# Autour des v.a.r. : Annales 2015 / 2016 / 2017 / 2018 / 2019

## I. Simulation d'expériences aléatoires et de variables aléatoires

### I.1. Simulation de variables aléatoires

EML – 2015

- On considère une v.a.r. $U$ tel que : $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1[)$.
- On démontre que la v.a.r. $V = -\dfrac{1}{\lambda}\ln(1-U)$ est telle que $V \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$.

***a)*** Écrire une fonction en **Scilab** qui, étant donné un réel $\lambda > 0$, simule la loi exponentielle de paramètre $\lambda$.

EDHEC – 2016

- On désigne par $p$ un réel de $]0,1[$.
- On considère deux variables aléatoires indépendantes $U$ et $V$, telles que $U$ suit la loi uniforme sur $[-3,1]$, et $V$ suit la loi uniforme sur $[-1,3]$.
- On considère également une variable aléatoire $Z$, indépendante de $U$ et $V$, dont la loi est donnée par :
$$\mathbb{P}([Z=1]) = p \quad \text{et} \quad \mathbb{P}([Z=-1]) = 1-p$$
Enfin, on note $X$ la v.a.r. définie par :
$$\forall \omega \in \Omega,\ X(\omega) = \begin{cases} U(\omega) & \text{si} \quad Z(\omega) = 1 \\ V(\omega) & \text{si} \quad Z(\omega) = -1 \end{cases}$$

***a)*** Vérifier que l'on a :
$$X = U\,\frac{1+Z}{2} + V\,\frac{1-Z}{2}$$

***b)*** Soit $T$ une variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli de paramètre $p$.
Déterminer la loi de $2T-1$.

***c)*** On rappelle que `grand(1,1,'unf',a,b)` et `grand(1,1,'bin',p)`sont des commandes `Scilab` permettant de simuler respectivement une variable aléatoire à densité suivant la loi uniforme sur $[a,b]$ et une variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli de paramètre $p$.
Écrire des commandes `Scilab` permettant de simuler $U$, $V$, $Z$, puis $X$.

EDHEC – 2016

- On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires, mutuellement indépendantes, suivant toutes la loi géométrique de paramètre $x$, et on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

***a)*** On rappelle que la commande `grand(1,n,'geom',p)` permet à **Scilab** de simuler n variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi géométrique de paramètre $p$.
Compléter les commandes **Scilab** suivantes pour qu'elles simulent la variable aléatoire $S_n$.

```
1 n = input('entrez une valeur de n supérieure à 1 : ')
2 S = ---
3 disp(S)
```

EDHEC – 2017

- Soit $V$ une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 1, dont la fonction de répartition est la fonction $F_V$ définie par : $F_V(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$.
  On pose $W = -\ln(V)$ et on admet que $W$ est aussi une variable aléatoire dont le fonction de répartition est notée $F_W$. On dit que $W$ suit une loi de Gumbel.
- On désigne par $n$ un entier naturel non nul et par $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé, indépendantes et suivant la loi $\mathcal{E}(1)$.
- On considère la variable aléatoire $Y_n$ définie par $Y_n = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, c'est à dire que pour tout $\omega$ de $\Omega$, on a : $Y_n(\omega) = \max(X_1(\omega), X_2(\omega), \ldots, X_n(\omega))$.
  On admet que $Y_n$ est une variable aléatoire à densité.

***a)*** On pose $Z_n = Y_n - \ln(n)$.
On rappelle que `grand(1,n,'exp',1)` simule $n$ variables aléatoires indépendantes et suivant toutes la loi exponentielle de paramètre 1. Compléter la déclaration de fonction `Scilab` suivante afin qu'elle simule la variable aléatoire $Z_n$.

```
function Z = f(n)
    x = grand(1,n,'exp',1)
    Z = ---
endfunction
```

***b)*** Voici deux scripts :

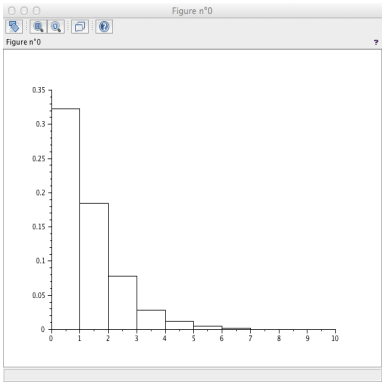
```
V = grand(1,10000,'exp',1)
W = -log(V)
s = linspace(0,10,11)
histplot(s,W)
```

Script (1)

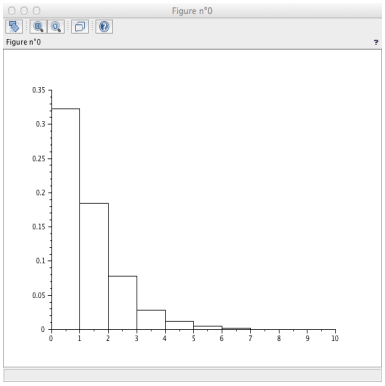
```
n = input('entrez la valeur de n : ')
Z = [] // la matrice-ligne Z est vide
for k = 1 :10000
    Z = [Z,f(n)]
end
s = linspace(0,10,11)
histplot(s,Z)
```

Script (2)

Chacun des scripts simule 10000 v.a.r. indépendantes, regroupe les valeurs renvoyées en 10 classes qui sont les intervalles $[0, 1]$, $]1, 2]$, $]2, 3]$, …, $]9, 10]$ et trace l'histogramme correspondant (la largeur de chaque rectangle est égale à 1 et leur hauteur est proportionnelle à l'effectif de chaque classe). Le script (1) dans lequel les v.a.r. suivent la loi de Gumbel (loi suivie par $W$), renvoie l'histogramme (1) ci-dessous, alors que le script (2) dans lequel les v.a.r. suivent la même loi que $Z_n$, renvoie l'histogramme (2) ci-dessous, pour lequel on a choisi $n = 1000$.



Histogramme (1)



Histogramme (2) pour $n = 1000$

Quelle conjecture peut-on émettre quant au comportement de la suite des v.a.r. $(Z_n)$ ?

