TP7 : Méthodes d'inversion

▶ Dans votre dossier `Info_2a`, créer le dossier `TP_7`.

I. Avant-propos

Dans ce TP, on s'intéresse au problème suivant.

Données :

× une v.a.r. X a priori difficile à simuler informatiquement,

× la fonction de répartition F de la v.a.r. X.

But :
obtenir une v.a.r. V de même fonction de répartition F
(*i.e.* de même loi que X) plus simple à simuler informatiquement.

▶ Rappeler les propriétés qui caractérisent une fonction de répartition.

Une fonction $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ (0 et 1 pas forcément atteints) est la fonction de répartition d'une v.a.r. X si :

1) F est croissante,

2) F est continue à droite en tout point de $\mathbb{R}$,

3) $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$,

4) $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$.

On peut montrer de plus que F admet une limite finie à gauche en tout point $x \in \mathbb{R}$.
Plus précisément : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lim\limits_{\substack{t \to x \\ t < x}} F(t) \ = \ F(x) - \mathbb{P}([X = x]) \ = \ \mathbb{P}([X < x])$

II. Théorème d'inversion dans le cas où F est bijective

II.1. Énoncé du théorème d'inversion

Théorème 1.

Soit X une v.a.r. dont la loi est donnée par sa fonction de répartition $F : \mathbb{R} \to]0,1[$.

Soit U une v.a.r. telle que $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$.

On suppose de plus que :

× *F est continue sur $\mathbb{R}$,*

× *F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.*

On a alors :

- *F est bijective de $\mathbb{R}$ dans $]0,1[$.*
- *La v.a.r. $V = F^{-1}(U)$ a pour fonction de répartition F.*

► Rappeler la fonction de répartition d'une v.a.r. U telle que $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$.

$$F_U : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \in [0,1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

► Démontrer le résultat du théorème.

- La fonction F est :
  - × continue sur $\mathbb{R}$,
  - × strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

  Elle réalise donc une bijection de $]-\infty,+\infty[$ sur $F(]-\infty,+\infty[)$. Or :

  $$F(]-\infty,+\infty[) = \left] \lim_{x\to-\infty} F(x), \lim_{x\to+\infty} F(x) \right[=]0,1[$$ *(car F est une fonction de répartition)*

- Notons G la fonction de répartition de la v.a.r. $F^{-1}(U)$.
  Autrement dit, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $G(x) = \mathbb{P}(\left[F^{-1}(U) \leqslant x\right])$.
  Soit $x \in \mathbb{R}$ et $\omega \in \Omega$, remarquons tout d'abord que :

  $$\begin{array}{cl} & \omega \in \left[F^{-1}(U) \leqslant x\right] \\ \Leftrightarrow & F^{-1}(U(\omega)) \leqslant x \\ \Leftrightarrow & U(\omega) \leqslant F(x) \\ \Leftrightarrow & \omega \in [U \leqslant F(x)] \end{array}$$

  Ainsi, on a : $G(x) = \mathbb{P}(\left[F^{-1}(U) \leqslant x\right]) = \mathbb{P}([U \leqslant F(x)]) = F(x)$.

II.2. Application : simulation de lois à l'aide de `rand`

II.2.a) Loi uniforme sur un intervalle réel

On considère une v.a.r. X telle que $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a,b])$ (où a et b deux réels tels que $a < b$).

► Que signifie que $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a,b])$?

a) $\boxed{X(\Omega) = [a,b]}$

b) X admet pour densité la fonction f définie par :

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a,b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array} \right.$$

► Calculer la fonction de répartition F de X.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Trois cas se présentent :

- Si $x < a$:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\ dt = \int_{-\infty}^{x} 0\ dt = 0$$

- Si $x \in [a,b]$:

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(t)\ dt = \int_{a}^{x} f(t)\ dt && \textit{(car } f \textit{ est nulle en dehors de } [a,b]\textit{)} \\ &= \int_{a}^{x} \frac{1}{b-a}\ dt \\ &= \frac{x-a}{b-a} \end{aligned}$$

- Si $x > b$:

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{a}^{b} f(t)\ dt && \textit{(car } f \textit{ est nulle en dehors de } [a,b]\textit{)} \\ &= F(b) - F(a) \\ &= 1 - 0 && \textit{(d'après le cas précédent)} \end{aligned}$$

► Démontrer que F réalise une bijection de $[a,b]$ dans $[0,1]$.
Déterminer sa bijection réciproque $G : [0,1] \to [a,b]$.

