Exercice 1
Déterminer si les intégrales suivantes sont convergentes, et le cas échéant calculer leur valeur :

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t}}\,dt$
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2)^2}\,dt$
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x^2}\,dx$
4. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x^2}\,dx$
5. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{3^t}\,dt$
6. $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x}\,dx$

Exercice 2
Déterminer si les intégrales suivantes sont convergentes :

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t^3+3t^2+t}}\,dt$
2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\,dx$
3. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^n}\,dt$
4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2+1}\,dx$
5. $\displaystyle\int_0^{+\infty} u^k\mathrm{e}^{-u^2}\,du$, avec $k\in\mathbb{N}$
6. $\displaystyle\int_1^{2} \frac{1}{t(t-1)}\,dt$

Exercice 3
Soit f la fonction définie sur $[2,+\infty[$ par $f(t)=\dfrac{1}{t(\ln(t))^2}$

1. Quelle est la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} f(t)\,dt$?
2. Déterminer les variations de f.
3. En déduire que pour tout $k\geqslant 2$:
$$\frac{1}{(k+1)(\ln(k+1))^2}\leqslant\int_k^{k+1} f(t)\,dt\leqslant\frac{1}{k(\ln(k))^2}$$
4. En déduire la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{n(\ln(n))^2}$.

Exercice 4
Soit $\alpha\in\mathbb{R}_+^*$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose
$$u_n(\alpha)=\frac{n!}{\displaystyle\prod_{k=0}^{n}(\alpha+k)}\quad\text{et}\quad I_n(\alpha)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\alpha t}(1-\mathrm{e}^{-t})^n\,dt$$

1. Étudier la convergence de l'intégrale généralisée $I_n(\alpha)$ et calculer $I_0(\alpha)$.
2. Soit $x\in\mathbb{R}_+^*$.
Intégrer par parties $\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-\alpha t}(1-\mathrm{e}^{-t})^n\,dt$ puis en déduire une relation simple entre $I_n(\alpha)$ et $I_{n-1}(\alpha+1)$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.
3. En déduire que : $\forall n\in\mathbb{N},\ I_n(\alpha)=u_n(\alpha)$.

Exercice 5
Soit f la fonction définie par $f(x)=\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{t^{-x}}{1+t}\,dt$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Quel est le sens de variation de f ?
3. On admet que f est une fonction continue sur son ensemble de définition.
Déterminer $f(x)+f(x+1)$ pour $x>0$.
En déduire la limite de f en 0 et en $+\infty$.

Exercice 6 (Essec II 2005)

1. Déterminer l'ensemble $\mathcal{D}$ des réels α pour lesquels l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-t}\,dt$ est convergente.
Pour tout $\alpha\in\mathcal{D}$, on pose : $\Gamma(\alpha)=\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-t}\,dt$.
2. Exprimer $\Gamma(\alpha+1)$ en fonction de $\Gamma(\alpha)$.
Calculer $\Gamma(1)$ puis en déduire la valeur de $\Gamma(n)$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

Exercice 7

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $f_n = \dfrac{n\ln(x)}{n+1+nx^2}$.

On définit également sur $\mathbb{R}_+^*$ la fonction h par : $h(x) = \dfrac{\ln(x)}{1+x^2}$.

1. Montrer que les fonctions f_n et h sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$ et étudier leur signe.

2. ***a)*** Montrer que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2}\,dx$ est convergente et déterminer sa valeur.

b) Montrer que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_1^{+\infty} h(x)\,dx$ est convergente.

Dans toute la suite de l'exercice, on note alors K l'intégrale impropre :

$$K = \int_1^{+\infty} h(x)\,dx$$

3. ***a)*** Montrer, grâce au changement de variable $u = \dfrac{1}{x}$, que $K = -\displaystyle\int_0^1 h(u)\,du$.

b) En déduire que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} |h(x)|\,dx$ converge et est égale à $2K$.

c) En déduire également que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} h(x)\,dx$ converge et vaut 0.

4. ***a)*** Montrer que pour tout réel x strictement positif, $|f_n(x)| \leqslant |h(x)|$.

En déduire la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx$.

b) Montrer que pour tout réel x strictement positif, $h(x)-f_n(x) = \dfrac{h(x)}{n+1+nx^2}$.

c) En déduire que

$$0 \leqslant \int_1^{+\infty} (h(x)-f_n(x))\,dx \leqslant \frac{K}{n+1}$$

puis que

$$-\frac{K}{n+1} \leqslant \int_0^1 (h(x)-f_n(x))\,dx \leqslant 0$$

d) Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx = 0$

Exercice 8

On pose pour tout réel $x > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$J_0(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x} \quad \text{et} \quad J_n(x) = \frac{1}{n!}\int_0^x t^n \mathrm{e}^{-t}\,dt$$

1. Calculer pour tout réel $x > 0$, $J_1(x)$.

2. Établir pour tout réel $x > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la relation

$$J_n(x) = J_{n-1}(x) - \frac{1}{n!}x^n\mathrm{e}^{-x}$$

3. En déduire pour tout réel $x > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une expression de $J_n(x)$ sous forme de somme.