HEC – 2017

- On note :
  - × $a$ et $b$ deux réels strictement positifs ;
  - × $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé sur lequel sont définies toutes les variables aléatoires du problème ;
  - × $G_{a,b}$ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $G_{a,b}(x) = \exp\left(-ax - \frac{b}{2}x^2\right)$.
- Pour tout $a > 0$ et pour tout $b > 0$, on pose : $f_{a,b}(x) = \begin{cases} (a+bx)\ \exp\left(-ax - \frac{b}{2}x^2\right) & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

  *On dit qu'une variable aléatoire suit la loi exponentielle linéaire de paramètres $a$ et $b$, notée $\mathcal{E}_\ell(a,b)$, si elle admet $f_{a,b}$ pour densité.*
- Soit $Y$ une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 1.

  On pose : $X = \dfrac{-a + \sqrt{a^2 + 2bY}}{b}$. On montre alors que $X$ suit la loi $\mathcal{E}_\ell(a,b)$.
- On montre ensuite que, si $U$ est une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0,1[$, alors $Y = -\ln(1-U)$ suit la loi $\mathcal{E}(1)$.

***a)*** La fonction **Scilab** suivante génère des simulations de la loi exponentielle linéaire.

```
1  function x = grandlinexp(a,b,n)
2      u = rand(n,1)
3      y = ............
4      x = (-a + sqrt(a^2 + 2 * b * y)) / b
5  endfunction
```

Quelle est la signification de la ligne de code 2 ?

***b)*** Compléter la ligne de code 3 pour que la fonction `grandlinexp` génère les simulations désirées.

***c)*** De quel nombre réel peut-on penser que les six valeurs générées par la boucle **Scilab** suivante fourniront des valeurs approchées de plus en plus précises et pourquoi ?

```
1  for k = 1:6
2      mean(grandlinexp(0, 1, 10^k)
3  end
```

EDHEC – 2019

- Soit $\theta \in ]0, \frac{1}{2}[$. On considère une v.a.r. $X$ à valeurs strictement positves, de densité :

$$f : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{\theta\, x^{1+\frac{1}{\theta}}} & \text{si } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

- On devait démontrer : $Y = \ln(X) \hookrightarrow \mathcal{E}\left(\frac{1}{\theta}\right)$.
- On rappelle qu'en **Scilab**, la commande `grand(1, 1, 'exp', 1/lambda)` simule une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda$.

Écrire des commandes **Scilab** utilisant `grand` et permettant de simuler $X$.

ESSECI – 2017

- Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta > 0$. On dit qu'une variable aléatoire réelle à densité suit une loi de Laplace de paramètre $(\alpha, \beta)$, notée $\mathcal{L}(\alpha, \beta)$, si elle admet comme densité la fonction $f$ donnée par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \frac{1}{2\beta} \exp\left(-\frac{|t-\alpha|}{\beta}\right)$$

- On suppose que $X$ suit la loi $\mathcal{L}(0,1)$.
  Montrer que $\beta X + \alpha$ suit la loi $\mathcal{L}(\alpha, \beta)$.
- Soit $U$ une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre 1 et $V$ une variable aléatoire qui suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$ et indépendante de $U$.
  On montre que $X = (2V-1)U$ suit la loi $\mathcal{L}(0,1)$.

***a)*** Compléter la définition Scilab ci-dessous pour que la fonction ainsi définie réalise la simulation d'une variable aléatoire qui suit la loi $\mathcal{L}(\alpha, \beta)$ :

```
function r = Laplace(alpha,beta)
    if ... <= 1/2
        V = 1
    else
        V = 0
    end
    X = (2 * V - 1) * grand(1, 1, 'exp', 1)
    r = ...
endfunction
```

*L'énoncé donnait l'aide **Scilab** suivante en fin de sujet :*

**Aide Scilab.** La fonction Scilab `grand` permet de simuler, en particulier, les lois exponentielles et uniformes discrètes. Par exemple :

× `grand(3,2,'exp',0.5)` renvoie une matrice aléatoire $(3,2)$ dont les coefficients sont des variables indépendantes qui suivent la loi exponentielle d'espérance $0,5$.

× `grand(1,2,'uin',-1,3)` renvoie une matrice aléatoire $(1,2)$ dont les coefficients sont des variables indépendantes qui suivent la loi uniforme discrètes sur $\mathcal{U}(\llbracket -1, 3 \rrbracket)$.

EDHEC – 2018

- Soit $a$ un réel strictement positif et $f$ la fonction définie par : $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{a}\, \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a}} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

***1.*** Montrer que la fonction $f$ est une densité.
*Dans la suite de l'exercice, on considère une variable aléatoire $X$ de densité $f$.*

***2.*** Déterminer la fonction de répartition $F_X$ de $X$.

***3.*** On considère la variable aléatoire $Y$ définie par : $Y = \dfrac{X^2}{2a}$.

***a)*** Montrer que $Y$ suit la loi exponentielle de paramètre 1.

***b)*** On rappelle qu'en **Scilab** la commande `grand(1, 1, 'exp', 1/lambda)` simule une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda$. Écrire un script **Scilab** demandant la valeur de $a$ à l'utilisateur et permettant de simuler la v.a.r. $X$.

ESSEC – I – 2018

On définit deux variables aléatoires $Y_n$ et $Z_n$ de la façon suivante.
Pour tout $\omega \in \Omega$ :

- $Y_n(\omega) = \max(X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega))$ est le plus grand des réels $X_1(\omega)$, …, $X_n(\omega)$ ;
  on remarque que $Y_n$ est définie également lorsque $n$ vaut 1, de sorte que dans la suite du sujet on pourra considérer $Y_{n-1}$.
- $Z_n(\omega)$ est le « deuxième plus grand » des nombres $X_1(\omega)$, …, $X_n(\omega)$, autrement dit, une fois que ces $n$ réels sont ordonnés dans l'ordre croissant, $Z_n$ est l'avant-dernière valeur. On note que lorsque la plus grande valeur est présente plusieurs fois, $Z_n(\omega)$ et $Y_n(\omega)$ sont égaux.

