Exercice 1

Déterminer la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.

1. $\mathcal{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B}' = (u, v, w)$ avec $u = (1,1,1)$, $v = (1,-1,0)$ et $w = (1,1,-2)$.

2. $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ et

$\mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$.

3. $\mathcal{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ et $\mathcal{B}' = (-X^2 + 2X + 1, X + 1, X^2 + 2)$.

4. $\mathcal{B} = (1, X - 2, X^2 - 3X + 3)$ et $\mathcal{B}'$ est la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 2

1. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ et les matrices colonnes $X_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$,

$X_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $X_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Montrer que les vecteurs X_1, X_2 et X_3 sont des vecteurs propres de A et déterminer les valeurs propres associés.

2. Soit la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que 3 est valeur propre de B et donner une base de l'espace propre E_3.

b) Déterminer sans calculs une autre valeur propre de B et donner une base de l'espace propre associé.

3. Ces matrices sont-elles diagonalisables ?

Exercice 3

Déterminer les valeurs propres des matrices suivantes, ainsi qu'une base des sous-espaces propres associés.

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

2. $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

3. $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

Exercice 4

Les matrices suivantes sont-elles diagonalisables ? inversibles ?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Exercice 5

Les matrices suivantes sont-elles diagonalisables ? Si oui, déterminer une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $A = PDP^{-1}$.

1. $A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

3. $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

4. $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -1 \\ 4 & -3 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Exercice 6

1. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Montrer que si f est diagonalisable, alors f^k est aussi diagonalisable pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

2. Soit $g \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^3\right)$ dont la matrice dans la base canonique est $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- *a)* La matrice C admet-elle pour valeur propre 0 ?
- *b)* Calculer C^4. En déduire un polynôme annulateur de C puis les valeurs propres possibles de C.
- *c)* Déterminer le spectre de C. La matrice C est-elle diagonalisable ?
- *d)* La matrice C^3 est-elle diagonalisable ?
- *e)* Qu'a-t-on mis en évidence par rapport à la question 1.

Exercice 7

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculer A^2 puis diagonaliser A.

Exercice 8

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$f(e_1) = \frac{1}{3}(e_2 + e_3), \quad \text{et} \quad f(e_2) = f(e_3) = \frac{2}{3}e_1$$

1. Écrire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.

2. Déterminer la dimension de $\mathrm{Im}(f)$ puis celle de $\mathrm{Ker}(f)$.

3. En déduire une valeur propre de f ainsi que le sous-espace propre associé.

4. Déterminer les autres valeurs propres de f ainsi que les sous-espaces propres associés.

5. En déduire que f est diagonalisable.

Exercice 9

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. On considère un endomorphisme f de E tel que

$$f \neq \theta, \ f^2 + i \neq \theta, \ f \circ (f^2 + i) = \theta$$

où i est l'application identité de E et θ l'application constante nulle de E dans E.

1. Montrer que f n'est pas bijectif.

2. En déduire que 0 est valeur propre de f.

3. f est-il diagonalisable ?

Exercice 10

On considère les matrices carrées d'ordre trois suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -3 & -2 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \ D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de A.

2. La matrice A est-elle diagonalisable ?

3. En déduire une matrice P d'ordre trois, inversible, de deuxième ligne $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, telle que $A = PDP^{-1}$.

4. Vérifier que : $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

5. Calculer la matrice $\Delta = P^{-1}BP$ puis en déduire que B est diagonalisable.

6. En déduire, sans calcul, que la matrice C est diagonalisable puis donner ses valeurs propres.

7. Les matrices A, B et C sont-elles inversibles ?

Exercice 11

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Diagonaliser la matrice A.

2. En déduire une expression de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. Soient (u_n) et (v_n) deux suites définies par : $\begin{cases} u_0 = 1,\ v_0 = 1 \\ u_{n+1} = 7u_n + 2v_n \\ v_{n+1} = -4u_n + v_n \end{cases}$

et on pose : $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

a) Exprimer X_{n+1} en fonction de X_n

b) En déduire une expression de X_n en fonction de A et de X_0.

c) Exprimer le terme général de u_n en fonction de n.

Exercice 12

La matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$ étant donnée, on définit l'application ϕ_A par :

$$\phi_A : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & \phi_A(M) = AM - MA \end{array}$$

1. *a)* Vérifier que $A^2 = A$. En déduire les valeurs propres possibles de A.

b) Prouver que la matrice A est diagonalisable et déterminer une matrice P inversible de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale D de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dont la première colonne est nulle vérifiant la relation : $A = PDP^{-1}$.

