Exercice 1
Soit $a \in \mathbb{R}$ et (X, Y) un couple de v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}^2$, de loi jointe :

$$\mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) = \frac{a}{2^{i+1} j!}$$

1. Déterminer le réel a.

2. Déterminer les lois marginales.

3. X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 2
Un sac contient n jetons numérotés de 1 à n. On tire successivement et sans remise 2 jetons de ce sac. On note T_1 le numéro du premier jeton tiré et T_2 le numéro du deuxième jeton tiré.

1. Déterminer la loi de T_1.

2. Déterminer la loi du couple (T_1, T_2).

3. En déduire la loi de T_2.

4. Les v.a. T_1 et T_2 sont-elles indépendantes ?

5. Déterminer $\mathbb{E}(T_1 + T_2)$.

Exercice 3
On considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n et on tire au hasard deux boules, avec remise dans cette urne. On note X la v.a. égale au numéro de la première boule et Y la v.a. au numéro de la deuxième boule.

1. Justifier que X et Y sont indépendantes.

2. On pose $S = \max(X, Y)$. Déterminer $\mathbb{P}([S \leqslant k])$ puis donner la loi de S.

3. On pose $T = \min(X, Y)$. Déterminer $\mathbb{P}([T > k])$ puis donner la loi de T.

Exercice 4
On considère B et G deux v.a. indépendantes suivant respectivement une loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$ et une loi géométrique $\mathcal{G}(p')$.

1. Déterminer la loi de la v.a. BG.

2. Calculer $\mathbb{E}(BG)$.

Exercice 5
Soit $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite de v.a. indépendantes suivant la loi de Bernoulli de paramètre p. Soit $Y_i = X_i X_{i+1}$ et $S_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$.
Pour tout $i \in \mathbb{N}$, déterminer la loi de Y_i puis calculer $\mathbb{E}(S_n)$.

Exercice 6
Soit X une v.a. de loi uniforme sur $[\![-1, 1]\!]$. On note $Y = X^2$.

1. Montrer que les v.a. X et Y ne sont pas indépendantes.

2. Calculer $\text{Cov}(X, Y)$. Commenter.

Exercice 7
On considère trois v.a. U, V, et W, indépendantes et telles que U et W suivent la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, et V suit la loi de Poisson de paramètre $\mu > 0$.
On pose $X = U + V$ et $Y = V + W$.

1. Rappeler les lois de X et de Y.

2. ***a)*** Montrer que $\text{Cov}(X, Y)$ existe et la calculer

b) En déduire le coefficient de corrélation linéaire de X et Y.

Exercice 8
Soient X et Y deux v.a. discrètes admettant un moment d'ordre 2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. Développer $V(X + \lambda Y)$ puis, en s'aidant du signe du polynôme en λ obtenu, montrer que :

$$(\text{Cov}(X, Y))^2 \leqslant V(X)V(Y)$$

2. Préciser les cas d'égalité dans la relation précédente.

3. Montrer que le coefficient de corrélation linéaire est compris entre -1 et 1. Préciser les cas d'égalité.

Exercice 9

Un sac contient n jetons numérotés de 1 à n. On tire successivement et sans remise 2 jetons de ce sac. On note X le numéro du premier jeton et Y le numéro du second jeton tiré.
Déterminer la covariance des v.a. X et Y. *On pourra utiliser les résultats de l'exercice* **??**

Exercice 10

Un auto-stoppeur attend au péage d'une autoroute pendant une certaine période. On admet que le nombre de véhicules franchissant le péage pendant cette période est une v.a.r. suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. À chaque fois qu'un véhicule franchit le péage, il lance une pièce truquée qui donne Pile avec la probabilité p. On pose $q = 1 - p$.

On note N, X et Y respectivement le nombre de lancers, le nombre de Piles obtenus et le nombre de Faces obtenues.

1. *a)* Pour tout couple (i, j) d'entiers naturels calculer la probabilité $\mathbb{P}_{[N=j]}([X = i])$.

   b) En déduire la loi du couple (X, N).

   c) Montrer que X suit une loi de Poisson de paramètre λp.

2. Expliquer sans aucun calcul pourquoi Y suit une loi de Poisson de paramètre λq.

3. Montrer que X et Y sont indépendantes.

4. *a)* Montrer que : $\mathbb{V}(Y) = \mathbb{V}(N) + \mathbb{V}(X) - 2\,\mathrm{Cov}(N, X)$.

   b) En déduire $\mathrm{Cov}(N, X)$

   c) Donner de même $\mathrm{Cov}(N, Y)$.