***1.*** On suppose que l'on a défini une fonction **Scilab** d'entête `function x = simulX(n)` qui retourne une simulation d'un échantillon de taille $n$ de la loi de $X$ sous la forme d'un vecteur de longueur $n$. Compléter la fonction qui suit pour qu'elle retourne le couple $(Y_n(\omega), Z_n(\omega))$ associé à l'échantillon simulé par l'instruction `X = simulX(n)` :

```
1  function [y, z] = DeuxPlusGrands(n)
2    X = simulX(n)
3    if ...
4      y = X(1) ; z = X(2)
5    else
6      ...
7    end
8    for k = 3:n
9      if X(k) > y
10       z = ... ; y = ...
11     else
12       if ...
13         z = ...
14       end
15     end
16   end
17 endfunction
```

ECRICOME – 2019

- Soit $D$ une variable aléatoire prenant les valeurs $-1$ et $1$ avec équiprobabilité.
- Soit $U$ une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $]0,1[$ et $V$ la variable aléatoire définie par : $V = \dfrac{1}{\sqrt{1-U}}$.

***a)*** Écrire une fonction en langage **Scilab**, d'en-tête `function a = D(n)`, qui prend un entier $n \geqslant 1$ en entrée, et renvoie une matrice ligne contenant $n$ réalisations de la v.a.r. $D$.

***b)*** On considère le script suivant :

```
1  n = input('entrer n')
2  a = D(n)
3  b = rand(1,n)
4  c = a / sqrt(1-b)
5  disp( sum(c) / n)
```

De quelle variable aléatoire les coefficients du vecteur `c` sont-ils une simulation ?
Pour `n` assez grand, quelle sera la valeur affichée ? Justifier votre réponse.

## I.2. Simulation d'une expérience aléatoire et des v.a.r. associées

EDHEC – 2018

- On dispose de trois pièces : une pièce numérotée 0, pour laquelle la probabilité d'obtenir Pile vaut $\frac{1}{2}$ et celle d'obtenir Face vaut également $\frac{1}{2}$, une pièce numérotée 1, donnant Face à coup sûr et une troisième pièce numérotée 2, donnant Pile à coup sûr.
On choisit l'une de ces pièces au hasard et on la lance indéfiniment.
Pour tout $i$ de $\{0, 1, 2\}$, on note $A_i$ l'événement : « on choisit la pièce numérotée $i$ ».
Pour tout entier naturel $k$ non nul, on note $P_k$ l'événement : « on obtient Pile au lancer numéro $k$ » et on pose $F_k = \overline{P_k}$.
On considère la variable aléatoire $X$, égale au rang d'apparition du premier Pile et la variable aléatoire $Y$, égale au rang d'apparition du premier Face. On convient de donner à $X$ la valeur 0 si l'on n'obtient jamais Pile et de donner à $Y$ la valeur 0 si l'on n'obtient jamais Face.

  On rappelle que, pour tout entier naturel $m$, l'instruction `grand(1, 1, 'uin', 0, m)` renvoie un entier aléatoire compris entre 0 et $m$ (ceci de façon équiprobable).
  On décide de coder Pile par 1 et Face par 0.

  ***a)*** Compléter le script **Scilab** suivant pour qu'il permette le calcul et l'affichage de la valeur prise par la variable aléatoire $X$ lors de l'expérience réalisée dans cet exercice.

```
piece = grand(1, 1, 'uin', ---, ---)
x = 1
if piece == 0 then
    lancer == grand(1, 1, 'uin', ---, ---)
    while lancer == 0
        lancer = ---
        x = ---
    end
else
    if piece == 1 then
        x = ---
    end
end
disp(x)
```

  ***b)*** Justifier que le cas où l'on joue avec la pièce numérotée 2 ne soit pas pris en compte dans le script précédent.

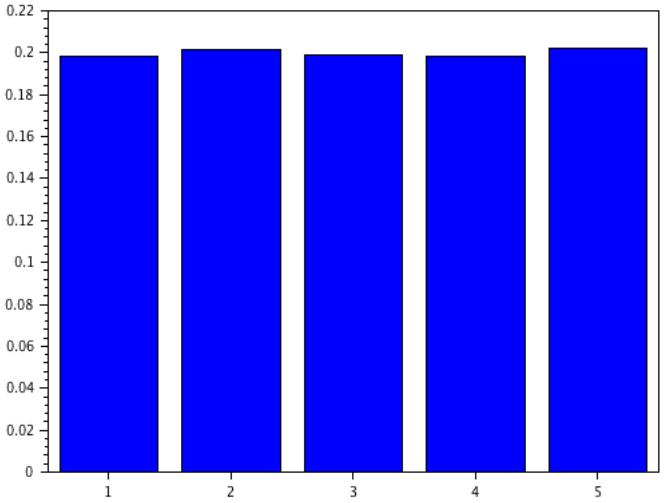
ECRICOME – 2015

- On effectue des tirages **sans remise** dans l'urne $U_1$, jusqu'à l'obtention de la boule noire.
  On note $X$ la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de tirages nécessaires pour l'obtention de la boule noire.
  On notera pour tout entier naturel $i$ non nul :
  - $N_i$ l'événement « on tire une boule noire lors du $i$-ième tirage ».
  - $B_i$ l'événement « on tire une boule blanche lors du $i$-ième tirage ».

***a)*** On simule 10000 fois cette expérience aléatoire.
Recopier et compléter le programme **Scilab** suivant pour qu'il affiche l'histogramme donnant la fréquence d'apparition du rang d'obtention de la boule noire :

```
1  N = input('Donner un entier naturel non nul');
2  S = zeros(1,N);
3  for k = 1 : 10000
4      i = 1;
5      M = N;
6      while ---
7          i = i + 1;
8          M = ---;
9      end
10     S(i) = S(i) + 1;
11     end
12 disp(S / 10000)
13 bar(S / 10000)
```

***b)*** On exécute le programme complété ci-dessus.
On entre 5 au clavier et on obtient l'histogramme suivant :




Quelle conjecture pouvez-vous émettre sur la loi de la variable aléatoire $X$ ?

