**Exercice 1.** *Cours*
Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Montrer les trois assertions suivantes :

1. $f(0_E) = 0_F$
2. $\forall x \in E,\ f(-x) = -f(x)$
3. Pour tous réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ et pour tous vecteurs $x_1 \dots x_n$,

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i) \qquad \text{(par récurrence)}$$

**Exercice 2**
Soit $f : \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ telle que $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 + 2x_2 + 5x_3$.
Montrer que $f$ est linéaire, puis déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.

**Exercice 3**
Soit $f : \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ telle que $f\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$.
Montrer que $f$ est linéaire, puis déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$, avec une base pour chacun.

**Exercice 4**
Soit $\varphi : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ telle que $\varphi(P) = P'$.
Montrer que $\varphi$ est linéaire, puis déterminer $\mathrm{Ker}(\varphi)$ et $\mathrm{Im}(\varphi)$, avec une base pour chacun.

**Exercice 5**
Soit $f : \mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{Ker}(f) = \mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.
Que dire de l'application $f$ ?

**Exercice 6**
Soit $f : \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ telle que $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ -x-y \end{pmatrix}$.
Montrer que $f$ est linéaire, puis déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$, ainsi qu'une base pour chacun. Que conclure ?

**Exercice 7**
Soit $f : \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ l'application linéaire dont la matrice dans les bases canoniques est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.
2. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et de $\mathrm{Im}(f)$.
3. La fonction $f$ est-elle injective ? Est-elle surjective ?

**Exercice 8**
Soit $f : \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ en posant : $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2+y^2 \\ x^2-y^2 \end{pmatrix}$.
Démontrer que $f$ n'est pas linéaire.

**Exercice 9**
Soit $g : \mathscr{M}_{m,1}(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ l'application linéaire dont la matrice dans les bases canoniques est :

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Que valent $m$ et $n$ ?
2. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(g)$ et de $\mathrm{Im}(g)$.
3. Étudier l'injectivité et la surjectivité de $g$.

**Exercice 10**

On définit une fonction $f : \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ en posant :

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \end{pmatrix}$$

*1.* Démontrer que $f$ est linéaire.

*2.* Déterminer la matrice de $f$ dans les bases canoniques.

*3.* Étudier l'injectivité de $f$, puis la surjectivité de $f$.

*4.* Déterminer si elle existe la bijection réciproque de $f$.

**Exercice 11**

Soient $A \in \mathscr{M}(\mathbb{R})n$ une matrice et $f : \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ l'application linéaire définie par $f(X) = AX$. On suppose $A$ inversible.

Démontrer que $f$ est bijective et que $f^{-1}$ est l'application linéaire $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ définie par $f^{-1}(Y) = A^{-1}Y$.

**Exercice 12**

Soit : $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Soit $f : \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique est $A$.

Soit $a \in \mathbb{R}$ tel qu'il existe un vecteur non nul $X \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ tel que $f(X) = aX$.

Démontrer que $a = -1$ ou $a = 2$.

**Exercice 13**

Soit $f : \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ l'application linéaire dont la matrice dans les bases canoniques est :

$$\begin{pmatrix} -1-t & 0 & 1 \\ -3 & 4-t & 0 \\ 0 & 0 & 2-t \end{pmatrix}$$

Pour quelles valeurs de $t$ l'application $f$ est-elle injective ?

**Exercice 14.** *Endomorphisme et commutant*

*1.* Soient $E$ et $F$ deux espaces vectoriels et $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Montrer que le noyau $\mathrm{Ker}(f)$ de $f$ est un sev de $E$.

*2.* Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice fixée.
On considère l'application $c_A : M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto AM - MA$.

  ***a)*** Montrer qu $c_A$ est un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

  ***b)*** On note $\mathcal{C}_A = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \ / \ AM = MA\}$ le commutant de la matrice $A$. Déduire des questions précédentes que $\mathcal{C}_A$ est un sev de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

  ***c)*** Dans cette question, $n = 2$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(c_A)$ et sa dimension.

**Exercice 15.** *Composition*

Soient $E$ un espace vectoriel et $f$ un automorphisme de $E$. On considère l'application :

$$\Phi : \begin{cases} \mathscr{L}(E) & \to & \mathscr{L}(E) \\ g & \mapsto & f \circ g \circ f^{-1} \end{cases}$$

*1.* Montrer que $\Phi$ est un endomorphisme de $\mathscr{L}(E)$.

*2.* En recherchant une application réciproque sous la même forme que $\Phi$, montrer que $\Phi$ est un automorphisme de $\mathscr{L}(E)$.