Exercice 11

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et X une v.a. discrète telle que $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$.

Montrer que : $\mathbb{E}(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}([X > k])$.

Exercice 12

Soient X, Y et Z trois v.a. discrètes. Vrai ou faux :

1. Si X et Y sont indépendantes, et si X et Z sont indépendantes, alors X est indépendante de (Y, Z).

2. Si (X, Y) et Z sont indépendantes, alors Y est indépendante de Z et X est indépendante de Z.

3. Si X et Y sont indépendantes et (X, Y) est indépendante de Z, alors X est indépendante de (Y, Z).

Exercice 13

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a. indépendantes de même loi définie par :

$$\mathbb{P}([X_n = 0]) = 1 - p\,, \quad \mathbb{P}([X_n = 1]) = p\,, \quad \text{avec } 0 < p < 1$$

On pose

$$\begin{array}{rcl} Y_n & = & X_n X_{n+1} \\ S_n & = & X_1 + \cdots + X_n \\ V_n & = & Y_1 + \cdots + Y_n\,. \end{array}$$

1. Calculer $\mathbb{E}(S_n)$, $\mathbb{E}(V_n)$.

2. Calculer $\mathbb{V}(S_n)$, $\mathbb{V}(V_n)$ et $\mathrm{Cov}(S_n, V_n)$.

Exercice 14
Soient n et N des entiers supérieurs ou égaux à 2 et $X_1, \ldots, X_n$ des v.a.r. indépendantes et distribuées uniformément sur l'ensemble $[\![1, N]\!]$, (*i.e.* $\mathbb{P}([X_i = k]) = \dfrac{1}{N}$ pour $k \in [\![1, N]\!]$). On désigne par U_n leur minimum et par V_n leur maximum.

1. Calculer la loi de V_n.

2. Calculer la loi jointe de U_n et V_n puis $\mathbb{P}([U_n = V_n])$.

3. Calculer la probabilité pour des événements $[X_1 = j]$ et $[X_2 = k]$ sachant $[U_n = r]$.

4. Trouver un équivalent lorsque N tend vers $+\infty$ (n fixé) de $\mathbb{E}(V_n)$ et $\mathbb{V}(V_n)$.

Exercice 15
Soit $(X_n)_{n \geqslant 1}$ une suite de v.a. indépendantes et de même loi. On suppose que les (X_n) prennent des valeurs strictement positives. On pose $\mathbb{E}(X_k) = a$, $\mathbb{E}(X_k^{-1}) = b$, ($a < +\infty$ et $b < +\infty$) et $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

1. Montrer que $\mathbb{E}(S_n^{-1})$ est fini et que $\mathbb{E}(X_k S_n^{-1}) = \dfrac{1}{n}$, pour $k \in [\![1, n]\!]$.

2. Calculer $\mathbb{E}(S_m S_n^{-1})$, $n, m \geqslant 1$.

Exercice 16

1. Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé, telles que $X(\Omega) = Y(\Omega) = [\![1, n]\!]$, avec $n \in \mathbb{N}^*$.
Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on appelle espérance conditionnelle de Y sachant l'événement $[X = k]$ réalisé le réel $\mathbb{E}_{[X=k]}(Y)$ défini par :

$$\mathbb{E}_{[X=k]}(Y) = \sum_{i=1}^{n} i \ \mathbb{P}_{[X=k]}([Y = i])$$

Démontrer l'égalité :

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}_{[X=k]}(Y) \ \mathbb{P}([X = k])$$

On dispose de n urnes $U_1, \ldots U_n$. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, l'urne U_k contient k boules numérotées de 1 à k. On choisit une urne au hasard, puis on tire une boule dans cette urne.

On note X la variable aléatoire égale au numéro de l'urne choisie et Y la variable aléatoire égale au numéro de la boule tirée.

2. Quelle est la loi de X ?

3. ***a)*** Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, donner la loi conditionnelle de Y sachant $[X = k]$. Préciser l'espérance conditionnelle de Y sachant $[X = k]$, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$.

b) Déduire de la question *1.* l'espérance de Y.

4. Déterminer la loi conjointe du couple (X, Y).

5. ***a)*** Déterminer la loi de Y sous forme d'une somme.

b) Déterminer la variance $\mathbb{V}(Y)$ de Y en fonction de n.

Exercice 17
Le nombre de voitures vendues par un concessionnaire chaque jour est une variable aléatoire X qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
Lorsqu'un client se présente pour acheter une voiture, on admet que la probabilité qu'il demande un crédit est égale à p, avec $0 < p < 1$.
Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de clients qui dans la journée demande un crédit pour acheter une voiture.