ECRICOME – 2016

- Dans tout l'exercice, $X$ et $Y$ sont deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé et à valeurs dans $\mathbb{N}$. On dit que les deux variables $X$ et $Y$ sont **échangeables** si :

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2,\ \mathbb{P}([X=i] \cap [Y=j]) = \mathbb{P}([X=j] \cap [Y=i])$$

**Résultats préliminaires**

***a)*** On suppose que $X$ et $Y$ sont deux variables indépendantes et de même loi.
Montrer que $X$ et $Y$ sont échangeables.

***b)*** On suppose que $X$ et $Y$ sont échangeables. Montrer, à l'aide de la formule des probabilités totales, que :

$$\forall i \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([X=i]) = \mathbb{P}([Y=i])$$

**Étude d'un exemple**

Soient $n$, $b$ et $c$ trois entiers strictement positifs.
Une urne contient initialement $n$ boules noires et $b$ boules blanches. On effectue l'expérience suivante, en distinguant trois variantes.

- On pioche une boule dans l'urne.
  On définit $X$ la variable aléatoire qui vaut 1 si cette boule est noire et 2 si elle est blanche.
- On replace la boule dans l'urne et :
  - × Variante 1 : on ajoute dans l'urne $c$ boules de la même couleur que la boule qui vient d'être piochée.
  - × Variante 2 : on ajoute dans l'urne $c$ boules de la couleur opposée à celle de la boule qui vient d'être piochée.
  - × Variante 3 : on n'ajoute pas de boule supplémentaire dans l'urne.
- On pioche à nouveau une boule dans l'urne.
  On définit $Y$ la variable aléatoire qui vaut 1 si cette seconde boule piochée est noire et 2 si elle est blanche.

***c) (i)*** Compléter la fonction Scilab suivante, qui simule le tirage d'une boule dans une urne contenant $b$ boules blanches et $n$ boules noires et qui retourne 1 si la boule tirée est noire, et 2 si la boule tirée est blanche.

```
1  function res = tirage(b,n)
2      r = rand()
3      if ..... then
4          res = 2
5      else
6          res = 1
7      end
8  endfunction
```

***(ii)*** Compléter la fonction suivante, qui effectue l'expérience étudiée avec une urne contenant initialement $b$ boules blanches, $n$ boules noires et qui ajoute éventuellement $c$ boules après le premier tirage, selon le choix de la variante dont le numéro est `variante`.
Les paramètres de sortie sont :

- `x` : une simulation de la variable aléatoire $X$
- `y` : une simulation de la variable aléatoire $Y$

```
function [x,y] = experience(b,n,c,variante)
    x = tirage(b,n)
    if variante == 1 then
        if x == 1 then
            ...........
        else
            ...........
        end
    elseif variante == 2 then
        ...........
        ...........
        ...........
        ...........
        ...........
    end
    y = tirage(b,n)
endfunction
```

***(iii)*** Compléter la fonction suivante, qui simule l'expérience $N$ fois (avec $N \in \mathbb{N}^*$), et qui estime la loi de $X$, la loi de $Y$ et la loi du couple $(X, Y)$.
Les paramètres de sortie sont :

- `loiX` : un tableau unidimensionnel à deux éléments qui estime $[\mathbb{P}([X=1]), \mathbb{P}([X=2])]$
- `loiY` : un tableau unidimensionnel à deux éléments qui estime $[\mathbb{P}([Y=1]), \mathbb{P}([Y=2])]$
- `loiXY` : un tableau bidimensionnel à deux lignes et deux colonnes qui estime :

$$\begin{bmatrix} \mathbb{P}([X=1]\cap[Y=1]) & \mathbb{P}([X=1]\cap[Y=2]) \\ \mathbb{P}([X=2]\cap[Y=2]) & \mathbb{P}([X=1]\cap[Y=2]) \end{bmatrix}$$

```
function [loiX,loiY,loiXY] = estimation(b,n,c,variante,N)
    loiX = [0,0]
    loiY = [0,0]
    loiXY = [0,0;0,0]
    for k = 1 : N
        [x,y] = experience(b,n,c,variante)
        loiX(x) = loiX(x) + 1
        ...........
        ...........
    end
    loiX = loiX / N
    loiY = loiY / N
    loiXY = loiXY / N
endfunction
```

***(iv)*** On exécute notre fonction précédente avec $b = 1$, $n = 2$, $c = 1$, $N = 10000$ et dans chacune des variantes. On obtient :

```
--> [loiX,loiY,loiXY] = estimation(1,2,1,1,10000)
    LoiXY =
        0.49837     0.16785
        0.16697     0.16681

    LoiY =
        0.66534     0.33466

    LoiX =
        0.66622     0.33378

--> [loiX,loiY,loiXY] = estimation(1,2,1,2,10000)
    LoiXY =
        0.33258     0.33286
        0.25031     0.08425

    LoiY =
        0.58289     0.41711

    LoiX =
        0.66544     0.33456

--> [loiX,loiY,loiXY] = estimation(1,2,1,3,10000)
    LoiXY =
        0.44466     0.22098
        0.22312     0.11124

    LoiY =
        0.66778     0.33222

    LoiX =
        0.66564     0.33436
```

En étudiant ces résultats, émettre des conjectures quant à l'indépendance et l'échangeabilité de $X$ et $Y$ dans chacune des variantes.
On donne les valeurs numériques approchées suivantes :

$$0.33 \times 0.33 \simeq 0.11$$
$$0.33 \times 0.41 \simeq 0.14$$
$$0.33 \times 0.58 \simeq 0.19$$
$$0.33 \times 0.66 \simeq 0.22$$
$$0.41 \times 0.66 \simeq 0.27$$
$$0.58 \times 0.66 \simeq 0.38$$
$$0.66 \times 0.66 \simeq 0.44$$

EML – 2017

- On considère une urne contenant initialement une boule bleue et deux boules rouges.
On effectue, dans cette urne, des tirages successifs de la façon suivante : on pioche une boule au hasard et on note sa couleur, puis on la replace dans l'urne en ajoutant une boule de la même couleur que celle qui vient d'être obtenue.

Pour tout $k$ de $\mathbb{N}^*$, on note $B_k$ l'événement : « on obtient une boule bleue au $k^{\text{ème}}$ tirage »

$R_k$ l'événement : « on obtient une boule rouge au $k^{\text{ème}}$ tirage ».

