Exercice 1
Calculer les limites des fonctions suivante aux points indiqués.

1. $f_1(x) = \dfrac{\ln(x)+x-1}{x+e^{-x}}$ en 0^+ et en $+\infty$.
2. $f_2(x) = \ln\left(e^{-x}+x^{-2}\right)$ en 0^+ et en $+\infty$.
3. $f_3(x) = \dfrac{xe^x+1}{e^x+1}$ en 0^+, en $+\infty$ et en $-\infty$.
4. $f_4(x) = x^4 e^{-\sqrt{x}}$ en $+\infty$.
5. $f_5(x) = \dfrac{x\ln(x)+\ln(x)}{\sqrt{x+1}}$ en 0^+ et en $+\infty$.
6. $f_6(x) = x^{\frac{1}{x}}$ en 0^+ et en $+\infty$.

Exercice 2
Á l'aide d'équivalents ou de développements limités, déterminer les limites suivantes.

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(e^x-1)^2}{x\ln(1+x)}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^\alpha \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$
3. $\displaystyle\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$
4. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)-x}{2x^2}$
5. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\ln(x+1)-x\ln(x)$
6. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{x}$
7. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x(1+x)}-\frac{\ln(1+x)}{x^2}$
8. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{2x}$

Exercice 3
Dans cet exercice, on considère la fonction f définie sur $]-\infty,1[$ comme suit :

$$f(0)=1 \quad \text{et } \forall x\in\,]-\infty,1[\,\setminus\{0\},\ f(x)=\frac{-x}{(1-x)\ln(1-x)}$$

1. Montrer que f est continue sur $]-\infty,1[$.
2. a) Déterminer le développement de $\ln(1-x)$ à l'ordre 2 au voisinage de 0.
   b) En déduire que f est dérivable en 0 puis vérifier que $f'(0)=\dfrac{1}{2}$.
3. a) Montrer que f est dérivable sur $]-\infty,1[\,\setminus\{0\}$, puis calculer $f'(x)$ pour tout réel $x\in\,]-\infty,1[\,\setminus\{0\}$.
   b) Déterminer le signe de la quantité $\ln(1-x)+x$ lorsque $x\in\,]-\infty,1[$.
   c) En déduire les variations de f.
   d) Déterminer les limites de f aux bornes de son domaine de définition, puis dresser son tableau de variation.
4. Tracer l'allure de la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.
5. En utilisant les questions 2b et 3a, montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty,1[$.

Exercice 4
Étudier la continuité et la dérivabilité des fonctions suivantes.

1. $f_1(x) = \begin{cases} x\ln(x^2)-2x & \text{si } x\neq 0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}$
2. $f_2(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{1-e^{-2x}} & \text{si } x\neq 0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}$
3. $f_3(x) = \begin{cases} \dfrac{x\ln(x)}{x-1} & \text{si } x\in\,]0,+\infty[\,\setminus\{1\} \\ 0 & \text{si } x=1 \end{cases}$
4. $f_4(x) = \begin{cases} \dfrac{xe^{-x}}{1-e^{-x}} & \text{si } x\neq 0 \\ 1 & \text{si } x=0 \end{cases}$

Exercice 5
Soit f la fonction définie sur $]-1,+\infty[$ par : $f(x)=e^{-2x}\ln(1+x)$.
Calculer le développement limité d'ordre 2 en 0 de f, puis en déduire l'équation de la tangente en 0 ainsi que la position de la courbe par rapport à la tangente au voisinage de 0.

Exercice 6
1. Déterminer un équivalent des fonctions suivantes aux points indiqués.
   a) $f_1(x) = \dfrac{e^x-1}{x\ln(1+x)-x^2}$ en 0 et en $+\infty$.
   b) $f_2(x) = \ln\left(1+x^2\right)$ en 0 et en $+\infty$.
   c) $f_3(x) = \dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ en $+\infty$ et en 0.

2. Déterminer : $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{1+x}{2}\right)^{\frac{x}{x-1}}$. *Poser* $t = x - 1$.

Exercice 7

1. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^{-x} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^k}{k!} + (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} \mathrm{e}^{-t} dt$$

2. En écrivant l'égalité précédente pour $n = 2$, puis pour $n = 3$, montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \leqslant x - 1 + \mathrm{e}^{-x} \leqslant \frac{x^2}{2}$$

3. En déduire un équivalent de $x - 1 + \mathrm{e}^{-x}$ en 0.

4. Retrouver le résultat précédent sans calculs.

Exercice 8

On note $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\mathrm{e}^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

2. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$, et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$.

3. Montrer : $f'(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} -\dfrac{1}{2}$.

4. Établir que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et préciser $f'(0)$.

Exercice 9

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x^{1+\frac{1}{x}} = \mathrm{e}^{(1+\frac{1}{x}) \ln x}, & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

On désigne par $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé.

1. *a)* Montrer que f est continue en 0.

b) Étudier la dérivabilité de f en 0.

2. *a)* Montrer que, pour tout réel x strictement positif : $\ln x \leqslant x + 1$.

b) Calculer $f'(x)$ pour $x > 0$ et déterminer son signe.
Préciser le sens de variation de f.

3. *a)* Déterminer la limite de f en $+\infty$.

b) Déterminer un équivalent de $f(x) - x$ en $+\infty$.
En déduire la nature de la branche infinie de $\mathcal{C}$ en $+\infty$.

Exercice 10

Dans ce problème, la lettre n désigne un entier naturel non nul.
On note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f_n(x) = x\mathrm{e}^{-\frac{n}{x}} \quad \text{et} \quad f_n(0) = 0$$

On note (C_n) la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. *a)* Montrer que f_n est continue à droite en 0.

b) Montrer que f_n est dérivable à droite en 0 et donner la valeur du nombre dérivé à droite en 0 de f_n.

2. *a)* Montrer que f_n est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$. Pour tout réel x non nul, calculer $f_n'(x)$ puis étudier son signe.

b) Calculer les limites de f_n en $+\infty$, $-\infty$ et 0^-, puis donner le tableau de variations de f_n.

3. ***a)*** Rappeler le développement limité à l'ordre 2 de e^u lorsque u est au voisinage de 0.

b) En déduire que, lorsque x est au voisinage de $+\infty$, on a :

$$f_n(x) = x - n + \frac{n^2}{2x} + \underset{x \to +\infty}{o}\left(\frac{1}{x}\right).$$

Que dire au voisinage de $-\infty$?

c) En déduire qu'au voisinage de $+\infty$, ainsi qu'au voisinage de $-\infty$, (C_n) admet une asymptote oblique (D_n) dont on donnera une équation.
Préciser la position relative de (D_n) et (C_n) aux voisinages de $+\infty$ et de $-\infty$.

d) Donner l'allure de la courbe (C_1).