1. Pour tout $(k, n) \in \mathbb{N}^2$, calculer $\mathbb{P}_{[X=n]}([Y = k])$.

2. Déterminer la loi conjointe du couple (X, Y).

3. Déterminer la loi de Y, puis calculer l'espérance et la variance de Y.

4. Soit Z la variable aléatoire égale au nombre de clients qui achètent dans la journée une voiture au comptant.

a) Déterminer la loi de Z.

b) Les variables Y et Z sont-elles indépendantes ?

Exercice 18

N désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2. Un joueur lance une pièce équilibrée indéfiniment. On note X_N la variable aléatoire réelle discrète égale au nombre de fois où, au cours des N premiers lancers, deux résultats successifs ont été différents. On peut appeler X_N le « nombre de changements » au cours de N premiers lancers.

Par exemple, si les $N = 9$ premiers lancers ont donné successivement :
Pile, Pile, Face, Pile, Face, Face, Face, Pile, Pile
alors la variable X_9 aura pris la valeur 4 (quatre changements aux $3^{\text{ème}}$, $4^{\text{ème}}$, $5^{\text{ème}}$ et $8^{\text{ème}}$ lancers).

1. Justifier que $X_N(\Omega) = [\![0, N-1]\!]$.

2. Déterminer la loi de X_2, ainsi que son espérance. Déterminer la loi de X_3.

3. Montrer que $\mathbb{P}([X_N = 0]) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{N-1}$ et $\mathbb{P}([X_N = 1]) = 2(N-1)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{N}$

4. ***a)*** Justifier que pour tout entier $k \in [\![0, N-1]\!]$, $\mathbb{P}_{[X_N=k]}([X_{N+1} = k]) = \dfrac{1}{2}$.

b) En déduire que pour tout entier $k \in [\![0, N-1]\!]$,

$$\mathbb{P}\left([X_{N+1} - X_N = 0] \cap [X_N = k]\right) = \frac{1}{2}\mathbb{P}([X_N = k])$$

c) En sommant cette relation pour k variant de 0 à $N-1$, montrer que $\mathbb{P}\left([X_{N+1} - X_N = 0]\right) = \dfrac{1}{2}$.

d) Montrer que la variable $X_{N+1} - X_N$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{2}$.

En déduire la relation $\mathbb{E}(X_{N+1}) = \dfrac{1}{2} + \mathbb{E}(X_N)$, puis donner $\mathbb{E}(X_N)$ en fonction de N.

5. ***a)*** Montrer grâce aux résultats ***4.b)*** et ***4.c)*** que les variables $X_{N+1} - X_N$ et X_N sont indépendantes.

b) En déduire par récurrence sur N que X_N suit une loi binomiale $\mathcal{B}\left(N-1, \dfrac{1}{2}\right)$

En déduire la variance $\mathbb{V}(X_N)$.

Exercice 19

Trois personnes a_1, a_2, a_3 entrent à l'instant 0 dans un bureau de poste qui ne comporte que deux guichets. Les personnes a_1 et a_2 peuvent être servies immédiatement alors que a_3 doit attendre qu'un guichet soit libéré pour être servie. On supposera que le temps est mesuré par des nombres entiers avec une unité fixée.

Soit $p \in]0, 1[$. On suppose que pour $i \in \{1, 2, 3\}$ le temps de service de la personne a_i est une variable aléatoire X_i dont la loi est donnée par :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \ \mathbb{P}([X_i = k]) = (1-p).p^k$$

On suppose que les variables aléatoires X_1, X_2 et X_3 sont indépendantes.

On désigne par Y l'instant de première sortie (celle de a_1 ou a_2) qui est aussi l'instant où a_3 commence à se faire servir. Enfin, Z désigne l'instant de sortie de a_3.

1. Exprimer l'événement $[Y \geqslant k]$ à l'aide des variables aléatoires X_1 et X_2.
Calculer pour tout entier $k \geqslant 0$, le nombre $\mathbb{P}([Y \geqslant k])$. Déterminer alors la loi de Y.

2. Exprimer Z en fonction de Y et X_3. Déterminer la loi de Z.

3. Calculer le temps moyen passé par a_3 à la poste.

Exercice 20

On note $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels et $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers strictement positifs.

Une urne contient des boules blanches, noires et rouges. Les proportions respectives de ces boules sont p pour les blanches, q pour les noires et r pour les rouges, avec $p + q + r = 1$, $p \in]0, 1[$, $q \in]0, 1[$ et $r \in [0, 1[$.