***a)*** Recopier et compléter la fonction suivante afin qu'elle simule l'expérience étudiée et renvoie le nombre de boules rouges obtenues lors des $n$ premiers tirages, l'entier $n$ étant entré en argument.

```
function s = EML(n)
    b = 1 // b désigne le nombre de boules bleues présentes dans l'urne
    r = 2 // r désigne le nombre de boules rouges présentes dans l'urne
    s = 0 // s désigne le nombre de boules rouges obtenues lors des n tirages
    for k = 1:n
        s = rand()
        if ... then
            ...
        else
            ...
        end
    end
endfunction
```

***b)*** On exécute le programme suivant :

```
n = 10
m = 0
for i = 1:1000
    m = m + EML(n)
end
disp(m/1000)
```

On obtient 6.657. Comment interpréter ce résultat ?

EDHEC – 2019

- Soit $n$ un entier naturel supérieur ou égal à 3.
Une urne contient une boule noire non numérotée et $n-1$ boules blanches dont $n-2$ portent le numéro 0 et une porte le numéro 1. On extrait ces boules au hasard, une à une, sans remise, jusqu'à l'apparition de la boule noire.
Pour chaque $i$ de $[\![1, n-1]\!]$, on note $B_i$ l'événement : « le $i^{\text{ème}}$ tirage donne une boule blanche », on pose $\overline{B_i} = N_i$, et on note $X$ la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la boule noire.
- On note $Y$ la variable aléatoire qui vaut 1 si la boule numérotée 1 a été piochée lors de l'expérience précédente et qui vaut 0 sinon.

On rappelle qu'en **Scilab**, la commande `grand(1, 1, 'uin', a, b)` simule une variable aléatoire suivant la loi uniforme $[\![a, b]\!]$.

***a)*** Compléter le script **Scilab** suivant afin qu'il simule l'expérience aléatoire décrite dans cet exercice et affiche la valeur prise par la variable aléatoire $X$.
On admettra que la boule noire est codée tout au long de ce script par le nombre `nB + 1`, où `nB` désigne le nombre de boules blanches.

```
1  n = input('Entrez une valeur pour n : ')
2  nB = n-1
3  X = 1
4  u = grand(1, 1, 'uin', 1, nB+1)
5  while u < nB + 1
6      nB = ----
7      u = grand(1, 1, 'uin', 1, ----)
8      X = ----
9  end
10 disp(X, 'La boule noire est apparue au tirage numéro')
```

***b)*** Compléter les lignes 4 et 9 ajoutées au script précédent afin que le script qui suit renvoie et affiche, en plus de celle prise par $X$, la valeur prise par $Y$.

```
1  n = input('Entrez une valeur pour n : ')
2  nB = n-1
3  X = 1
4  Y = ----
5  u = grand(1, 1, 'uin', 1, nB+1)
6  while u < nB + 1
7      nB = ----
8      if u == 1 then
9          Y = ----
10     end
11     u = grand(1, 1, 'uin', 1, ----)
12     X = ----
13 end
14 disp(X, 'La boule noire est apparue au tirage numéro ')
15 disp(Y, 'La valeur de Y est ')
```

# II. Illustration de la LfGN / méthode de Monte-Carlo

## II.1. Valeur approchée d'une probabilité

ESSECI – 2015

- On considère une v.a.r. $D$ (de densité $f$ nulle sur $]-\infty, 0[$) et on note $R$ la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $R(x) = \mathbb{P}([D > x])$.
- On suppose que l'on a défini une fonction d'entête `function r = R(x)` qui renvoie la valeur de `R` au point `x`. On considère $X$ une v.a.r. qui suit la loi exponentielle de paramètre 1.
- On cherche alors à calculer une valeur approchée du réel $S$ défini par :

$$\mathbb{P}\left(\left[R(X) \leqslant \frac{k+c}{v}\right]\right) = \mathrm{e}^{-S}$$

où $k$ (coût de stockage), $c$ (coût d'achat), et $v$ (prix de vente) sont des constantes.

***a)*** Compléter le script **Scilab** qui suit, puis expliquer pourquoi il affiche une valeur approchée de $S$.

```
k = input('k = '); c = input('c = '); v = input('v = ');
compt = 0;
for i = 1:1000 do
    X = grand(1, 1, "exp", 1)
    if ---
        compt = compt + 1;
    end
end
disp('S = '); disp(-log(compt/1000));
```

EDHEC – 2015

- Trois personnes, notées $A$, $B$ et $C$ entrent simultanément dans une agence bancaire disposant de deux guichets. Les clients $A$ et $B$ occupent simultanément à l'instant 0 les deux guichets tandis que $C$ attend que l'un des deux guichets se libère pour se faire servir.
  On suppose que :
  - × les durées de passage au guichet des trois personnes $A$, $B$ et $C$ sont mesurées en heures et on suppose que ce sont des variables aléatoires indépendantes, notées respectivement $X$, $Y$ et $Z$, et suivant toutes la loi uniforme sur $[0, 1[$.
  - × la durée du changement de personne à un guichet est négligeable.
- On pose $U = \min(X, Y)$ et $V = \max(X, Y)$ et on admet que $U$ et $V$ sont des v.a.r. .
  On note $T$ le temps total passé par $C$ dans l'agence bancaire.
- On rappelle que, si `a` et `b` sont deux vecteurs lignes de taille $n$, les commandes `m = min(a,b)` et `M = max(a,b)` renvoient les vecteurs `m` et `M`, de même taille que `a` et `b`, et tels que, pour tout $i$ de $[\![1, n]\!]$, on ait : `m(i) = min(a(i),b(i))` et `M(i) = max(a(i),b(i))`.
- On rappelle également que `grand(1,n,'unf',0,1)` simule $n$ variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $[0, 1[$.