**Exercice 16**

On considère l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \mapsto & Q(X) = P(X+1) - P(X) \end{array}$

*1.* Montrer que $f$ est linéaire.

*2.* Soit $P \in \mathbb{R}_0[X]$. Calculer $f(P)$. $f$ est-elle injective ?

*3.* Déterminer une base de l'image de $f$. $f$ est-elle surjective ?

*4.* Déterminer un polynôme de $\mathbb{R}_3[X]$ n'ayant pas d'antécédent par $f$.

**Exercice 17**

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

*1.* Déterminer le rang de $A$.

*2.* Calculer $AU$ puis en déduire $\mathrm{Ker}(A)$.

**Exercice 18**

On considère l'application linéaire

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z,t) & \mapsto & (2x+y+z, x+y+t, x+z-t) \end{array}$$

*1.* Déterminer une base du noyau de $g$.

*2.* Déterminer une base de l'image de $g$ en utilisant le théorème du rang.

**Exercice 19**

On considère les matrices $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et on note $f$ l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \mapsto & \dfrac{a+d}{2} \cdot I + \dfrac{b+c}{2} \cdot J \end{array}$$

*1.* Calculer $f(I)$ et $f(J)$.

*2.* Montrer que $f$ est un endomorphisme.

*3.* Déterminer une base du noyau de $f$. $f$ est-elle injective ?

*4.* En déduire le rang de $f$ puis une base de l'image de $f$.

**Exercice 20.** *Isomorphismes*

Montrer que les applications suivantes sont des isomorphismes.

*1.* $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \to & \mathbb{R}^4 \\ (x,y,z,t) & \mapsto & (x-t, y+z, y-z, x+t) \end{array}$

*2.* $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \mapsto & P+P' \end{array}$

*3.* $f : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & TMT \end{array}$ avec $T \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ inversible.

*4.* $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}^3 \\ P & \mapsto & (P(0), P'(1), P''(0)) \end{array}$

**Exercice 21**

$E$ désigne un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, rapporté à une base $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$. Pour tout réel $a$, on considère l'endomorphisme $f_a$ de $E$ défini par

$$f_a(e_2) = 0 \quad \text{et} \quad f_a(e_1) = f_a(e_3) = ae_1 + e_2 - ae_3$$

*1.* Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f_a)$.

*2.* Montrer qu'une base de $\mathrm{Ker}(f_a)$ est $(e_2, e_1 - e_3)$.

**Exercice 22**

Soit $E$ un espace vectoriel et $f$ un endomorphisme de $E$.

*1.* Montrer que $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(f^2)$ et que $\mathrm{Im}(f^2) \subset \mathrm{Im}(f)$.

*2.* Démontrer l'équivalence suivante :

$$\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2) \Leftrightarrow \mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f) = \{0\}$$

**Exercice 23.** *Matrice d'un application linéaire*

Dans chaque cas, déterminer la matrice de $f$ dans la base canonique des espaces considérés puis préciser si $f$ est bijective.

*1.* $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \mapsto & P+P' \end{array}$

*2.* $f : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \mapsto & (a+b-c, a+d) \end{array}$

**Exercice 24**
Soit $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 5 & -8 & -4 \\ 8 & -15 & -8 \\ -10 & 20 & 11 \end{pmatrix}$. On pose $u = (2,4,-5)$, $v = (1,0,1)$, $w = (0,1,-2)$.

*1.* Calculer $f(u)$, $f(v)$ et $f(w)$.

*2.* Montrer que $\mathscr{B}' = (u,v,w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ puis déterminer la matrice $A'$ de $f$ dans la base $\mathscr{B}'$.

*3.* Calculer $A'^2$ et en déduire $f^2$

**Exercice 25**
On note $J_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $J_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
Soit $f$ l'application qui à toute matrice $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ associe $f(M) = M + (a+d)I_2$.

*1.* Montrer $f$ est un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

*2.* Déterminer la matrice $A$ de $f$ dans la base $(J_1, J_2, J_3, J_4)$.

*3.* ***a)*** Montrer que $(J_1 - J_4, J_2, J_3, I_2)$ est une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

***b)*** Déterminer la matrice $D$ de $f$ dans cette base.

*4.* Montrer que $f$ est un automorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

**Exercice 26**
Soit $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et $\varphi$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ par
$\left\{ \begin{array}{l} \varphi(e_i) = e_{i+1} \quad \text{si } 1 \leqslant i \leqslant 3 \\ \varphi(e_4) = e_1 \end{array} \right.$

*1.* Déterminer la matrice $A$ de $\varphi$ dans la base $\mathscr{B}$ puis calculer $A^4$.