On fait dans cette urne des tirages successifs indépendants numérotés 1, 2, ... etc. A chaque tirage, on tire une boule de l'urne et ces tirages sont faits avec remise de la boule tirée. Les proportions des boules restent ainsi les mêmes au cours de l'expérience.

Toutes les variables aléatoires sont définies dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1. ***a)*** On note X_1 la variable aléatoire représentant le numéro du tirage auquel une boule blanche sort pour la première fois.
Trouver la loi de probabilité de X_1 ; calculer son espérance et sa variance.

b) On suppose dans cette question, et dans cette question seulement, que $p = \dfrac{4}{7}$, $q = \dfrac{2}{7}$ et $r = \dfrac{1}{7}$.
Écrire un programme en langage **Scilab** qui simule l'expérience et qui affiche la valeur de la variable aléatoire X_1.

2. On note X_2 la variable aléatoire égale au numéro du tirage de la seconde boule blanche.

a) Trouver, pour tout couple d'entiers strictement positifs (k, ℓ), la probabilité de l'événement $\big([X_1 = k] \cap [X_2 = k + \ell]\big)$.
En déduire la loi du couple (X_1, X_2).

b) Déterminer la loi de probabilité de X_2.

c) Montrer que la variable $U_2 = X_2 - X_1$ a la même loi de probabilité que X_1.
Puis, montrer que les variables aléatoires X_1 et U_2 sont indépendantes.
En déduire l'espérance et la variance de X_2.

3. On note Y_1 la variable aléatoire représentant le numéro du tirage auquel une boule noire sort pour la première fois.

a) Trouver la loi de probabilité du couple (X_1, Y_1).
Les variables aléatoires X_1 et Y_1 sont-elles indépendantes ?

b) On se place, pour cette question, dans le cas particulier où $r = 0$ (c'est à dire qu'il n'y a pas de boule rouge). Calculer alors la covariance de X_1 et Y_1.

4. Soit, pour n entier strictement positif, Z_n la variable aléatoire qui prend la valeur $+1$ si au $n^{ième}$ tirage une boule blanche est tirée, -1 si au $n^{ième}$ tirage une boule noire est tirée, et 0 si au $n^{ième}$ tirage une boule rouge est tirée.
On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n$.

a) Trouver la loi de probabilité de S_1. Calculer son espérance et sa variance.
En déduire l'espérance et la variance de S_n, pour tout $n \geq 1$.

b) Soit t un réel strictement positif. On pose $V_n = t^{S_n}$.
Trouver la loi de probabilité de la variable V_1 et calculer son espérance.

c) En déduire l'espérance de V_n, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 21

Soit n un entier naturel tel que $n \geqslant 2$. On dispose d'un paquet de n cartes C_1, C_2, ..., C_n que l'on distribue intégralement, les unes après les autres entre n joueurs J_1, J_2, ..., J_n selon le protocole suivant :

- la première carte C_1 est donnée à J_1 ;
- la deuxième carte C_2 est donnée de façon équiprobable entre J_1 et J_2 ;
- la troisième carte C_3 est donnée de façon équiprobable entre J_1, J_2 et J_3 ;
- et ainsi de suite, jusqu'à la dernière carte C_n qui est donc distribuée de façon équiprobable entre les joueurs J_1, ..., J_n.

On suppose l'expérience modélisée sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.
On note X_n la variable aléatoire égale au nombre de joueurs qui n'ont reçu aucune carte à la fin de la distribution.

1. Déterminer $X_n(\Omega)$ et calculer $\mathbb{P}([X_n = 0])$ et $\mathbb{P}([X_n = n - 1])$.

2. Pour tout i de $[\![1, n]\!]$, on note B_i la v.a.r. qui vaut 1 si J_i n'a reçu aucune carte à la fin de la distribution et vaut 0 sinon.
Déterminer la loi de B_i. Exprimer la v.a.r. X_n en fonction des v.a.r. B_i et en déduire l'espérance de X_n.

3. En faisant le moins de calculs possibles, donner la loi de X_4.

4. ***a)*** Montrer que pour i et j dans $[\![1, n]\!]$ tels que $i < j$, on a :

$$\mathbb{P}([B_i = 1]) \cap [B_j = 1]) = \frac{(i-1)(j-2)}{n(n-1)}$$

En déduire la covariance des v.a.r. B_j et B_j.

b) Montrer que $\mathbb{V}(X_n) = \dfrac{n+1}{12}$.