***a)*** Compléter les commandes **Scilab** suivantes pour qu'elles permettent de simuler $n$ fois les variables aléatoires $U$, $V$ et $T$, pour $n$ entré par l'utilisateur :

```
n = input('entrez la valeur de n :')
x = grand(1,n,'unf',0,1)
y = grand(1,n,'unf',0,1)
z = grand(1,n,'unf',0,1)
u = --- ; disp(u, 'u = ')
v = --- ; disp(v, 'v = ')
t = --- ; disp(t, 't = ')
```

***b)*** Que représente l'événement $[T \geqslant V]$ ?

***c)*** On souhaite déterminer une valeur approchée de la probabilité $\mathbb{P}([T \geqslant V])$, notée $p$, en simulant un grand nombre de fois le passage des clients $A$, $B$ et $C$ aux guichets.
Compléter les commandes `p = ----- ; disp(p, 'p = ')` pour que, placées sous les commandes écrites dans le programme précédent, elles permettent d'obtenir une valeur approchée de $p$.

***d)*** Lors de plusieurs essais des commandes ci-dessus, avec $n = 10000$, la réponse donnée par `Scilab` est comprise entre 0.66 et 0.67.
Que peut-on conjecturer quant à la valeur exacte de $p$ ?

ECRICOME – 2017

- Soit $n$ un entier naturel non nul.
  On effectue une série illimitée de tirages d'une boule avec remise dans une urne contenant $n$ boules numérotées de 1 à $n$. Pour tout entier naturel $k$ non nul, on note $X_k$ la variable aléatoire égale au numéro de la boule obtenue au $k$-ième tirage.
  Pour tout entier naturel $k$ non nul, on note $S_k$ la somme des numéros des boules obtenues lors des $k$ premiers tirages :
  $$S_k = \sum_{i=1}^{k} X_i$$
  On considère enfin la v.a.r. $T_n$ égale au nombre de tirages nécessaires pour que, pour la première fois, la somme des numéros des boules obtenues soit supérieure ou égale à $n$.
  Exemple : avec $n = 10$, si les numéros obtenus aux cinq premiers tirages sont dans cet ordre 2, 4, 1, 5 et 9, alors on obtient : $S_1 = 2$, $S_2 = 6$, $S_3 = 7$, $S_4 = 12$, $S_5 = 21$ et $T_{10} = 4$.
- On montre que la suite de v.a.r. $(T_n)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers la v.a.r. $Y$ à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ définie par :
  $$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}([Y = k]) = \frac{k-1}{k!}$$

***a)*** On rappelle qu'en langage **Scilab**, l'instruction `grand(1,1,'uin',1,n)` renvoie un entier aléatoire de $[\![1, n]\!]$. Compléter la fonction ci-dessous, qui prend en argument le nombre $n$ de boules contenues dans l'urne, afin qu'elle simule la variable aléatoire $T_n$ :

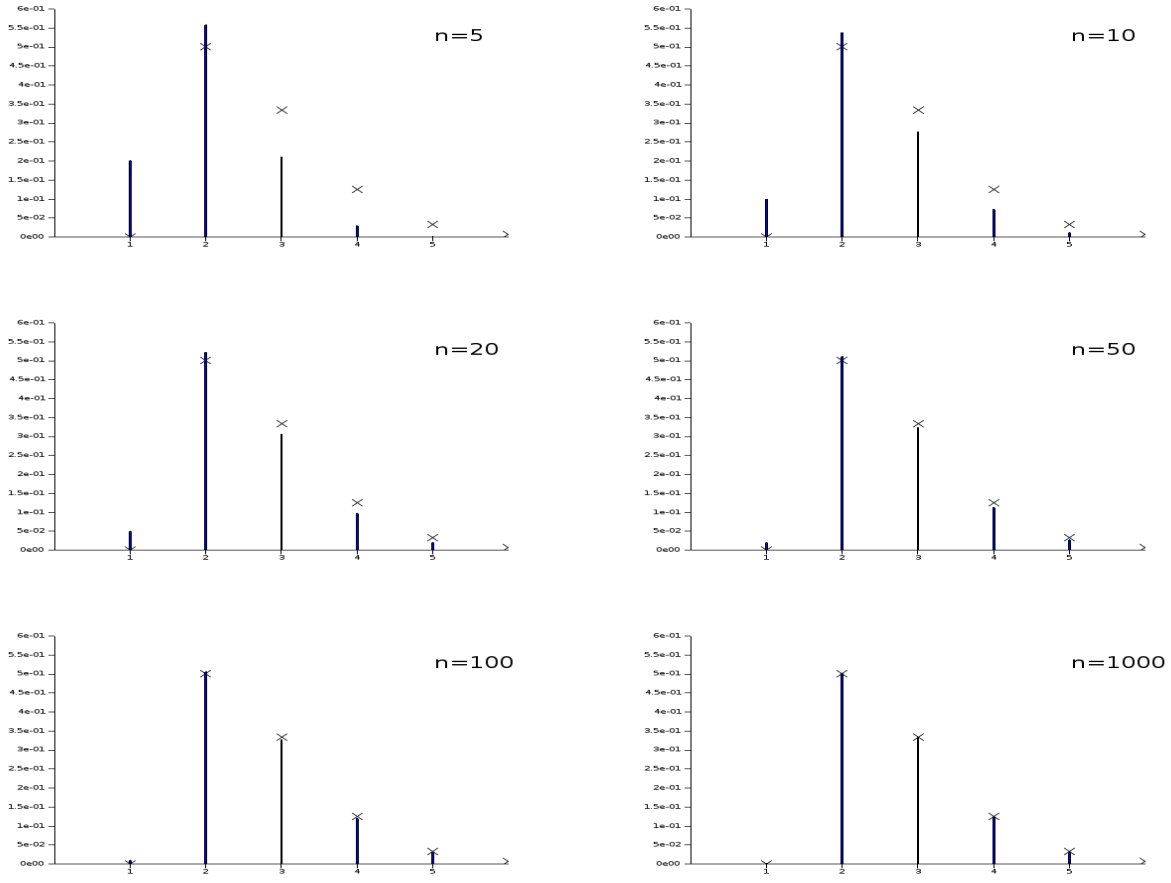
```
function y = T(n)
    S = ................
    y = ................
    while ..............
        tirage = grand(1,1,'uin',1,n)
        S = S + tirage
        y = ..................
    end
endfunction
```

***b)*** On suppose déclarée la fonction précédente et on écrit le script ci-dessous :

```
function y = freqT(n)
    y = zeros(1, n)
    for i = 1 : 100000
        k = T(n)
        y(k) = y(k) + 1
    end
    y = y / 100000
endfunction
```

```
1  function y = loitheoY(n)
2      y = zeros(1, n)
3      for k = 1 : n
4          y(k) = (k-1) / prod(1:k)
5      end
6  endfunction
7
8  clf
9  n = input('n = ?')
10 plot2d(loitheoY(6), style=-2)
11 x = freqT(n)
12 bar(x(1:5))
```

L'exécution de ce script pour les valeurs de $n$ indiquées a permis d'obtenir les graphes ci-dessous :




***c)*** Expliquer ce que représente les vecteurs renvoyés par les fonctions `freqT` et `loitheoY`. Comment ces vecteurs sont-ils représentés graphiquement dans chaque graphique obtenu ?

