{cases} 1 - \dfrac{p\,\mathrm{e}^{-\lambda x}}{1 - q\,\mathrm{e}^{-\lambda x}} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}.}$$

- Montrons que Z est une v.a.r. à densité.
  - × La fonction F_Z est continue :
    - sur $]-\infty, 0[$ en tant que fonction constante,
    - sur $]0, +\infty[$ en tant que quotient de fonctions continues sur $]0, +\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur cet intervalle.
    - en 0. En effet, d'une part : $\lim\limits_{x \to 0^-} F_Z(x) = 0$.
      D'autre part :
      $$\lim_{x \to 0^+} F_Z(x) \; = \; F_Z(0) \; = \; 1 - \frac{p\, e^0}{1 - q\, e^0} \; = \; 1 - \frac{p}{1-q} \; = \; 1 - \frac{p}{p} \; = \; 1 - 1 \; = \; 0$$
      On en déduit : $\lim\limits_{x \to 0^-} F_Z(x) \; = \; \lim\limits_{x \to 0^+} F_Z(x)$.

$$\boxed{\text{La fonction } F \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$$

  - × La fonction F_Z est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ avec des arguments similaires à ceux de la continuité de F_Z sur ces intervalles.

$$\boxed{\text{La fonction } F \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ sauf éventuellement en } 0.}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que la v.a.r. } Z \text{ est une v.a.r. à densité.}}$$

- Pour déterminer une densité f_Z de Z, on dérive la fonction F_Z sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ (qui sont bien des intervalles ouverts.
  - × Soit $x \in \,]-\infty, 0[$.
    $$f_Z(x) \; = \; F_Z'(x) \; = \; 0$$
  - × Soit $x \in \,]0, +\infty[$.
    $$\begin{aligned} f_Z(x) \; = \; F_Z'(x) \; &= \; -\frac{p\,(-\lambda\, e^{-\lambda\, x})\big(1 - q\, e^{-\lambda\, x}\big) - p\, e^{-\lambda\, x}\big(-q(-\lambda\, e^{-\lambda\, x})\big)}{\big(1 - q\, e^{-\lambda\, x}\big)^2} \\ &= \; \frac{\lambda\, p\, e^{-\lambda\, x}}{\big(1 - q\, e^{-\lambda\, x}\big)^2} \left(1 - \cancel{q\, e^{-\lambda\, x}} + \cancel{q\, e^{-\lambda\, x}}\right) \\ &= \; \frac{\lambda\, p\, e^{-\lambda\, x}}{\big(1 - q\, e^{-\lambda\, x}\big)^2} \end{aligned}$$
  - × On choisit : $f_Z(0) = 0$.

$$\boxed{\text{Une densité } f_Z \text{ de } Z \text{ est donc : } f_Z : x \mapsto \left\{ \begin{array}{cl} \dfrac{\lambda\, p\, e^{-\lambda\, x}}{\big(1 - q\, e^{-\lambda\, x}\big)^2} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{array} \right. .}$$

Commentaire

Lorsqu'on cherche à déterminer la fonction de répartition F_Z, on ne sait pas encore que la v.a.r. Z est une v.a.r. à densité. On ne peut donc pas utiliser l'égalité :

$$\mathbb{P}([Z > x]) \; = \; \mathbb{P}([Z \geqslant x])$$

C'est pour cela que l'on détermine $\mathbb{P}([Z = x])$.

□