TP7 : Méthodes d'inversion

► Dans votre dossier `Info_2a`, créer le dossier `TP_7`.

I. Avant-propos

Dans ce TP, on s'intéresse au problème suivant.

Données :

× une v.a.r. X a priori difficile à simuler informatiquement,

× la fonction de répartition F de la v.a.r. X.

But :
obtenir une v.a.r. V de même fonction de répartition F
(*i.e.* de même loi que X) plus simple à simuler informatiquement.

► Rappeler les propriétés qui caractérisent une fonction de répartition.

Une fonction $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$ (0 et 1 pas forcément atteints) est la fonction de répartition d'une v.a.r. X si :

On peut montrer de plus que F admet une limite finie à gauche en tout point $x \in \mathbb{R}$.
Plus précisément : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lim\limits_{\substack{t \to x \\ t < x}} F(t) \ = \ F(x) - \mathbb{P}([X = x]) \ = \ \mathbb{P}([X < x])$

II. Théorème d'inversion dans le cas où F est bijective

II.1. Énoncé du théorème d'inversion

Théorème 1.

Soit X une v.a.r. dont la loi est donnée par sa fonction de répartition $F : \mathbb{R} \to]0, 1[$.

Soit U une v.a.r. telle que $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1])$.

On suppose de plus que :

× *F est continue sur $\mathbb{R}$,*

× *F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.*

On a alors :

- *F est bijective de $\mathbb{R}$ dans $]0, 1[$.*
- *La v.a.r. $V = F^{-1}(U)$ a pour fonction de répartition F.*

▶ Rappeler la fonction de répartition d'une v.a.r. U telle que $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$.

▶ Démontrer le résultat du théorème.

- La fonction F est :

  Elle réalise donc une bijection de $]-\infty,+\infty[$ sur $F(]-\infty,+\infty[)$. Or :

- Notons G la fonction de répartition de la v.a.r. $F^{-1}(U)$.
  Autrement dit, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $G(x) \ = \ \mathbb{P}(\qquad\qquad)$.
  Soit $x \in \mathbb{R}$ et $\omega \in \Omega$, remarquons tout d'abord que :

$$\begin{array}{cl} & \omega \in \left[F^{-1}(U) \ \leqslant \ x\right] \\ \Leftrightarrow & F^{-1}(U(\omega)) \ \leqslant \ x \\ \Leftrightarrow & \\ \Leftrightarrow & \omega \in \end{array}$$

  Ainsi, on a : $G(x) \ =$.

II.2. Application : simulation de lois à l'aide de `rand`

II.2.a) Loi uniforme sur un intervalle réel

On considère une v.a.r. X telle que $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a,b])$ (où a et b deux réels tels que $a < b$).

▶ Que signifie que $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a,b])$?

► Calculer la fonction de répartition F de X.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Trois cas se présentent :

- Si $x < a$:

- Si $x \in [a, b]$:

- Si $x > b$:

► Démontrer que F réalise une bijection de $[a, b]$ dans $[0, 1]$.
Déterminer sa bijection réciproque $G : [0, 1] \to [a, b]$.

► On prolonge G en posant $G(x) = a$ si $x < 0$ et $G(x) = b$ si $x > 1$.
Déterminer la loi de la v.a.r. $V = G(U)$.

- Tout d'abord, d'après la question précédente :

$$V(\Omega) \ = \ \big(G(U)\big)(\Omega) \ = \ G\big(U(\Omega)\big) \ = \ G([0,1]) \ = \ [a, b]$$

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Trois cas se présentent :
  × Si $x < a$, alors :

× Si $x \in [a, b]$:

× Si $x > b$, alors :

Finalement : $F_V : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{si } x \in [a,b] \\ 1 & \text{si } x > b \end{cases}$

On reconnaît la fonction de répartition d'une v.a.r. de loi $\mathcal{U}([a, b])$. Or la fonction de répartition caractérise la loi. Ainsi : $V \hookrightarrow \mathcal{U}([a, b])$.

► En déduire une simulation en **Python** d'une v.a.r. X telle que $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a, b])$.
On écrira une fonction `unifContinue` qui :

× prend en paramètre deux réels `a` et `b`,

× renvoie une variable `v` qui contient le résultat de la simulation de X.

On utilisera la fonction `rd.random` de la bibliothèque `random`.

II.3. Le théorème d'inversion aux concours (session 2015)

II.3.a) Simulation d'une v.a.r. suivant une loi exponentielle (`EML 2015`)

Soit $\lambda > 0$ et soit X une v.a.r. telle que $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$.

- Que signifie $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$?

- Déterminer la fonction de répartition F de X.

- Démontrer que F réalise une bijection de $[0, +\infty[$ dans $[0, 1[$.
  Déterminer sa bijection réciproque $G : [0, 1[\to [0, +\infty[$.

► On prolonge G en posant $G(x) = 0$ si $x < 0$. Déterminer la loi de la v.a.r. $V = G(U)$.

- Tout d'abord, d'après la question précédente :

$$V(\Omega) \;=\; \big(G(U)\big)(\Omega) \;=\; G\big(U(\Omega)\big) \;=\; G([0,1]) \;=\; [0,+\infty[$$

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent :
  - Si $x < 0$, alors :
  - Si $x \in [0,+\infty[$:

Finalement : $F_V : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-\lambda\, x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$

On reconnaît la fonction de répartition d'une v.a.r. de loi $\mathcal{E}(\lambda)$. Or la fonction de répartition caractérise la loi. Ainsi : $V \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$.

► En déduire une simulation en **Python** d'une v.a.r. X telle que $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$.
On écrira une fonction `expo` qui :

× prend en paramètre un réel `lambda`,

× renvoie une variable `v` qui contient le résultat de la simulation de X.

On utilisera la fonction `rd.random`.

L'énoncé `EML 2015` commençait par ce résultat d'inversion.
L'usage des fonctions de répartition n'était pas explicitement demandé.

► *Soit U une v.a.r. suivant la loi uniforme sur $[0,1[$. Quelle est la loi de la v.a.r. $V = -\dfrac{1}{\lambda}\ln(1-U)$?*

► *Ércire une fonction en **Python** qui, étant donné un réel λ strictement positif, simule la loi exponentielle de paramètre λ.*

II.3.b) Simulation d'une v.a.r. suivant la loi standard de Gumbel (HEC 2015)

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles telle que $F : x \mapsto \exp\left(-\mathrm{e}^{-\lambda x}\right)$.

- ► *Justifier que F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et montrer que F réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0,1[$.*

- ► *En déduire que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire T admettant une densité f_T continue sur $\mathbb{R}$ que l'on déterminera ; on dit que T suit la loi de Gumbel de paramètre λ.*

On suppose maintenant que $\lambda = 1$.

- ► *Expliciter la bijection réciproque G de la fonction F.*

- *Après importation des bibliothèques* `numpy` *et* `matplotlib.pyplot`*, on considère le programme* ***Python*** *suivant :*
  `x = np.linspace(-2, 2, 400) ; y = (np.exp(-np.exp(-x))) ; plt.plot(x,y), plt.plot(y,x)`
  Le réel 0 fait-il partie des nombres renvoyés par la commande `x = np.linspace(-2,2,400)` *?*

Quel sera le résultat de l'exécution de ce programme ?

- *Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur l'intervalle* $]0,1[$.
  Quelle est la loi de la variable aléatoire $G(U)$?

- *Par une méthode de votre choix, écrire en **Python** les commandes qui permettent de simuler la loi de T.*