- Soit $x \in [0,1]$ et $y \in [a,b]$. On détermine G en raisonnant par équivalence.

$$y = F(x) \Leftrightarrow y = \frac{x-a}{b-a} \Leftrightarrow (b-a)\ y = x - a \Leftrightarrow x = (b-a)\ y + a \Leftrightarrow x = G(y)$$

- Ainsi, la fonction $G : [0,1] \to [a,b]$ est définie par : $\forall x \in [0,1],\ G(x) = a + (b-a)\ x$.

► On prolonge G en posant $G(x) = a$ si $x < 0$ et $G(x) = b$ si $x > 1$.
Déterminer la loi de la v.a.r. $V = G(U)$.

- Tout d'abord, d'après la question précédente :

$$V(\Omega) = \big(G(U)\big)(\Omega) = G\big(U(\Omega)\big) = G([0,1]) = [a,b]$$

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Trois cas se présentent :
  × Si $x < a$, alors : $[G(U) \leqslant x] = \varnothing$ car $V(\Omega) = [a,b]$. D'où :

$$F_V(x) = \mathbb{P}([G(U) \leqslant x]) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$$

× Si $x \in [a,b]$:

$$\begin{array}{rcll} F_V(x) & = & \mathbb{P}\big([G(U) \leqslant x]\big) & \\ & = & \mathbb{P}\Big(\big[F\big(G(U)\big) \leqslant F(x)\big]\Big) & \textit{(car F est strictement croissante sur $[a,b]$)} \\ & = & \mathbb{P}\big([U \leqslant F(x)]\big) & \\ & = & F_U\big(F(x)\big) & \\ & = & F(x) & \textit{(car $F(x) \in [0,1]$)} \end{array}$$

× Si $x > b$, alors : $[G(U) \leqslant x] \; = \; \Omega$ car $V(\Omega) = [a,b]$. D'où :

$$F_V(x) \; = \; \mathbb{P}([G(U) \leqslant x]) \; = \; \mathbb{P}(\Omega) \; = \; 1$$

Finalement : $F_V : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{si } x \in [a,b] \\ 1 & \text{si } x > b \end{cases}$

On reconnaît la fonction de répartition d'une v.a.r. de loi $\mathcal{U}([a,b])$. Or la fonction de répartition caractérise la loi. Ainsi : $V \hookrightarrow \mathcal{U}([a,b])$.

► En déduire une simulation en **Python** d'une v.a.r. X telle que $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a,b])$.
On écrira une fonction `unifContinue` qui :

× prend en paramètre deux réels `a` et `b`,

× renvoie une variable `v` qui contient le résultat de la simulation de X.

On utilisera la fonction `rd.random` de la bibliothèque `random`.

```python
import random as rd
def unifContinue(a, b) :
    v = a + (b - a) * rd.random()
    return v
```

II.3. Le théorème d'inversion aux concours (session 2015)

II.3.a) Simulation d'une v.a.r. suivant une loi exponentielle (EML 2015)

Soit $\lambda > 0$ et soit X une v.a.r. telle que $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$.

► Que signifie $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$?

a) $\boxed{X(\Omega) =]0, +\infty[}$

b) X admet pour densité la fonction f définie par :

$$f \ : \left| \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left\{ \begin{array}{cl} \lambda \ \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } x \in [0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

► Déterminer la fonction de répartition F de X.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent :

- Si $x < 0$, alors $[X \leqslant x] = \varnothing$ car $X(\Omega) =]0, +\infty[$. D'où :

$$F(x) \ = \ \mathbb{P}([X \leqslant x]) \ = \ \mathbb{P}(\varnothing) \ = \ 0$$

- Si $x \geqslant 0$, alors :

