EML 2010

Exercice 1

Partie I : Un endomorphisme de l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2

- On note $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2.
- On note : $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\quad F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\quad G = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\quad H = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- On note $\mathcal{S}_2$ l'ensemble des matrices carrées symétriques d'ordre 2.

1. Calculer les produits AFA, AGA, AHA.

2. Montrer que $\mathcal{S}_2$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et que (F, G, H) est une base de $\mathcal{S}_2$. Déterminer la dimension de $\mathcal{S}_2$.

On note u l'application qui à chaque matrice S de $\mathcal{S}_2$, associe la matrice $u(S) = ASA$.

a) Montrer : $\forall S \in \mathcal{S}_2,\ ASA \in \mathcal{S}_2$.

b) Montrer que u est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{S}_2$.

c) Donner la matrice de u dans la base (F, G, H) de $\mathcal{S}_2$.

Partie II : Réduction d'une matrice carrée d'ordre 3

On note : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 6 \\ 4 & 12 & 9 \end{pmatrix}$, $\quad D = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$

3. Vérifier que -4, 1, 16 sont valeurs propres de M et déterminer, pour chacune de celles-ci une base du sous-espace propre associé. Est-ce que M est diagonalisable ?

4. Déterminer une matrice P carrée d'ordre 3, inversible, de première ligne égale à $(4 \quad 4 \quad 1)$, telle que $M = PDP^{-1}$.

5. Vérifier que $(D + 4I)(D - I)(D - 16I)$ est la matrice nulle.

6. En déduire : $M^3 = 13M^2 + 52M - 64I$.

7. Établir : $u^3 = 13\,u^2 + 52u - 64e$ où e désigne l'application identité de $\mathcal{S}_2$ et où u a été définie dans la partie ***I***.

Exercice 2

On note $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application de classe C^2, définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$f(x) = x - \ln(1 + x^2)$$

et $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.
On donne la valeur approchée : $\ln(2) \approx 0,69$.

Partie I : Étude de f et tracé de $\mathcal{C}$

1. ***a)*** Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}, f'(x)$.

b) En déduire le sens de variation de f.

c) Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x)$.

2. Déterminer la limite de f en $-\infty$ et la limite de f en $+\infty$.

3. Montrer que $\mathcal{C}$ admet deux points d'inflexion dont on déterminera les coordonnées.

4. Tracer $\mathcal{C}$. On utilisera un repère orthonormé d'unité graphique 2 centimètres, et on précisera la tangente à $\mathcal{C}$ en l'origine et en chacun des points d'inflexion.

5. Calculer $\displaystyle\int_0^1 xf(x)dx$.
A cet effet, on pourra utiliser le changement de variable défini par $t = 1 + x^2$.

Partie II : Étude d'une suite et d'une série associées à f

On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $u_0 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$$

6. Montrer que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante.

7. Établir que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge et déterminer sa limite.

8. Écrire un programme en **Scilab** qui calcule et affiche un entier n tel que $u_n \leqslant 10^{-3}$.

9. ***a)*** Établir : $\forall x \in [0;1],\ f(x) \leqslant x - \dfrac{1}{2}x^2$.

b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n^2 \ \leqslant\ 2\ (u_n - u_{n+1})$.

c) Démontrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n^2$ converge.

Partie III : Étude d'une fonction de deux variables réelles associée à f

On considère l'application $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, définie, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, par :

$$F(x, y) = f(x + y) - f(x) - f(y)$$

10. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et exprimer, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, les dérivées partielles premières de F en (x, y), à l'aide de f', x et y.

11. Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système $\left\{\begin{array}{l} f'(x) = f'(y) \\ f'(x+y) = f'(x) \end{array}\right.$. En déduire les points critiques de F.

12. Est-ce que F admet un minimum local.

Exercice 3

Les deux parties sont indépendantes

Partie I

Une gare dispose de deux guichets. Trois clients notés C_1, C_2, C_3 arrivent en même temps. Les clients C_1 et C_2 se font servir tandis que le client C_3 attend puis effectue son opération dès que l'un des deux guichets se libère.

On définit X_1, X_2, X_3 les variables aléatoires égales à la durée d'opération des clients C_1, C_2, C_3 respectivement. Ces durées sont mesurées en minutes et arrondies à l'unité supérieure ou égale. On suppose que les variables X_1, X_2, X_3 suivent la loi géométrique de paramètre p, $p \in]0,1[$ et qu'elles sont indépendantes. On note $q = 1 - p$.

On note A l'événement : « C_3 termine en dernier son opération ».

Ainsi l'événement A est égal à l'événement : $[\min(X_1, X_2) + X_3 > \max(X_1, X_2)]$.

On se propose de calculer la probabilité de A.

1. Rappeler la loi de X_1 ainsi que son espérance $\mathbb{E}(X_1)$ et sa variance $\mathbb{V}(X_1)$.
On définit la variable aléatoire $\Delta = |X_1 - X_2|$.

2. Calculer la probabilité $\mathbb{P}([\Delta = 0])$.

3. Soit n un entier naturel non nul.

a) Justifier : $\mathbb{P}([X_1 - X_2 = n]) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_2 = k])\,\mathbb{P}([X_1 = n + k])$.

b) En déduire : $\mathbb{P}([\Delta = n]) = \dfrac{2pq^n}{1 + q}$.

4. *a)* Montrer que Δ admet une espérance $\mathbb{E}(\Delta)$ et la calculer.

b) Montrer : $\mathbb{E}((X_1 - X_2)^2) = 2\,\mathbb{V}(X_1)$. En déduire que Δ admet une variance $\mathbb{V}(\Delta)$ et la calculer.

5. Montrer que l'événement A est égal à l'événement $[X_3 > \Delta]$.

6. *a)* En déduire : $\mathbb{P}(A) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([\Delta = k])\,\mathbb{P}([X_3 > k])$.

b) Exprimer $\mathbb{P}(A)$ à l'aide de p et q.

Partie II

Dans cette partie, X est une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p, $p \in]0,1[$ et Y est une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ, $\lambda \in]0, +\infty[$. On note $q = 1-p$.
On suppose que X et Y sont indépendantes, c'est à dire :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \forall t \in [0, +\infty[, \quad \mathbb{P}([X = k] \cap [Y \leqslant t]) = \mathbb{P}([X = k])\,\mathbb{P}([Y \leqslant t])$$

7. Rappeler une densité de Y ainsi que son espérance et sa variance.

8. On définit la variable aléatoire $Z = \dfrac{Y}{X}$.

a) Montrer : $\forall t \in [0, +\infty[$, $\mathbb{P}([Z \geqslant t]) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X = k])\,\mathbb{P}([Y \geqslant kt])$.

b) En déduire : $\forall t \in [0, +\infty[$, $\mathbb{P}([Z \geqslant t]) = \dfrac{p\,\mathrm{e}^{-\lambda t}}{1 - q\,\mathrm{e}^{-\lambda t}}$.

c) Montrer que la variable aléatoire Z admet une densité et déterminer une densité de Z.