TP 10 : Tracés de solutions d'équations différentielles en **Python**

I. Résolution d'un système différentiel à deux inconnues

I.1. Rappel théorique

- On appelle **système différentiel linéaire homogène à coefficients constants** à deux inconnues x et y tout système d'équations différentielles de la forme :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \left\{\begin{array}{rcrcr} x'(t) & = & a_{1,1}\, x(t) & + & a_{1,2}\, y(t) \\ y'(t) & = & a_{2,1}\, x(t) & + & a_{2,2}\, y(t) \end{array}\right.$$

où :

× x et y sont des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

× $a_{1,1}$, $a_{1,2}$, $a_{2,1}$, $a_{2,2}$ sont des réels appelés **coefficients** du système.

- Un tel système peut se réécrire sous la forme :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

ou encore, avec des notations évidentes :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ X'(t) \ = \ A\, X(t)$$

- Résoudre ce système c'est trouver un couple de fonctions (x, y), toutes deux dérivables sur $\mathbb{R}$ et qui satisfont le système.
- On appelle **problème de Cauchy** de condition initiale $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ en $t_0 \in \mathbb{R}$ la donnée du système précédent auquel on ajoute la condition (dite **initiale**) $X(t_0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$. Autrement dit, c'est le problème suivant :

$$\left\{\begin{array}{l} \forall t \in \mathbb{R},\ X'(t) \ = \ A\, X(t) \\ x(t_0) \ = \ x_0 \\ y(t_0) \ = \ y_0 \end{array}\right.$$

- Rappelons qu'un tel problème de Cauchy admet une unique solution. Autrement dit, il existe un unique couple (x, y) constitué de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ tel que :

× $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ est solution de $X' \ = \ A\, X$.

× $x(t_0) = x_0$ et $y(t_0) = y_0$.

I.2. Résolution dans le cas où la matrice A est diagonale

On note $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ et on considère le problème (H) : $X' \ = \ AX$.

► Résoudre (H).

$$\begin{array}{rcl} X' = A\,X & \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\[2ex] & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcll} x' & = & a\,x & \\ y' & = & & b\,y \end{array} \right. \\[2ex] & \Leftrightarrow & \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ \forall t \in \mathbb{R},\ \left\{ \begin{array}{rcl} x(t) & = & \lambda\ \mathrm{e}^{a\,t} \\ y(t) & = & \mu\ \mathrm{e}^{b\,t} \end{array} \right. \end{array}$$

On en déduit que l'ensemble des solutions de (H) est : $\mathcal{S}_H \ = \ \{t \mapsto \begin{pmatrix} \lambda\,\mathrm{e}^{a\,t} \\ \mu\,\mathrm{e}^{b\,t} \end{pmatrix} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$.

► Démontrer alors l'unicité de la solution dans le cas où une condition initiale est donnée.

I.3. Résolution dans le cas où la matrice A est diagonalisable

- On note $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et on considère le système (H) : $X' \ = \ AX$.
- On suppose que A est diagonalisable. Il existe donc :
  - × $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ une matrice inversible,
  - × $D = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ diagonale,

  telles que : $A = P\,D\,P^{-1}$.

► Résoudre (H).

- $$\begin{array}{rcll} X \text{ solution de } (H) & \Leftrightarrow & X' = A\,X & \\ & \Leftrightarrow & X' = PDP^{-1}X & \\ & \Leftrightarrow & P^{-1}X' = DP^{-1}X & \\ & \Leftrightarrow & (P^{-1}\,X)' = D\,(P^{-1}\,X) & \\ & \Leftrightarrow & Y' = DY & \quad \textit{(où } Y = P^{-1}X\textit{)} \end{array}$$
- Résolvons alors le système $Y' = D\,Y$, noté (H').

