Exercice 1. *Historique*
En septembre 1693, Samuel Pepys écrivit à Newton pour lui soumettre le problème suivant : a-t-on le plus de chances d'obtenir (au moins) un 6 en lançant six dés, (au moins) deux 6 en lançant douze dés, ou (au moins) trois 6 en lançant dix-huit dés ? Qu'auriez- vous répondu à Samuel Pepys ?

Exercice 2. *Justice*
Lors d'un procès, deux jurys sont formés : un premier jury avec une seule personne qui une probabilité p de prendre la bonne décision, et un deuxième jury avec trois personnes. Les deux premières prennent leur rôle au sérieux et prennent la bonne décision avec une probabilité p, tandis que le troisième, qui a hâte que cela se termine, tire à pile ou face. Ce jury donne une décision à la majorité. Quel jury a la plus grande probabilité de prendre la bonne décision ?

Exercice 3. *Gagner le gros lot*
Une loterie se déroule une fois par semaine. Chaque semaine, cent billets sont émis et k sont gagnants. On veut acheter 10 billets (on suppose donc $k \leqslant 90$, sinon ce n'est pas drôle). Quelle stratégie choisir pour optimiser ses chances de gagner : acheter dix billets la première semaine, ou un billet par semaine pendant 10 semaines ?

Exercice 4. *Tirage*
Une urne contient 10 boules, 4 rouges et 6 blanches numérotées de 1 à 10.

1. On tire simultanément 3 boules. Quelle est la probabilité d'obtenir un tirage unicolore ? Un tirage bicolore ?

2. Mêmes questions si on tire 3 boules successivement sans remise.

3. Mêmes questions si on tire 3 boules successivement avec remise.

Exercice 5. *Poker*
Un joueur de poker reçoit une main de 5 cartes d'un jeu de 32 cartes. Quelle est la probabilité que sa main contienne :

1. Une seule paire.

2. Deux paires exactement.

3. Un brelan (trois cartes de même hauteur) exactement.

4. Un full (trois cartes de même hauteur et une paire).

5. Un carré.

Exercice 6. *Impasse possible*
Un examen oral comporte 20 sujets possibles. L'épreuve consiste à traiter un sujet parmi 3 tirés au hasard (tirage sans remise). Si un candidat n'a révisé que 12 sujets, quelle est la probabilité que le candidat obtienne au moins un des sujets qu'il a révisé ?

Exercice 7. *Probabilités des cartes*
On tire simultanément deux cartes dans un jeu de 32 cartes. On considère les événements suivants :

A	:	« les deux cartes tirées sont rouges »
B	:	« les deux cartes tirées sont un valet et un dix »
C	:	« les deux cartes tirées sont des personnages »
D	:	« les deux cartes tirées sont des figures et ne sont pas toutes les deux rouges »
E	=	« on obtient au plus une figure »

Calculer leurs probabilités.

Exercice 8. *Probabilité des dés*
On lance successivement deux fois un dé équilibré. Calculer la probabilité des événements suivants :

A : « Obtenir 1 au premier lancer »
B : « Obtenir deux fois 1 »
C : « Obtenir deux faces identiques »
D : « Obtenir une somme paire et deux faces identiques »

Exercice 9. *Probabilité des urnes*
Une urne contient 5 boules blanches et 8 boules noires. On tire successivement 2 boules de l'urne sans remise. Calculer la probabilité pour que l'on obtienne :

1. une boule noire et une boule blanche dans cet ordre ?

2. une boule noire au plus ?

3. deux boules blanches au moins ?

Exercice 10. *Mens sana in corpore sano*
Les élèves d'une classe ont la possibilité de pratiquer une activité sur leur temps libre. Ils peuvent faire du sport, de la musique ou de la danse. Ils peuvent pratiquer une, deux ou trois activités, mais au moins une. On sait que

- 25 élèves font du sport
- 10 élèves dansent
- 12 font de la musique
- 5 font du sport et de la musique
- 4 pratiquent la danse et la musique
- 1 fait du sport et de la danse.
- il y a 38 élèves dans la classe.