***d)*** Expliquer en quoi cette succession de graphiques permet d'illustrer la convergence en loi de $(T_n)$ vers $Y$.

HEC – 2019

- On note $S$ une variable aléatoire à valeurs dans $\{-1, 1\}$ dont la loi est donnée par :

$$\mathbb{P}([S = -1]) \;=\; \mathbb{P}([S = +1]) \;=\; \frac{1}{2}$$

- On note $X_2$ une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(2, \frac{1}{2}\right)$.

  On suppose que les variables aléatoires $X_2$ et $S$ sont indépendantes et on pose $Y_2 = S\,X_2$.
- On devait démontrer que la v.a.r. $X_2 - (S + 1)$ suit la même loi que $Y_2$.

Le script **Scilab** suivant permet d'effectuer des simulations de la variable aléatoire $Y_2$ définie dans la question précédente.

```
1  n = 10
2  X = grand(n,2,'bin',2,0.5)
3  B = grand(n,2,'bin',1,0.5)
4  S = 2 * B - ones(n,2)
5  Z1 = [S(1:n,1) .* X(1:n,1) , X(1:n,1) - S(1:n,1) - ones(n,1)]
6  Z2 = [S(1:n,1) .* X(1:n,1) , X(1:n,2) - S(1:n,2) - ones(n,1)]
```

***a)*** Que contiennent les variables `X` et `S` après l'exécution des quatre premières instructions ?

***b)*** Expliquer pourquoi, après l'exécution des six instructions, chacun des coefficients des matrices `Z1` et `Z2` contient une simulation de la variable aléatoire $Y_2$.

***c)*** On modifie la première ligne du script précédent en affectant à `n` une valeur beaucoup plus grande que 10 (par exemple, 100000) et en lui adjoignant les deux instructions 7 et 8 suivantes :

```
7  p1 = length(find(Z1(1:n,1) == Z1(1:n,2))) / n
8  p2 = length(find(Z2(1:n,1) == Z2(1:n,2))) / n
```

Quelles valeurs numériques approchées la loi faible des grands nombres permet-elle de fournir pour `p1` et `p2` après l'exécution des huit lignes du nouveau script ?

Dans le langage **Scilab**, la fonction `length` fournit la « longueur » d'un vecteur ou d'une matrice et la fonction `find` calcule les positions des coefficients d'une matrice pour lesquels une propriété est vraie, comme l'illustre le script suivant :

```
-->A = [1 ; 2 ; 0 ; 4]
-->B = [2 ; 2 ; 4 ; 3]
-->length(A)
   ans = 4.
-->length([A , B])
   ans = 8.
-->find(A < B)
   ans = 1. 3. // car 1 < 2 et 0 < 4, alors que 2 ⩾ 2 et 4 ⩾ 3
```

## II.2. Valeur approchée d'une espérance

HEC – 2015

- On considère une v.a.r. $X$ telle que $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$.
- On considère la fonction $F$ définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles telle que : $F(x) = \exp(-\mathrm{e}^{-\lambda x})$.
  $F$ est la fonction de répartition d'une v.a.r. $T$. *($T$ suit la loi de Gumbel de paramètre $\lambda$)*
- On peut démontrer que $Z = -\dfrac{1}{\lambda}\ \ln(\lambda X)$ a même loi que $T$.
- On suppose alors que $\lambda = 1$.
  On démontre que $F$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]0,1[$ et que sa bijection réciproque $G$ est :

$$\begin{array}{rccl} G & : & \mathbb{R} & \to & ]0,1[ \\ & & x & \mapsto & -\ln(-\ln(x)) \end{array}$$

  On démontre alors que $G(U)$ a même loi que $T$ (méthode d'inversion).

***a)*** Par une méthode de votre choix, écrire en **Scilab** les commandes qui permettent de simuler la loi de $T$.

***b)*** Écrire en **Scilab** les commandes qui permettent de renvoyer une valeur numérique approchée de $\mathbb{E}(T)$ en utilisant la méthode de Monte-Carlo.

ESSECI – 2016

- On considère $X$ une v.a.r. à densité. On suppose qu'il existe un unique intervalle $I_X$ que lequel $F_X$ (fonction de répartition de $X$) réalise une bijection de classe $C^1$ strictement croissante de $I_X$ sur $]0,1[$. On note alors $G_X$ la bijection réciproque de $F_X$, définie de $]0,1[$ sur $I_X$.
- On note $\beta \in ]0,1[$ un niveau de confiance.
- Enfin, on définit $r_\beta(X)$ appelé « Value at Risk » au niveau de confiance $\beta$ de $X$, par :

$$r_\beta(X) = G_X(\beta)$$

  C'est une grandeur qui permet d'évaluer le risque pris par l'acteur qui détient l'actif dont les pertes sont modélisées par $X$.
- On considère une suite de v.a.r. $(X_k)_{k\geqslant 1}$ mutuellement indépendantes et de même loi que $X$.
  Pour tout $\omega \in \Omega$, et $n \in \mathbb{N}^*$, on ordonne $X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)$ dans l'ordre croissant.
  On note alors $X_{1,n}(\omega), \ldots, X_{n,n}(\omega)$ les valeurs obtenues.
  En particulier, $X_{1,n}(\omega)$ est la plus petite de ses valeurs et $X_{n,n}(\omega)$ la plus grande.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n\beta \geqslant 1$, on s'intéresse dans l'épreuve à $Y_n = X_{\lfloor n\beta \rfloor, n}$ qui est un estimateur de $r_\beta(X)$.
- On définit « l'Expected Shortfall » de $X$ de niveau de confiance $\beta$ par :

$$ES_\beta(X) = \frac{1}{1-\beta}\int_{r_\beta(X)}^{+\infty} x f_X(x)\ dx$$

  On démontre que :

$$ES_\beta(X) = r_\beta(X) + \frac{1}{1-\beta}\ \mathbb{E}(\max(X - r_\beta(X), 0))$$