  Il existe deux fonctions u et v telles que : $\forall t \in \mathbb{R},\ Y(t) \ = \ \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$.

$$\begin{array}{rcl} Y' = DY & \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \\[2ex] & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcll} u' & = & a\,u & \\ v' & = & & b\,v \end{array} \right. \\[2ex] & \Leftrightarrow & \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ \forall t \in \mathbb{R},\ \left\{ \begin{array}{rcl} u(t) & = & \lambda\ \mathrm{e}^{a\,t} \\ v(t) & = & \mu\ \mathrm{e}^{b\,t} \end{array} \right. \end{array}$$

On en déduit que l'ensemble des solutions $\mathcal{S}_{H'}$ de (H') est :

$$\mathcal{S}_{H'} \ = \ \{t \mapsto \begin{pmatrix} \lambda\ \mathrm{e}^{a\,t} \\ \mu\ \mathrm{e}^{b\,t} \end{pmatrix} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$$

- Revenons à la résolution de (H).

$$\begin{aligned} X \text{ solution de } (H) &\Leftrightarrow Y' = DY \quad (\textit{où } Y = P^{-1}X) \\ &\Leftrightarrow \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ \forall t \in \mathbb{R},\ Y(t) = \begin{pmatrix} \lambda\, e^{a\,t} \\ \mu\, e^{b\,t} \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ \forall t \in \mathbb{R},\ P^{-1}\, X(t) = \begin{pmatrix} \lambda\, e^{a\,t} \\ \mu\, e^{b\,t} \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ \forall t \in \mathbb{R},\ X(t) = P \begin{pmatrix} \lambda\, e^{a\,t} \\ \mu\, e^{b\,t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On en déduit que l'ensemble des solutions $\mathcal{S}_H$ de (H) est :

$$\mathcal{S}_H \;=\; \{t \mapsto P \begin{pmatrix} \lambda\, e^{a\,t} \\ \mu\, e^{b\,t} \end{pmatrix} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$$

► Démontrer alors l'unicité de la solution dans le cas où une condition initiale est donnée.

II. Trajectoires d'un système différentiel à deux inconnues

- On note $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et on considère le système $(H) : X' \;=\; AX$.
- On appelle trajectoire de H la courbe paramétrée décrite dans le plan par un couple de solutions (x, y). Autrement dit, si (x, y) est une solution de (H), la trajectoire de cette solution est l'ensemble des points :
$$\{\ \big(x(t), y(t)\big) \mid t \in \mathbb{R}\ \}$$
- Tracer cette trajectoire c'est tracer les points de l'ensemble $\{\ \big(x(t), y(t)\big) \mid t \in \mathbb{R}\ \}$.

II.1. Le cas d'une matrice A diagonale

II.1.a) Cas où les deux valeurs propres sont strictement négatives

On note $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ et on considère le système $(H) : X' \;=\; AX$.

► Résoudre le système (H).

L'ensemble des solutions de (H) est : $\mathcal{S}_H \;=\; \{t \mapsto \begin{pmatrix} \lambda\, e^{-t} \\ \mu\, e^{-3\,t} \end{pmatrix} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$.

► On ajoute la condition initiale en $t_0 = 0$ définie par : $\left\{ \begin{array}{l} x(t_0) = 1 \\ y(t_0) = 0 \end{array} \right.$.
Donner alors l'unique couple de solutions du problème de Cauchy associé et définir sa trajectoire.

D'après ce qui précède, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\forall t \in \mathbb{R}$, $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\, e^{-t} \\ \mu\, e^{-3t} \end{pmatrix}$.

$$\left\{ \begin{array}{l} x(0) = 1 \\ y(0) = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{ccc} \lambda & = & 1 \\ \mu & = & 0 \end{array} \right.$$

Finalement, l'unique solution au problème de Cauchy est le couple (x, y) défini par :
$\forall t \in \mathbb{R}$, $x(t) = e^{-t}$ et $y(t) = 0$.
La trajectoire de cette solution est l'ensemble $\{\ \big(e^{-t}, 0\big) \mid t \in \mathbb{R}\ \}$.