On croise un élève au hasard.
Quelle est la probabilité qu'il soit sportif, danseur et musicien ?

Exercice 11. *Conditionnement de dés*
Un dé A a 4 faces rouges et 2 faces blanches. Un dé B a 2 faces rouges et 4 faces blanches. On lance une pièce : si c'est pile, on joue une fois le dé A, et sinon, on joue le dé B.

1. Quelle est la probabilité d'avoir une face rouge ?

2. Quelle est la probabilité d'obtenir pile sachant qu'on a eu une face rouge ?

Exercice 12. *Conditionnement et défauts*
Soient A et B deux événements de probabilités non nulles. Démontrer que

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A) - \mathbb{P}_{\overline{B}}(A)\mathbb{P}(\overline{B})}{\mathbb{P}(B)}$$

Un objet peut avoir un défaut a avec une probabilité $0,2$; un défaut b avec une probabilité $0,3$, s'il n'a pas le défaut b la probabilité qu'il ait le défaut a est $0,1$. On note A : « avoir le défaut a » et B : « avoir le défaut b ».

1. Calculer $\mathbb{P}_B(A)$.

2. A et B sont-ils indépendants ?

3. Calculer la probabilité d'avoir au moins l'un des deux défauts.

Exercice 13. *Conditionnement et dés pipés*
Un lot de 100 dés contient 25 dés pipés pour lesquels la probabilité d'apparition du « 6 » est égale à $\frac{1}{2}$. On prend un dé au hasard, on le jette, on obtient « 6 ». Quelle est la probabilité que le dé soit pipé ?

Exercice 14. *Conditionnement et épidémie*
Un quart de la population a été vaccinée. Parmi les vaccinés, on compte un douzième de malades. Parmi les malades, il y a 4 non vaccinés pour un vacciné. Quelle est la probabilité pour un non vacciné de tomber malade ?

Exercice 15. *Conditionnement et urnes*
Trois urnes contiennent respectivement deux boules rouges et une boule verte, deux boules vertes et une boule noire, deux boules noires et une boule rouge. On tire au hasard une boule dans la première urne et on la met dans la deuxième, puis on tire une boule dans la deuxième urne et on la met dans la troisième, enfin on tire une boule dans cette troisième urne.

1. Calculer la probabilité que la seconde boule soit verte ? rouge ? noire ?

2. Calculer la probabilité que la dernière boule soit verte ? rouge ? noire ?

3. Calculer la probabilité de piocher trois boules de même couleur.

Exercice 16. *Réservations pour Noël*
Une compagnie aérienne étudie la réservation sur l'un de ses vols. Une place donnée est libre le jour d'ouverture de la réservation et son état évolue chaque jour jusqu'à la fermeture de la réservation.
Si la place est réservée le jour k, elle le sera encore le jour $k+1$ avec la probabilité $\dfrac{9}{10}$.
Si la place est libre le jour k, elle sera réservée le jour $k+1$ avec la probabilité $\dfrac{4}{10}$.
Pour k entier positif, on note r_k la probabilité que la place soit réservée le jour k.

1. Exprimer r_{k+1} en fonction de r_k.

2. En déduire l'expression explicite de r_k en fonction de k.

Exercice 17. *Fluctuations boursières*
Soit a un réel appartenant à $]0, 1/2[$. Dans une bourse de valeurs, un titre donné peut monter, rester stable ou baisser.
Le premier jour, le titre est stable.

- Si un jour n, le titre monte, le jour $n+1$, il montera avec la probabilité $1-2a$, restera stable avec la probabilité a, et baissera avec la probabilité a.
- Si un jour n, le titre est stable, le jour $n+1$, il montera avec la probabilité a, restera stable avec la probabilité $1-2a$, et baissera avec la probabilité a.
- Si un jour n, le titre baisse, le jour $n+1$, il montera avec la probabilité a, restera stable avec la probabilité a, et baissera avec la probabilité $1-2a$.