***a)*** On suppose que l'on a défini une fonction d'entête `function R = triCroissant(T)` qui renvoie le tableau des valeurs se trouvant dans $T$ rangées dans l'ordre croissant.
Par exemple :

```
--> triCroissant([0, -1, 0, 2, 4, 2, 3])
    ans  =
        [-1, 0, 0, 2, 2, 3, 4]
```

Écrire une fonction **Scilab** d'en-tête `function r = VaR(X, beta)` qui renvoie la valeur de l'estimation obtenue avec l'estimateur $Y_n$ pour $r_\beta(X)$ si le tableau `X` contient la réalisation de l'échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$ et `beta` la valeur de $\beta$.

***b)*** En utilisant la méthode de Monte-Carlo, dont on supposera la validité, et la fonction `VaR` précédente, écrire une fonction **Scilab** qui calcule une valeur approchée de $ES_\beta(X)$ à partir de la réalisation d'un échantillon de taille $n$ de la loi de $X$ dont les valeurs se trouvent dans le tableau `X` et de la valeur de $\beta$ se trouvant dans la variable `beta`.

ESSECI − 2018

Soit $x \in ]0, \alpha[$.

On considère la fonction $\varphi_x$ définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $\varphi_x(t) = \begin{cases} t & \text{si } t \leqslant x \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

On démontrait alors :

$$\sigma(x) = \frac{\mathbb{E}(\varphi_x(Y_{n-1}))}{\mathbb{P}([Y_{n-1} \leqslant x])}$$

où $X_1$, …, $X_n$ est une famille de v.a.r. mutuellement indépendantes et de même loi que $X$ (à valeurs dans $]0, \alpha[$) ; pour tout $\omega \in \Omega$, $Y_n(\omega) = \max(X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega))$ est le plus grand des réels $X_1(\omega)$, …, $X_n(\omega)$.

Enfin, on suppose que l'on a défini une fonction **Scilab** d'entête `function x = simulX(n)` qui retourne une simulation d'un échantillon de taille $n$ de la loi de $X$ sous la forme d'un vecteur de longueur $n$.

***1.*** En déduire une fonction **Scilab** `function s = sigma(x,n)` qui retourne une valeur approchée de $\sigma(x)$ obtenue comme quotient d'une estimation de $\mathbb{E}(\varphi_x(Y_{n-1}))$ et de $\mathbb{P}([Y_{n-1} \leqslant x])$.
On utilisera la fonction `simulX` pour simuler des échantillons de la loi de $X$, et on rappelle que si `v` est un vecteur, `max(v)` est égal au plus grand élément de `v`.

## II.3. Valeur approchée d'une intégrale

EDHEC − 2018

- On considère la fonction $f$ qui à tout réel $x$ associe : $f(x) = \displaystyle\int_0^x \ln(1+t^2)\, dt$.

***1.*** On rappelle qu'en **Scilab**, la commande `grand(1, 1, 'unf', a, b)` simule une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[a, b]$. Compléter le script **Scilab** suivant pour qu'il calcule et affiche, à l'aide de la méthode de Monte-Carlo, une valeur approchée de $f(1)$ :

```
1 U = grand(1, 100 000, 'unf', 0, 1)
2 V = log(1 + U .^2)
3 f = -----
4 disp(f)
```

- On démontrait alors :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \int_0^1 \frac{1}{1 - \ln(1+t^2)}\, dt$$

***2.*** Modifier le script précédent pour donner un valeur approchée de $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$.

# III. Chaînes de Markov

EDHEC – 2017

- Les sommets d'un carré sont numérotés 1, 2, 3, et 4 de telle façon que les côtés du carré relient le sommet 1 au sommet 2, le sommet 2 au sommet 3, le sommet 3 au sommet 4 et le sommet 4 au sommet 1.
  Un mobile se déplace aléatoirement sur les sommets de ce carré selon le protocole suivant :
  - × Au départ, c'est à dire à l'instant 0, le mobile est sur le sommet 1.
  - × Lorsque le mobile est à un instant donné sur un sommet, il se déplace à l'instant suivant sur l'un quelconque des trois autres sommets, et ceci de façon équiprobable.

  Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $X_n$ la variable aléatoire égale au numéro du sommet sur lequel se situe le mobile à l'instant $n$. D'après le premier des deux points précédents, on a donc $X_0 = 1$.
- Pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, on considère la matrice-ligne de $\mathcal{M}_{1,4}(\mathbb{R})$ :

$$U_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}([X_n = 1]) & \mathbb{P}([X_n = 2]) & \mathbb{P}([X_n = 3]) & \mathbb{P}([X_n = 4]) \end{pmatrix}$$

- On montre que, si l'on pose $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = U_n\ A$$

***a)*** Compléter le script **Scilab** suivant pour qu'il affiche les 100 premières positions autres que celle d'origine, du mobile dont le voyage est étudié dans ce problème, ainsi que le nombre $n$ de fois où il est revenu sur le sommet numéroté 1 au cours de ses 100 premiers déplacements (on pourra utiliser la commande `sum`).

```
1 A = [---] / 3
2 x = grand(100,'markov',A,1)
3 n = ---
4 disp(x)
5 disp(n)
```

***b)*** Après avoir exécuté cinq fois ce script, les réponses concernant le nombre de fois où le mobile est revenu sur le sommet 1 sont : $n = 23$, $n = 28$, $n = 23$, $n = 25$, $n = 26$.
En quoi est-ce normal ?