- On se propose maintenant de tracer cette trajectoire. Pour ce faire, on commence par tracer un repère centré en 0 d'abscisses variant dans $[-3,3]$ et d'ordonnées variant dans $[-3,3]$.
  Placer dans ce repère :
  - × le point $\big(x(t_1), y(t_1)\big)$ pour $t_1 = -\ln(3)$.
  - × le point $\big(x(t_2), y(t_2)\big)$ pour $t_2 = -\ln(2)$.
  - × le point $\big(x(t_0), y(t_0)\big)$ pour t_0.
  - × le point $\big(x(t_3), y(t_3)\big)$ pour $t_3 = \ln(2)$.
  - × le point $\big(\lim\limits_{t\to+\infty} x(t), \lim\limits_{t\to+\infty} y(t)\big)$.

- On considère maintenant le condition initiale en $t_0 = -\ln(2)$ définie par : $\left\{\begin{array}{l} x(t_0) = 1 \\ y(t_0) = 0 \end{array}\right.$.
  Donner alors l'unique couple de solutions du problème de Cauchy associé et définir sa trajectoire.

D'après ce qui précède, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\forall t \in \mathbb{R}$, $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\,\mathrm{e}^{-t} \\ \mu\,\mathrm{e}^{-3t} \end{pmatrix}$.

$$\left\{\begin{array}{l} x(0) = 1 \\ y(0) = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} \lambda\,\mathrm{e}^{\ln(2)} & = & 1 \\ \mu & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} \lambda & = & \frac{1}{2} \\ \mu & = & 0 \end{array}\right.$$

Finalement, l'unique solution au problème de Cauchy est le couple (x, y) défini par :
$\forall t \in \mathbb{R}$, $x(t) = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-t}$ et $y(t) = 0$.
La trajectoire de cette solution est l'ensemble $\{\ \big(\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-t}, 0\big) \mid t \in \mathbb{R}\ \}$.

- Tracer alors la trajectoire de cette solution. Pour ce faire, on tracera les points $\big(x(t_i), y(t_i)\big)$ pour les valeurs t_i définies ci-dessus. Que remarque-t-on ? Que peut-on en conclure ?

On remarque que la trajectoire est la même que la trajectoire précédente.
On peut en conclure :

- × une condition initiale définit une unique solution.
- × deux solutions différentes peuvent posséder la même trajectoire.
- × une trajectoire est entièrement définie par un point (x_0, y_0) par lequel elle passe.
  En particulier, par un point ne passe qu'une seule trajectoire (même si cette trajectoire représente une infinité de solutions différentes !).
  Autrement dit, 2 trajectoires distinctes ne s'intersectent jamais.

On retiendra que pour définir une solution, on a besoin d'une condition initiale (x_0, y_0) qui est atteinte en un temps t_0 donnée.
Pour définir une trajectoire, seule la valeur (x_0, y_0) importe (en fonction des valeurs de t_0, on définit des solutions différentes).

- Effectuer le travail précédent (définir l'unique solution et tracer sa trajectoire) pour les conditions initiales en $t_0 = 0$ successivement définies par :
  1) $\big(x(t_0), y(t_0)\big) = (-1, 0)$
  2) $\big(x(t_0), y(t_0)\big) = (0, 1)$
  3) $\big(x(t_0), y(t_0)\big) = (0, -1)$
- Déterminer l'unique solution du problème de Cauchy défini à l'aide de la solution initiale :

$$\big(x(t_0), y(t_0)\big) = (0, 0) \quad \text{en} \quad t_0 = 0$$

À quoi correspond la trajectoire d'une telle solution ?
Quel nom a-t-on donné à ce type de solutions dans le cours ?

- L'unique solution au problème de Cauchy est le couple (x, y) défini par : $\forall t \in \mathbb{R}$, $x(t) = 0$ et $y(t) = 0$.
- La trajectoire d'une telle solution est un point.
- Une telle solution est appelé un point d'équilibre.
- Plus précisément, ce point d'équilibre est stable.

- On se propose alors d'effectuer un tracé de trajectoires à l'aide de **Python**.
On commence par définir, de manière général, un système différentiel à 2 inconnues.

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
from scipy.integrate import odeint

# On définit ici le système différentiel
def syst(X, t, a11, a12, a21, a22) :
    x, y = X
    dXdt = [a11 * x + a12 * y, a21 * x + a22 * y]
    return dXdt
```

- Recopier et compléter le programme suivant à la suite du précédent pour $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ et $\big(x(t_0), y(t_0)\big) = (0.75, 0.25)$.