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(t) \ dt \ = \ \int_{0}^{x} f(t) \ dt \qquad \textit{(car } f \textit{ est nulle en dehors de } [0, +\infty[\textit{)} \\ &= \int_{0}^{x} \lambda \ \mathrm{e}^{-\lambda t} \ dt \\ &= \lambda \int_{0}^{x} \ \mathrm{e}^{-\lambda t} \ dt \\ &= \lambda \ \left[\ \frac{-\mathrm{e}^{-\lambda t}}{\lambda} \ \right]_{0}^{x} \\ &= -\mathrm{e}^{-\lambda x} + \mathrm{e}^{\lambda 0} \ = \ 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} \end{aligned}$$

► Démontrer que F réalise une bijection de $[0, +\infty[$ dans $[0, 1[$.
Déterminer sa bijection réciproque $G : [0, 1[\to [0, +\infty[$.

- Soient $x \in [0, 1[$ et $y \in [0, +\infty[$. On détermine G en raisonnant par équivalence.

$$y \ = \ F(x) \ \Leftrightarrow \ y \ = \ 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} \ \Leftrightarrow \ 1 - y \ = \ \mathrm{e}^{-\lambda x} \ \Leftrightarrow \ -\lambda \, x \ = \ \ln(1 - y) \ \Leftrightarrow \ x \ = \ -\frac{\ln(1 - y)}{\lambda}$$

- Ainsi, la fonction $G : [0, 1[\to [0, +\infty[$ est définie par : $\forall x \in [0, 1], \ G(x) = -\dfrac{\ln(1 - x)}{\lambda}$.

► On prolonge G en posant $G(x) = 0$ si $x < 0$. Déterminer la loi de la v.a.r. $V = G(U)$.

- Tout d'abord, d'après la question précédente :

$$V(\Omega) \;=\; \big(G(U)\big)(\Omega) \;=\; G\big(U(\Omega)\big) \;=\; G([0,1]) \;=\; [0,+\infty[$$

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent :
  - Si $x < 0$, alors : $[G(U) \leqslant x] \;=\; \varnothing$ car $V(\Omega) = [0,+\infty[$. D'où :

$$F_V(x) \;=\; \mathbb{P}([G(U) \leqslant x]) \;=\; \mathbb{P}(\varnothing) \;=\; 0$$

  - Si $x \in [0,+\infty[$:

$$\begin{array}{rcll} F_V(x) & = & \mathbb{P}\big(\,[G(U) \leqslant x]\,\big) & \\ & = & \mathbb{P}\Big(\,\big[F\big(G(U)\big) \leqslant F(x)\big]\,\Big) & \textit{(car } F \textit{ est strictement croissante sur } [0,+\infty[\textit{)} \\ & = & \mathbb{P}\big(\,[U \leqslant F(x)]\,\big) & \\ & = & F_U\big(F(x)\big) & \\ & = & F(x) & \textit{(car } F(x) \in [0,1]\textit{)} \end{array}$$

Finalement : $F_V : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-\lambda\, x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$

On reconnaît la fonction de répartition d'une v.a.r. de loi $\mathcal{E}(\lambda)$. Or la fonction de répartition caractérise la loi. Ainsi : $V \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$.

► En déduire une simulation en **Python** d'une v.a.r. X telle que $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$.
On écrira une fonction `expo` qui :

× prend en paramètre un réel `lambda`,

× renvoie une variable `v` qui contient le résultat de la simulation de X.

On utilisera la fonction `rd.random`.

```python
import numpy as np
def expo(lambda) :
    v = -(1 / lambda) * np.log(1 - rd.random())
    return v
```

L'énoncé `EML 2015` commençait par ce résultat d'inversion.
L'usage des fonctions de répartition n'était pas explicitement demandé.