4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n\mathrm{e}^{-t}\,dt$ est convergente et calculer sa valeur.

5. On note : $I_n = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{n(x+\ln(1-x))}\,dx$.

À l'aide du changement de variable $t = n(1-x)$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$I_n = n!\,\frac{\mathrm{e}^n}{n^{n+1}}\,J_n(n)$$

Exercice 9

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f(x) = \frac{x}{e^x - 1} \quad \text{et} \quad f(0) = 1.$$

$\mathcal{C}$ désigne la courbe représentative de f dans un repère orthogonal.

a) Montrer que f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

b) Étudier les variations de f, déterminer ses limites en $+\infty$ et $-\infty$, et étudier la nature des éventuelles branches infinies de $\mathcal{C}$. Tracer la courbe $\mathcal{C}$.

c) Montrer que pour tout $x \geqslant 0$, on a : $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$.

2. Montrer que l'aire comprise entre la courbe $\mathcal{C}$ et ses asymptotes est finie.

3. Pour tout entier naturel n, on pose : $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)e^{-nx}\ dx$

a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale I_n est convergente.

b) Montrer que pour $n \geqslant 1$, on a : $0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

c) Montrer que pour $n \geqslant 1$, on a :

$$\forall x \geqslant 0,\ f(x) = f(x)\ e^{-nx} + \sum_{k=1}^{n} x\ e^{-kx}$$

En déduire que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \int_0^{+\infty} f(x)\ dx$

4. On pose pour tout $u > 0$, $J_u = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^{ux} - 1}\ dx$ et $K_u = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^{ux} + 1}\ dx$.

a) Montrer que, pour tout $u > 0$, les intégrales J_u et K_u sont convergentes.

b) Calculer, pour tout $u > 0$, J_u et K_u en fonction de J_1 et K_1.

c) Établir que $J_1 - K_1 = 2J_2$.

d) Déduire des questions précédentes une relation simple entre J_1 et K_1, puis entre J_u et K_u.

Exercice 10

On note f la fonction définie, pour tout réel x strictement positif, par $f(x) = \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$.

1. *a)* Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on pose $I_n = \displaystyle\int_n^{+\infty} f(x)\ dx$.

Montrer que l'intégrale I_n est convergente et exprimer I_n en fonction de n.

b) En déduire que $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$

2. Montrer que la série de terme général $u_n = f(n)$ est convergente.

3. *a)* Établir que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $f(k+1) \leqslant \displaystyle\int_k^{k+1} f(x)\ dx \leqslant f(k)$.

b) En sommant soigneusement cette dernière inégalité, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \leqslant I_n \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k + \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n^2}$$

c) Déduire des questions précédentes un équivalent simple, lorsque n est au voisinage de $+\infty$, de $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{e^{\frac{1}{k}}}{k^2}$.

Exercice 11

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x}}\ dx$.

1. Montrer que I_n existe, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

3. *a)* Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \dfrac{2n}{2n+1} I_{n-1}$.

b) En déduire l'existence et la nature de la série de terme général $v_n = \ln(I_n) - \ln(I_{n-1})$, puis la limite de $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $J_n = \sqrt{n}\, I_n$ et $K_n = \sqrt{n+1}\, I_n$.

a) Montrer que les suites $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

b) En déduire qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\alpha}{\sqrt{n}}$.

5. a) Calculer I_n en fonction de n.

b) On admet la formule de Stirling : $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} n^n\, \mathrm{e}^{-n}\sqrt{2\pi n}$.

Montrer que $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}\left(\dfrac{2n}{2n+1}\right)^{2n+1} \dfrac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{n}}$.

c) Déterminer la valeur de α.

Exercice 12

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n}\, dx$ et $u_n = \sqrt{n}\, I_n$.

On admet que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = \sqrt{2\pi}$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que I_n est convergente. Établir une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1}.

2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est monotone et étudier sa convergence.

3. Calculer I_n, pour tout $n \geqslant 1$.

4. a) Montrer que, pour tout réel x, $\ln(1+x^2) \leqslant x^2$.

En déduire que pour tout $n \geqslant 1$, $I_n \geqslant \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-nx^2}\, dx$.

b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-nx^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{n}}$.

c) En déduire une minoration de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et conclure que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne tend pas vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

5. Montrer qu'il existe un réel α tel que $\dbinom{2n}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\alpha\, 4^n}{\sqrt{n}}$.