```
# Matrice A (choisir les coefficients)
a11, a12 =       -1,0
a21, a22 =       0,-3
# Intervalle de temps sur lequel on trace la solution
t = np.linspace(0, 2, 51)
# Choix de la condition initiale
X0 =       [0.75,0.5]

# On trace y en fonction de x
# plot en temps positif
sol = odeint(syst, X0, t, args=(a11, a12, a21, a22))
plt.plot(sol[:, 0], sol[:, 1], 'b')
# plot en temps négatif
sol = odeint(syst, X0, -t, args=(a11, a12, a21, a22))
plt.plot(sol[:, 0], sol[:, 1], 'b')
```

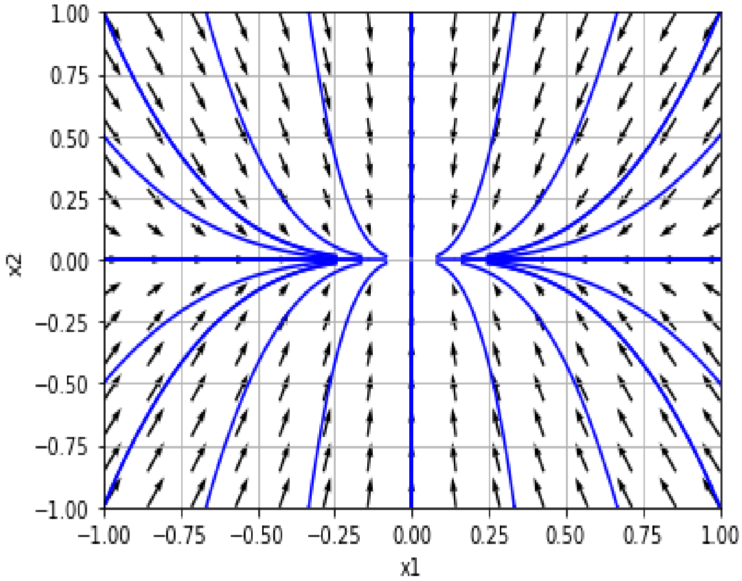
- Afin de rendre plus lisible le tracé, on ajoute enfin les lignes suivantes.

```
# Configuration fenêtre graphique
plt.grid()
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')
plt.axis([-1,1,-1,1])

