Fonctions de 2 variables : Annales 2015 / 2016 / 2017 / 2018 / 2019

EDHEC – 2017

- On considère la fonction f qui à tout couple (x, y) de $\mathbb{R}^2$ associe le réel :

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 2\,(x - y)^2$$

- On montre que f admet des minima globaux en $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ et $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

a) Compléter la deuxième ligne du script suivant afin de définir la fonction f.

```
1  function z = f(x,y)
2      z = ---
3  endfunction
4  x = linspace(-2,2,101)
5  y = x
6  fplotd3d(x,y,f)
```

Démonstration.
Il suffit de recopier la définition de la fonction f.

```
2      z = x^4 + y^4 - 2 * (x - y)^2
```

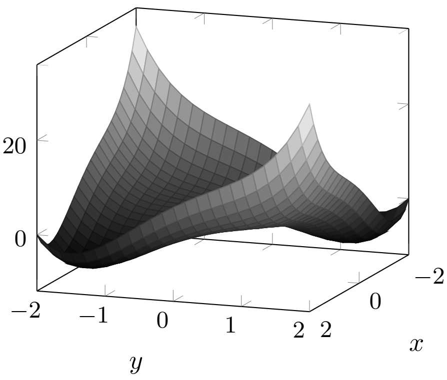
Commentaire

On rappelle qu'il n'est pas obligatoire de recopier tout le programme lorsqu'il est demandé de compléter un programme à trou.

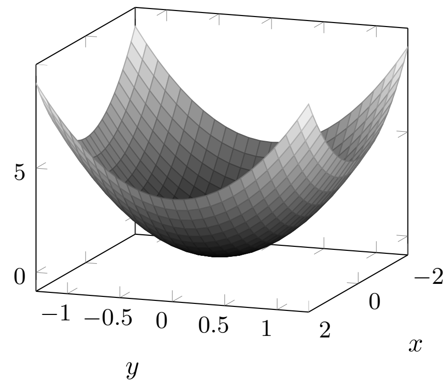
□

b) Le script précédent, une fois complété, renvoie l'une des trois nappes suivantes. Laquelle ?

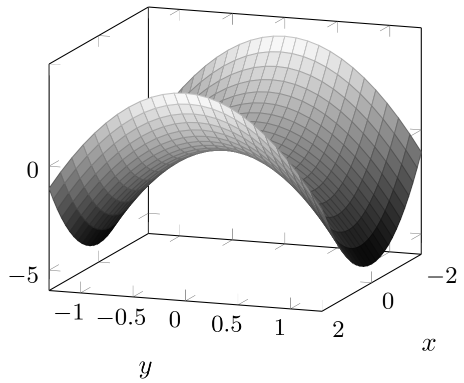
Justifier la réponse.



Nappe 1



Nappe 2



Nappe 3

Démonstration.

- D'après l'étude précédente, la fonction f possède un minimum global réalisé en les deux points $((\sqrt{2}, -\sqrt{2}), (-\sqrt{2}, \sqrt{2}))$.
- On peut écarter la deuxième nappe qui représente une fonction n'admettant un minimum global qu'en un point.
- On peut écarter la troisième nappe qui représente une fonction n'admettant pas de minimum global (elle admet par contre un point selle).
- Seule la première nappe représente une fonction admettant un minimum global réalisé en deux points. C'est donc la représentation de la fonction f considéré.

$$\boxed{\text{Le script précédent renvoie la première nappe.}}$$

Commentaire

Il était difficile de lire les coordonnées des deux points atteignant le minimum sur l'énoncé original. Pour être certain d'avoir des points (même si la photocopie en noir et blanc rend le graphique peut lisible), il est conseillé de lister les propriétés que doit avoir la nappe représentant f.

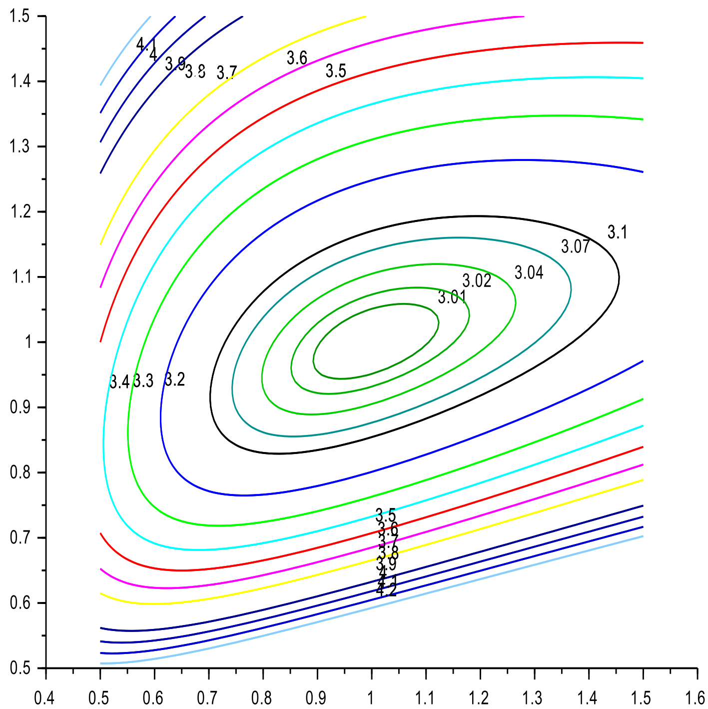
□

ECRICOME – 2019

On considère la fonction f définie sur l'ouvert de $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*, \ f(x,y) = \frac{x}{y^2} + y^2 + \frac{1}{x}$$

On utilise **Scilab** pour tracer les lignes de niveau de la fonction f. On obtient le graphe suivant :



Établir une conjecture à partir du graphique quant à l'existence d'un extremum local pour f, dont on donnera la nature, la valeur approximative et les coordonnées du point en lequel il semble être atteint.

Démonstration.

- Le graphique fait apparaître les lignes de niveau de la fonction f. Ces courbes relient les points $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ pour lesquels la fonction f prend la même valeur. Sur la représentation, on constate que la fonction f prend des valeurs de plus en plus grande en s'écartant du point $(1,1)$.
- De plus, en ce point, la valeur de la fonction f est :

$$f(1,1) \ = \ \frac{1}{1^2} + 1^2 + \frac{1}{1} \ = \ 3$$

Cette valeur est plus faible que les valeurs des lignes de niveau apparaissant sur le graphique.

$\boxed{\text{On peut émettre la conjecture que la fonction } f \text{ admet un minimum local, de valeur 3, au point } (1,1).}$ □