Autour des matrices : Annales 2015 / 2016 / 2017 / 2018 / 2019

EDHEC – 2017

- On note E l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à 2 et on rappelle que la famille (e_0, e_1, e_2) est une base de E, les fonctions e_0, e_1 e_2 étant définies par :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad e_0(t) = 1, \quad e_1(t) = t, \quad e_2(t) = t^2$$

On considère l'application φ qui, à toute fonction P de E, associe la fonction, notée $\varphi(P)$, définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (\varphi(P))(x) = \int_0^1 P(x+t)\ dt$$

- On montre que :

$$A = \mathrm{Mat}_{(e_0,e_1,e_2)}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Compléter les commandes `Scilab` suivantes pour que soit affichée la matrice A^n pour une valeur de n entrée par l'utilisateur :

```
n = input('entrez une valeur pour n : ')
A = [---]
disp(---)
```

HEC – 2017

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrés à n lignes et n colonnes à coefficients réels et B_n l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 0 ou à 1.

- *Exemple 2.* Soit B la matrice de B_3 définie par : $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On considère les instructions et la sortie (-->) **Scilab** suivantes :

```
B = [0,1,0;1,0,0;0,0,1]
P = [1,1,0;1,-1,0;0,0,1]
inv(P) * B * P
```

```
-->
    1.     0.     0.
    0.    -1.     0.
    0.     0.     1.
```

a) Déduire les valeurs propres de B de la séquence **Scilab** précédente.

b) Déterminer une base de chacun des sous-espaces propres de B.

HEC – 2018

À la fin de l'exercice 1 de l'épreuve `HEC 18`, on trouvait une question **Scilab** qui consistait à écrire une matrice $n \times n$ dont les coefficients $q(\ell, k)$ étaient donnés par la valeur d'une fonction $q : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ étudiée dans le sujet. Plus pécisément, les questions précédant le **Scilab** permettait d'affirmer :

× $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $q(1, k) = 1$.

× $\forall \ell \geqslant k$, $q(\ell, k) = p(k) = q(k, k)$.

× $\forall k < \ell$, $q(\ell, k) = q(k, k)$.

× $\forall \ell \in [\![1, n]\!]$, $q(\ell, \ell) = 1 + q(\ell - 1, \ell)$.

× $\forall k > \ell$, $q(\ell, k) = q(\ell - 1, k) + q(\ell, k - \ell)$.

- La fonction **Scilab** suivante dont le script est incomplet (lignes 5 et 6), calcule une matrice `qmatrix(n)` telle que pour chaque couple $(\ell, k) \in [\![1, n]\!]^2$, le coefficient situé à l'intersection de la ligne ℓ et de la colonne k est égal à $q(\ell, k)$.

```
1  function q = qmatrix(n)
2      q = ones(n, n)
3      for L = 2:n
4          for K = 2:n
5              if (K<L) then
6                  q(L,K) = ................
7              elseif (K==L) then
8                  q(L,K) = ..............
9              else
10                 q(L,K) = q(L-1,K) + q(L,K-L)
11             end
12         end
13     end
14 endfunction
```

L'application de la fonction `qmatrix` à l'entier $n = 9$ fournit la sortie suivante :

```
--> qmatrix(9)
    1.    1.    1.    1.    1.    1.    1.    1.    1.
    1.    2.    2.    3.    3.    4.    4.    5.    5.
    1.    2.    3.    4.    5.    7.    8.   10.   12.
    1.    2.    3.    5.    6.    9.   11.   15.   18.
    1.    2.    3.    5.    7.   10.   13.   18.   23.
    1.    2.    3.    5.    7.   11.   14.   20.   26.
    1.    2.    3.    5.    7.   11.   15.   21.   28.
    1.    2.    3.    5.    7.   11.   15.   22.   29.
    1.    2.    3.    5.    7.   11.   15.   22.   30.
```

a) Compléter les lignes 5 et 6 du script de la fonction `qmatrix`.

b) Donner un script **Scilab** permettant de calculer $p(n) = q(n, n)$ à partir d'une valeur de n entrée au clavier.

HEC – 2019

La fonction **Scilab** suivante permet de multiplier la $i^{\text{ème}}$ ligne L_i d'une matrice A par une réel sans modifier ses autres lignes, c'est-à-dire de lui appliquer l'opération élémentaire $L_i \leftarrow a\, L_i$ (où $a \neq 0$).

```
function B = multilig(a, i, A)
    [n, p] = size(A)
    B = A
    for j = 1:p
        B(i, j) = a * B(i,j)
    end
endfunction
```

a) Donner le code **Scilab** de deux fonctions `adlig` (d'arguments `b`, `i`, `j`, `A`) et `echlig` (d'arguments `i`, `j`, `A`) permettant d'effectuer respectivement les autres opérations sur les lignes d'une matrice :

$$Li \leftarrow L_i + b\, L_j \ (i \neq j) \quad \text{et} \quad L_i \leftrightarrow L_j \ (i \neq j)$$

b) Expliquer pourquoi la fonction `multligmat` suivante retourne le même résultat `B` que la fonction `multlig`.

```
function B = multiligmat(a, i, A)
    [n, p] = size(A)
    D = eye(n, n)
    D(i, i) = a
    B = D * A
endfunction
```