2. *a)* Montrer que ϕ_A est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

b) Établir que $X^3 - X$ est un polynôme annulateur de ϕ_A. En déduire les valeurs propres possibles de ϕ_A.

c) Montrer que la matrice M est un vecteur propre de ϕ_A associée à la valeur propre λ ssi la matrice $N = P^{-1}MP$ est non nulle et vérifie l'équation matricielle : $DN - ND = \lambda N$.

Exercice 13

On considère dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ainsi que l'équation $(\mathcal{E})$ suivante d'inconnue $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:

$$(\mathcal{E}) \ : \ X^2 + 3X + I_2 = A$$

1. Justifier que la matrice A est diagonalisable puis déterminer une matrice P inversible et une matrice D diagonale contenant les valeurs propres de A rangées par ordre décroissant tels que $A = PDP^{-1}$.

2. On note $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Montrer que A vérifie $(\mathcal{E})$ ssi $P^{-1}AP$ vérifie l'équation $(\mathcal{E}')$ suivante :

$$(\mathcal{E}') \ : \ X^2 + 3X + I_2 = B$$

3. Montrer que toute solution de $(\mathcal{E}')$ commute avec B.

4. En déduire que $P^{-1}AP$ est diagonale.

5. Donner les solutions de $(\mathcal{E})$.

Exercice 14

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ fixé. On considère l'application φ_A qui à toute matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ associe le produit AM.

1. *a)* Montrer que φ_A est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

b) Montrer que si l'endomorphisme φ_A est bijectif, alors il existe une unique matrice $N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $AN = I_2$.

c) Montrer que l'application φ_A est un automorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ **si et seulement si** la matrice A est inversible.

2. Dans cette question, et uniquement cette question, on pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

On note $\mathcal{B} = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ avec :

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Justifier que la matrice A est diagonalisable.

b) Déterminer la matrice de l'endomorphisme φ_A dans la base $\mathcal{B}$, notée T.

c) Préciser les valeurs propres et une base de chaque sous-espace propre de l'endomorphisme φ_A.

d) L'endomorphisme φ_A est-il diagonalisable ?

3. a) Soit un réel λ tel qu'il existe une matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ non nulle vérifiant : $\varphi_A(M) = \lambda M$.
Montrer par un raisonnement par l'absurde que la matrice $A - \lambda I_2$ n'est pas inversible.

b) Soit un réel μ tel qu'il existe une matrice $X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ non nulle vérifiant : $AX = \mu X$.
On note :

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \ N = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & 0 \end{pmatrix}, \ N' = \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & y \end{pmatrix}$$

Montrer que N et N' sont des vecteurs propres de l'endomorphisme φ_A associés à la valeur propre μ

c) Comparer le spectre de l'endomorphisme φ_A et le spectre de la matrice A.

d) Montrer que si la matrice A est diagonalisable, alors l'endomorphisme φ_A est diagonalisable.

Exercice 15

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$ la base canonique de $\mathbb{R}^5$.
On désigne par I la matrice identité de $\mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ et on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^5$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. a) Déterminer la dimension de $\mathrm{Im}(f)$ puis montrer que la famille $(e_2 + e_3 + e_4, e_1 + e_5)$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$.

b) En déduire la dimension de $\mathrm{Ker}(f)$ puis donner une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

2. On note $u = e_2 + e_3 + e_4$ et $v = e_1 + e_5$.

a) Écrire $f(u)$ et $f(v)$ comme combinaisons linéaires de e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, puis $f(u - v)$ et $f(u + 3v)$ comme combinaisons linéaires de u et v.

b) En déduire les valeurs propres de f et préciser les sous-espaces propres associés.

c) Établir que C est diagonalisable et déterminer une matrice D diagonale et une matrice R inversible telles que : $C = RDR^{-1}$.

3. a) Établir la relation suivante : $D(D + I)(D - 3I) = 0$

b) En déduire que le polynôme P défini par $P(X) = X^3 - 2X^2 - 3X$ est un polynôme annulateur de C.

4. On admet que (principe de la division euclidienne), pour tout entier naturel n non nul, il existe un unique polynôme Q_n et trois réels a_n, b_n et c_n tels que :

$$X^n = (X^3 - 2X^2 - 3X)Q_n(X) + a_n X^2 + b_n X + c_n$$

a) En utilisant les racines de P, déterminer les valeurs de a_n, b_n et c_n en fonction de n.

b) Déduire de ce qui précède l'expression, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, de C^n en fonction de C et C^2.