► *Soit U une v.a.r. suivant la loi uniforme sur $[0,1[$. Quelle est la loi de la v.a.r. $V = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-U)$?*

1) On note $h : x \mapsto -\frac{1}{\lambda}\ \ln(1-x)$ de sorte que : $V = h(U)$. Alors :

$$\begin{array}{rcll} V(\Omega) & = & \big(h(U)\big)(\Omega) & \\ & = & h\big(U(\Omega)\big) & \\ & = & h([0,1[) & \textit{(car } U \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1[)\textit{)} \\ & = & [h(0), \lim\limits_{x\to 1} h(x)[& \textit{(car } h \textit{ est continue et strictement croissante sur } [0,1[\textit{)} \\ & = & [0,+\infty[& \end{array}$$

2) Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent :

× si $x > 0$, alors : $[V \leqslant x] = \varnothing$ car $V(\Omega) = [0,+\infty[$. D'où :

$$F_V(x) \ = \ \mathbb{P}\big(\,[V \leqslant x]\,\big) \ = \ \mathbb{P}(\varnothing) \ = \ 0$$

× si $x \geqslant 0$:

$$\begin{array}{rcll} F_V(x) & = & \mathbb{P}\big(\,[V \leqslant x]\,\big) & \\ & = & \mathbb{P}\left(\left[-\frac{1}{\lambda}\ \ln(1-U) \leqslant x\right]\right) & \\ & = & \mathbb{P}\left([\ln(1-U) \geqslant -\lambda\, x]\right) & \textit{(car } -\lambda < 0\textit{)} \\ & = & \mathbb{P}\left(\left[1-U \geqslant \mathrm{e}^{-\lambda\, x}\right]\right) & \textit{(car la fonction } \exp \textit{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}\textit{)} \\ & = & \mathbb{P}\left(\left[U \leqslant 1-\mathrm{e}^{-\lambda\, x}\right]\right) & \\ & = & F_U(1-\mathrm{e}^{-\lambda\, x}) & \\ & = & 1-\mathrm{e}^{-\lambda\, x} & \textit{(car } 1-e^{-\lambda\, x} \in [0,1[\textit{)} \end{array}$$

(on laissera le lecteur vérifier ce dernier point)
On en déduit :

$$F_V(x) \ = \ F_U(1-\mathrm{e}^{-\lambda x}) \ = \ 1-\mathrm{e}^{-\lambda x}$$

Finalement : $F_V : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1-\mathrm{e}^{-\lambda\, x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$

On reconnaît la fonction de répartition d'une v.a.r. de loi $\mathcal{E}(\lambda)$. Or la fonction de répartition caractérise la loi. Ainsi : $V \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$.

► *Ércire une fonction en **Python** qui, étant donné un réel λ strictement positif, simule la loi exponentielle de paramètre λ.*

II.3.b) Simulation d'une v.a.r. suivant la loi standard de Gumbel (`HEC 2015`)

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles telle que $F : x \mapsto \exp\left(-\mathrm{e}^{-\lambda x}\right)$.

▶ *Justifier que F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et montrer que F réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0,1[$.*

- F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ comme composée de fonctions $\mathcal{C}^\infty$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$F'(x) \;=\; -(-\lambda \mathrm{e}^{-\lambda x})\, \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-\lambda x}} \;=\; \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-\lambda x}} > 0$$

- La fonction F est :

  1) continue sur $\mathbb{R}$,

  2) strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

  Ainsi, F réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $F(\mathbb{R}) \;=\;]\lim\limits_{x\to-\infty} F(x), \lim\limits_{x\to+\infty} F(x)[$. Or :

  × $\lim\limits_{x\to-\infty} -\mathrm{e}^{-\lambda x} \;=\; -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-\lambda x}} \;=\; 0$.

  × $\lim\limits_{x\to+\infty} -\mathrm{e}^{-\lambda x} \;=\; 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-\lambda x}} \;=\; 1$.

  F réalise bien une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]0,1[$.

▶ *En déduire que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire T admettant une densité f_T continue sur $\mathbb{R}$ que l'on déterminera ; on dit que T suit la loi de Gumbel de paramètre λ.*

La fonction F est :

1) telle que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $0 \leqslant F \leqslant 1$,

2) croissante sur $\mathbb{R}$,

3) continue à droite en tout point de $\mathbb{R}$, car continue sur $\mathbb{R}$,

4) $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) \;=\; 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) \;=\; 1$.

Ainsi F est bien une fonction de répartition d'une v.a.r. T. De plus :

× F est continue sur $\mathbb{R}$,

× F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

La v.a.r. T est donc une v.a.r. à densité. Une densité est obtenue en dérivant F :

$$f_T : t \mapsto \lambda\, \mathrm{e}^{-\lambda t}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-\lambda t}}$$

On suppose maintenant que $\lambda = 1$.