On note M_n (resp. S_n, resp B_n) l'événement : « le titre donné monte le jour n (resp. reste stable, resp. baisse) ».
On pose $p_n = \mathbb{P}(M_n)$, $q_n = \mathbb{P}(S_n)$ et $r_n = \mathbb{P}(B_n)$.

1. Expliciter p_{n+1} (resp. q_{n+1}) en fonction de p_n, q_n, r_n.

2. Que vaut $p_n + q_n + r_n$? En déduire l'expression de r_n en fonction de p_n et q_n.

3. Montrer que les suites p et q sont arithmético-géométriques.

4. En déduire p_n, q_n puis r_n en fonction de n.

Exercice 18. *Lancers d'une pièce*
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On effectue n lancers indépendants d'une pièce pour laquelle la probabilité d'obtenir « face » est p (où $p \in]0, 1[$). Quelle est la probabilité qu'au cours de ces n lancers, « face » ne soit jamais suivi de « pile » ?
(Aide : Quels sont les cas favorables ?)

Exercice 19. *Trouver le truc*
On dispose de 5 pièces de monnaie dont une possède deux « face ». On choisit une des pièces au hasard, puis on la lance n fois.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir « face » au premier lancer ?

2. On a obtenu « face ». Quelle est la probabilité d'avoir choisi la pièce truquée ?

3. Quelle est la probabilité d'obtenir « face » aux n premiers lancers ?

4. On a obtenu n « face » aux n premiers lancers. Quelle est la probabilité p_n d'avoir choisi la pièce truquée ? Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n$.

Exercice 20. *Propriété d'une Probabilité*
Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Montrer les propriétés du cours suivantes :

1. $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$

2. Si $A, B \in \mathscr{A}$ sont incompatibles, $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$

3. Si $A \in \mathscr{A}$, $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$

Exercice 21. *Pile ou Face infini*
On lance successivement une pièce truquée dont la probabilité de faire face est de $p \in]0, 1[$. Pour $n \geqslant 1$, notons F_n :« Obtenir Face au n-ième lancer », et
P_n :« Obtenir Pile au n-ième lancer ».
On note T_n : « le premier Pile est obtenu au n-ième lancer ».

1. Pour $n \geqslant 1$, exprimer l'événement T_n en fonction des F_i et P_i.

2. Donner $\mathbb{P}(T_n)$ en fonction de p et n.

3. On lance la pièce une infinité de fois. Écrire les événements suivants :
   - A_n :« obtenir au moins un pile au cours des n premiers lancers. »,
   - A : « obtenir au moins un pile ».

4. Parmi les suites (F_n), (P_n), (T_n) et (A_n), lesquelles sont croissantes ? décroissantes ?

5. Parmi les suites (F_n), (P_n), (T_n) et (A_n), lesquelles sont constituées d'événements mutuellement indépendants ?

6. Donner la probabilité $\mathbb{P}(A)$. Que peut-on dire de l'événement A ?

Exercice 22. *Jeu infini à deux joueurs et une pièce truquée*
Deux joueurs A et B lancent alternativement une pièce non équilibrée : la probabilité d'obtenir face est un réel $p \in]0, 1[$. C'est A qui commence, et le premier qui obtient face a gagné.

1. Quelle est la probabilité pour que A gagne à son premier lancer ? et à son deuxième ?

2. Quelle est la probabilité pour que A gagne ?

3. Quelle est la probabilité pour que la partie se termine ?

4. Quelle est la probabilité pour que B gagne ?

Exercice 23. *Jeu infini à deux joueurs et deux dés équilibrés*
Considérons deux joueurs A et B. Chacun lance deux dés équilibrés. Le joueur A gagne s'il obtient un total de 6, le joueur B gagne s'il obtient un total de 7. C'est A qui commence. Qui préférez-vous être ?
(on s'inspirera de l'exercice précédent, en calculant la probabilité que A gagne ainsi que la probabilité que B gagne)
Est-ce que la partie s'arrête un jour ?