# Représentation des tangentes aux trajectoires
g1 = np.linspace(-1,1,15)
g2 = np.linspace(-1,1,15)
A1, A2 = np.meshgrid(g1,g2)
V1,V2 = syst((A1,A2),t, a11, a12, a21, a22)
r1 = np.sqrt(1+V1**2)
r2 = np.sqrt(1+V2**2)
plt.quiver(A1, A2, V1/r1, V2/r2)
plt.show()
```

En compilant le programme obtenu, on obtient alors un premier graphique.

- Expliquer comment on peut compléter le graphique précédent afin d'obtenir le suivant :

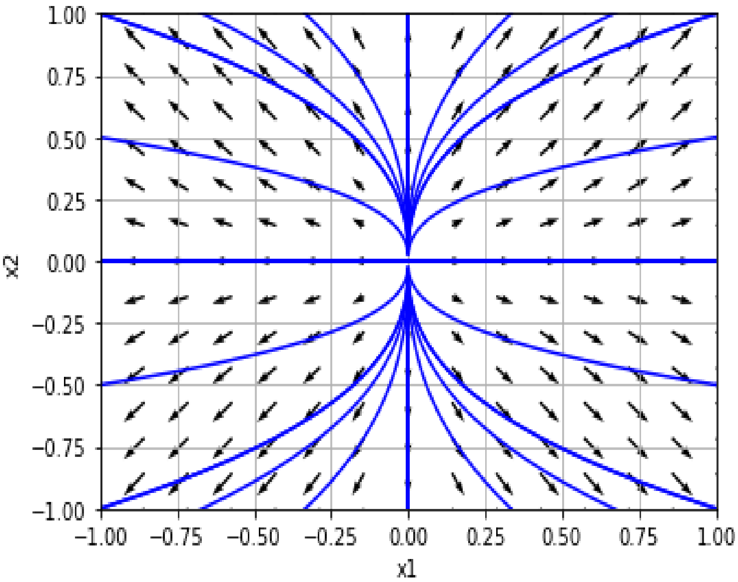


- Faire apparaître l'unique état d'équilibre du système en rouge sur le tracé précédent.
- Que remarque-t-on sur les trajectoires ? Comment appelle-t-on un tel point d'équilibre ?

Toutes les trajectoires convergent vers le point d'équilibre $(0, 0)$.
Un tel point d'équilibre est appelé point d'équilibre stable.

II.1.b) Cas où les deux valeurs propres sont strictement positives

On considère maintenant $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. On obtient le tracé ci-dessous.

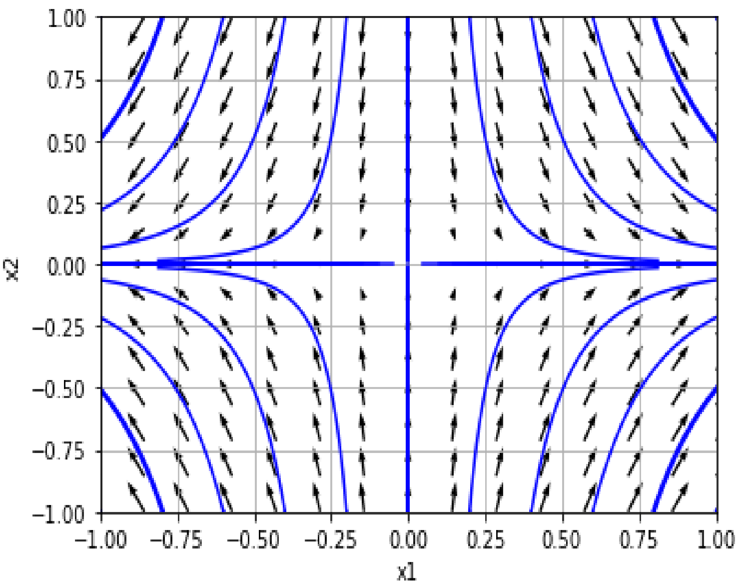


- Faire apparaître l'unique état d'équilibre du système en rouge sur le tracé précédent.
- Que remarque-t-on sur les trajectoires ? Comment appelle-t-on un tel point d'équilibre ?

> Toutes les trajectoires s'éloignent du point d'équilibre $(0, 0)$ et semblent diverger.
> Un tel point d'équilibre est appelé point d'équilibre instable.

II.1.c) Cas où les deux valeurs propres sont de signes opposés

On considère maintenant $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$. On obtient le tracé ci-dessous.



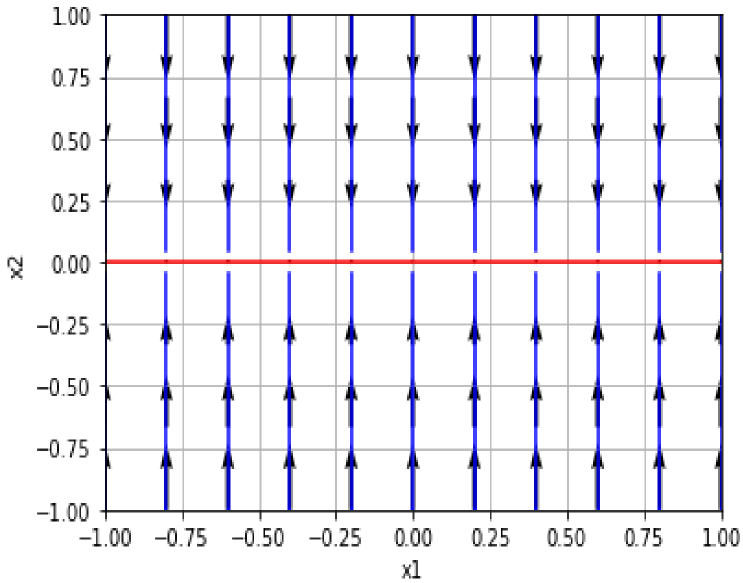
- Faire apparaître l'unique état d'équilibre du système en rouge sur le tracé précédent.

- Que remarque-t-on sur les trajectoires ? Comment appelle-t-on un tel point d'équilibre ?

> Il y a deux trajectoires spéciales qui convergent vers $(0,0)$.
> Toutes les autres trajectoires s'éloignent du point d'équilibre $(0,0)$ après s'en être approché et semblent diverger.