*2.* En déduire que $\varphi$ est un automorphisme et déterminer $\varphi^{-1}$.

**Exercice 27**
On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et l'endomorphisme $f$ de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ de $\mathbb{R}^4$ est $A$.

*1.* Déterminer $\text{rg}(f)$ puis en déduire $\text{Ker}(f)$.

*2.* Calculer $f^4$.

*3.* On note $\varepsilon_1 = e_1$, $\varepsilon_2 = f(\varepsilon_1)$, $\varepsilon_3 = f(\varepsilon_2)$, $\varepsilon_4 = f(\varepsilon_3)$ et $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$.

***a)*** Montrer que $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

***b)*** Déterminer la matrice $N$ de $f$ relativement à la base $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^4$.

*4.* Existe-t-il un automorphisme $g$ de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ tel que $g \circ f \circ g^{-1} = f^2$ ?

**Exercice 28**

*1.* Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\varphi : P(X) \mapsto (1 - X^2)P''(X) - 3XP'(X)$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

*2.* Calculer $\varphi(1)$. L'endomorphisme $\varphi$ est-il un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ ?

*3.* Dans cette question, on prend $n = 3$.

***a)*** Donner la matrice de $\varphi$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.

***b)*** Déterminer une base de $\text{Im}(\varphi)$ et une base de $\text{Ker}(\varphi)$.

**Exercice 29**
On considère l'espace vectoriel $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ muni de sa base canonique $\mathscr{B} = (M_1, M_2, M_3, M_4)$ avec :
$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & {}^tM \end{array}$ et $g : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & M +^t M \end{array}$

*1.* Montrer que $f \in \mathscr{L}(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}))$ et $g \in \mathscr{L}(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}))$.

*2.* Déterminer la matrice $A$ de $f$ relativement à la base $\mathscr{B}$.

*3.* En déduire sans calcul supplémentaire la matrice de $g$ relativement à la base $\mathscr{B}$.

*4.* Les applications $f$ et $g$ sont-elles des automorphismes ? Si oui, déterminer l'application réciproque.

*5.* Si $a$ et $b$ sont deux automorphismes, est-ce que $a+b$ est également un automorphisme ?

**Exercice 30**

Soit $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$. On considère les vecteurs $u$ et $v$ de $\mathbb{R}^3$ définis par $u = (0,1,-2)$ et $v = (0,1,-1)$.

*1.* Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et une base de $\mathrm{Im}(f)$.

*2.* Justifier de deux manières différentes que $f$ n'est pas bijectif.

*3.* Montrer que $(v)$ est une base de $\mathrm{Ker}(f - id)$

*4.* Déterminer un vecteur $w$ de $\mathbb{R}^3$, dont la 3ème coordonnée (dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$) est nulle, tel que la famille $C = (u, v, w)$ soit une base de $\mathbb{R}^3$ et que la matrice de $f$ dans la base $C$ soit la matrice $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

*5.* Dans cette question, on suppose qu'il existe un endomorphisme $g$ de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $g \circ g = f$.

**a)** Montrer que $f \circ g = g \circ f$.

**b)** En déduire que $f(g(u)) = 0$ et $f(g(v)) = g(v)$.

**c)** Justifier qu'il existe deux réels $a$ et $b$ tels que $g(u) = au$ et $g(v) = bv$.

**d)** On note $N$ la matrice de $g$ dans la base $C = (u, v, w)$ définie à la question *4.*.
Justifier que $N = \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & d \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$, où $a$ et $b$ sont les deux réels définis à la question précédente, et $c$, $d$ et $e$ des réels.

*6.* Existe-t-il des endomorphismes $g$ de $\mathbb{R}^3$ tels $g \circ g = f$ ?
*Indication : Utiliser les matrices de $f$ et $g$ dans la base $C = (u, v, w)$.*

**Exercice 31**

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ de matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

*1.* Montrer que $f \circ f = 0$.

*2.* Sans calcul, déterminer si $f$ est bijectif.

*3.* Montrer que $\mathrm{Im}(f)$ est inclus dans $\mathrm{Ker}(f)$.

*4.* En déduire les dimensions de ces 2 espaces vectoriels.

*5.* Déterminer des bases de $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.

*6.* Soit $u \notin \mathrm{Ker}(f)$ et $v \in \mathrm{Ker}(f)$.

**a)** Montrer que la famille $(u, f(u))$ est libre dans $\mathbb{R}^3$.

**b)** Montrer que la famille $(u, f(u), v)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

**c)** Déterminer la matrice de $f$ dans la base $(u, f(u), v)$.