Exercice 24. *Quelques certitudes*
Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'événements. Montrer les propriétés suivantes :

1. Si il existe un indice k tel que A_k est presque sûr, alors $\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} A_n$ est presque sûr.

2. Si il existe un indice k tel que A_k est négligeable, alors $\bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} A_n$ est négligeable.

3. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n) = 1$, alors $\mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = 1$

4. Si les événements A_n sont mutuellement indépendants et de même probabilité $p \in]0, 1[$, alors on a $\mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = 0$

Exercice 25. *Peut-on gagner en jouant infiniment au Loto ?*

1. Un tirage au Loto est une combinaison (l'ordre ne compte pas) de 6 numéros distincts compris entre 1 et 49. Quelle est la probabilité (on donne : $\binom{49}{6} = 13983816$), notée p dans la suite, de gagner (c-à-d d'avoir les 6 bons numéros) au Loto ?

2. On joue au loto indéfiniment et on définit un événement en posant : $A =$ « on gagne au moins une fois », et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
   - $A_n =$ « on gagne pour la première fois au $n^{\text{ème}}$ tirage »,

- $B_n =$ « on gagne au n-ème tirage ».

  Exprimer A_n à l'aide des B_k. En déduire $\mathbb{P}(A_n)$ en fonction de p.

3. En déduire $\mathbb{P}(A)$ en exprimant A à l'aide des A_n. Comment appelle-t-on un tel A ?

Exercice 26. *Alternance Pile-Face*
On lance une pièce une infinité de fois. La pièce n'est pas nécessairement équilibrée : elle donne « pile » (P) avec une probabilité $p \in]0,1[$ et « face » (F) avec la probabilité $q = 1-p$.

1. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note A_n l'événement « on obtient la séquence PF pour la première fois aux lancers n et $n+1$ » et B_n l'événement « on obtient P au lancer n ». Exprimer A_n à l'aide des B_k puis calculer la probabilité de A_n.

2. Soit A l'événement « on obtient PF au moins une fois ». Calculer $\mathbb{P}(A)$.

Exercice 27. *Double Six*
On lance deux dés équilibrés et on répète ceci indéfiniment. Quelle est la probabilité pour que le premier six obtenu le soit à l'occasion d'un double six ?

Exercice 28. *Fonction de répartition 1*
On lance un dé équilibré et on note X le numéro obtenu.
Donner la loi de X. Donner l'expression de $F_X(t)$ suivant les cas. Tracer $F_X(t)$.

Exercice 29. *Fonction de répartition 2*
On suppose que F_X est donnée pour tout $t \in \mathbb{R}$, par

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < -1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } -1 \leqslant t < 1 \\ \frac{3}{4} & \text{si } 1 \leqslant t < 2 \\ 1 & \text{si } t \geqslant 2 \end{cases}$$

Dessiner le graphe de F_X et sachant que $X(\Omega) = \{-1, 1, 2\}$, déterminer la loi de X.

Exercice 30. *Déterminer une loi 1*
On suppose que X est une variable aléatoire dont la loi est donnée par

- $X(\Omega) = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$
- $\mathbb{P}([X=-2]) = \frac{1}{5}$, $\mathbb{P}([X=-1]) = \frac{1}{10}$, $\mathbb{P}([X=0]) = \frac{1}{10}$, $\mathbb{P}([X=1]) = \frac{1}{5}$, et $\mathbb{P}([X=2]) = \frac{2}{5}$

Déterminer la loi de $Y = X^2$.

Exercice 31. *Déterminer une loi 2*
Soit X une v.a.r dont la loi est définie par

- $X(\Omega) = \{-1, 1, 2\}$
- $\mathbb{P}([X=-1]) = \frac{1}{4}$, $\mathbb{P}([X=1]) = \frac{1}{2}$ et $\mathbb{P}([X=2]) = \frac{1}{4}$

Déterminer la loi de $Y = X^2$ et $Z = \mathrm{e}^X$.

Exercice 32. *Est-ce une loi de probabilité ? 1*
Soit $p \in]0,1[$. Vérifier que la suite (p_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $p_n = p(1-p)^{n-1}$ définit une loi de probabilité sur $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*))$.