▶ *Expliciter la bijection réciproque G de la fonction F.*

- Avec $\lambda = 1$, on a $F : x \mapsto \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-x}}$ et on sait que F est bijective de $\mathbb{R}$ dans $]0,1[$.
- Soient $x \in \mathbb{R}$ et $y \in]0,1[$. On détermine G en raisonnant par équivalence.

$$F(x) = y \;\Leftrightarrow\; \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-x}} = y \;\Leftrightarrow\; \mathrm{e}^{-x} = -\ln y \;\Leftrightarrow\; -x = \ln(-\ln y) \;\Leftrightarrow\; x = -\ln(-\ln y)$$

  (les opérations précédentes sont permises car $y > 0$ et $-\ln y > 0$)

- Ainsi, la fonction $G :]0,1[\to]-\infty,+\infty[$ est définie par $G : x \mapsto -\ln(-\ln x)$.

► *Après importation des bibliothèques* `numpy` *et* `matplotlib.pyplot`*, on considère le programme* ***Python*** *suivant :*

```
x = np.linspace(-2, 2, 400) ; y = (np.exp(-np.exp(-x))) ; plt.plot(x,y), plt.plot(y,x)
```

Le réel 0 fait-il partie des nombres renvoyés par la commande `x = np.linspace(-2,2,400)` *?*

- La commande `np.linspace(-2,2,400)` crée un tableau (`array` d'une ligne contenant 400 nombres régulièrement espacés entre -2 et 2.
- Tout nombre créé est donc de la forme :

$$-2 + \frac{k}{399}\,[2-(-2)] = -2 + \frac{4k}{399}, \text{ avec } k \in [\![0, 399]\!]$$

Pour obtenir 0, il faudrait : $-2 + \dfrac{4k}{399} = 0 \ \Leftrightarrow\ \dfrac{4k}{399} = 2 \ \Leftrightarrow\ k = \dfrac{399}{2}$

Or $\dfrac{399}{2}$ n'est pas un entier, donc la valeur 0 ne fait pas partie des nombres renvoyés.

Quel sera le résultat de l'exécution de ce programme ?

- `x` est un tableau contenant des abscisses entre -2 et 2.
- `y` contient les ordonnées correspondantes par F.
- `plt.plot(x,y)` permet donc de tracer le graphe de F.
- Enfin, `plt.plot(y,x)` effectue le tracé dans lequel le rôle des abscisses et des ordonnées est échangé. Ainsi, cette commande trace le symétrique de la courbe précédente par rapport à la droite d'équation $y = x$. On en déduit que cette commande permet le tracé du graphe de G, réciproque de la fonction F.

► *Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur l'intervalle* $]0, 1[$.
Quelle est la loi de la variable aléatoire $G(U)$?

- G est la réciproque de F donc, d'après la méthode d'inversion, la v.a.r. $V = G(U)$ a pour fonction de répartition F. Autrement dit, V suit la loi de Gumbel de paramètre 1.
- On peut le démontrer. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcll}
F_V(x) & = & \mathbb{P}\big([V \leqslant x]\big) & \\
 & = & \mathbb{P}\big([G(U) \leqslant x]\big) & \\
 & = & \mathbb{P}\Big(\big[G^{-1}\big(G(U)\big) \leqslant G^{-1}(x)\big]\Big) & \textit{(car } G^{-1} = F \textit{ est strictement croissante sur }]0,1[\textit{)} \\
 & = & \mathbb{P}\big([U \leqslant F(x)]\big) & \\
 & = & F_U\big(F(x)\big) & \\
 & = & F(x) & \textit{(car } F(x) \in\ ]0,1[\textit{)}
\end{array}$$

Finalement : $F_V = F$. Or la fonction de répartition caractérise la loi. La v.a.r. $V = G(U)$ suit donc une loi de Gumbel de paramètre 1.

- *Par une méthode de votre choix, écrire en* ***Python*** *les commandes qui permettent de simuler la loi de* T.

Les questions précédentes permettent d'écrire le programme :

```
import random as rd
y = rd.random()
t = -np.log( -np.log(u))
```