> Un tel point d'équilibre est appelé point selle.

II.1.d) Cas où une valeur propre est nulle et l'autre est strictement négative

On considère maintenant $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. On obtient le tracé ci-dessous.



- Faire apparaître les états d'équilibres du système en rouge sur le tracé précédent.
- Que remarque-t-on sur les trajectoires ? Que peut-on dire sur les points d'équilibre ?

> L'abscisse des trajectoires est constante (car $x_1' = 0$).
> Toutes les trajectoires ne convergent pas vers un même point d'équilibres.
> Tous les points d'équilibre sont instables.

- A quoi ressemblerait le dessin si on avait choisit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$?

II.2. Le cas d'une matrice A diagonalisable

On considère dans cette partie une matrice A qui vérifie : $P^{-1}AP = D$ où D est diagonale et P est une matrice inversible.

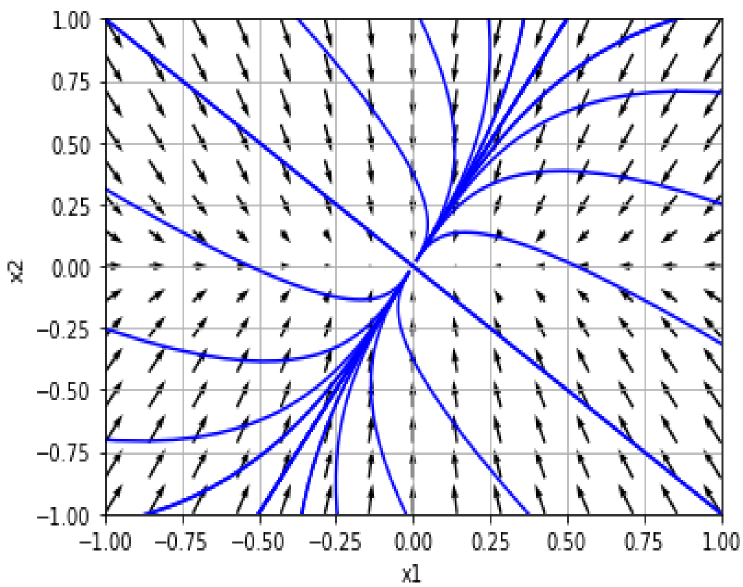
- On note $X = PY$. Montrer que $X' = AX$ si et seulement si $Y' = DY$.

$$X' = AX \iff PY' = PDP^{-1}X \iff Y' = DP^{-1}X \iff Y' = DY$$

Ainsi, on peut résoudre l'équation $Y' = DY$ pour obtenir les solutions de l'équation $X' = AX$.
Dans l'exemple suivant, on choisit :

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad A = PDP^{-1}$$

On obtient le tracé ci-dessous.



- Faire apparaître l'unique état d'équilibre du système en rouge sur le tracé précédent.
- Quelle comparaison peut-on faire avec le tracé obtenu dans le cas où A est diagonale ?

On peut comparer avec le tracé obtenu dans le cas où $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$.
L'image à subi une rotation, mais les solutions suivent des trajectoires similaires.
L'unique point d'équilibre est encore stable.

- Dans le cas où A est diagonalisable, rappeler la condition nécessaire et suffisante sur les valeurs propres λ_1 et λ_2 de A pour que tous les états d'équilibre soient stables.

La CNS est : $\lambda_1 \leqslant 0$ et $\lambda_2 \leqslant 0$.