Exercice 33. *Est-ce une loi de probabilité ? 2*
On définit une v.a.r. Y telle que $Y(\Omega) = \left\{ \frac{k}{n} \middle/ k \in [\![1, n]\!] \right\}$ et
$\forall y \in Y(\Omega), \mathbb{P}([Y=y]) = \alpha y$.
Déterminer α pour que l'on ait bien défini une loi de probabilité.

Exercice 34. *Calcul de loi 1*
On considère un dé cubique truqué de telle sorte que la probabilité d'obtenir la face numéro k est proportionnelle à k. On suppose que les faces sont numérotées de 1 à 6. Soit X la v.a.r associée au lancer de ce dé.

1. Déterminer la loi de X et calculer $\mathbb{E}(X)$.

2. On pose $Y = \dfrac{1}{X}$. Déterminer la loi de Y et calculer $\mathbb{E}(Y)$.

Exercice 35. *Calcul de loi 2*
Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n, avec $n \geqslant 2$. On effectue deux tirages avec remise.
Soit X le plus grand des numéros obtenus et Y le plus petit. Déterminer la loi de X et celle de Y.

Exercice 36. *Calcul de loi 3*
On lance deux fois un dé et on définit deux variables aléatoires réelles : X désigne le résultat du premier lancer, Y le résultat du second. On appelle distance entre X et Y la variable aléatoire $D = |X - Y|$.

1. Déterminer la loi de D.

2. Quelle est la distance moyenne entre X et Y ?

3. Tracer le graphe de la fonction de répartition F_D.

Exercice 37. *Gain*
On considère le jeu suivant : le joueur paie 3 euros pour jouer. Ensuite, il lance trois pièces équilibrées. Pour chaque « Pile » qu'il obtient, il gagne 2 euros. On désigne par X le nombre de « Pile » obtenus et par Y le gain (algébrique) du joueur.

1. Quelles sont les valeurs de X ?

2. Exprimer Y en fonction de X.

3. Quelles sont les valeurs de Y ?

4. Déterminer la loi de X, puis celle de Y, ainsi que $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{E}(Y)$.

5. Déterminer les fonctions de répartitions de X et Y.

Exercice 38. *Et avec un univers infini ?*
On lance une pièce équilibrée une infinité de fois et on note X le numéro du premier lancer qui a donné face.

1. Déterminer la loi de X.

2. Calculer et dessiner la fonction de répartition de X.

3. Montrer que X admet une espérance et calculer $\mathbb{E}(X)$.

4. Montrer que X^2 admet une espérance et calculer $\mathbb{E}(X^2)$.

5. Calculer $\mathbb{V}(X)$ (et montrer son existence).

Exercice 39. *Espérance par récurrence*
Un mobile se déplace sur un axe comme suit : à l'instant 0, il est au point 0. Puis, si le mobile est à l'instant n sur le point d'abscisse k, alors à l'instant $n+1$, il sera sur le point d'abscisse $k+1$ avec probabilité $p \in]0,1[$ et en 0 sinon. On appelle X_n la variable aléatoire égale à l'abscisse du mobile à l'instant n. On a donc $X_0 = 0$.

1. Donner la loi de X_1.

2. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$.

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![1, n]\!]$, $\mathbb{P}([X_n = k]) = p\,\mathbb{P}([X_{n-1} = k - 1])$.

4. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{E}(X_n) = p\,\mathbb{E}(X_{n-1}) + p$ puis déterminer $\mathbb{E}(X_n)$ en fonction de n et p.

Exercice 40. *Des lois dans la nature*

1. Un cycliste rencontre successivement 5 feux de circulation indépendants sur l'av. G. Mandel. La probabilité qu'un feu soit vert est de $\dfrac{1}{2}$. On note X le nombre de feux verts pour le cycliste.
Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.

2. Un parking souterrain contient 20 scooters à trois roues, 20 motos et 20 voitures. On choisit un véhicule au hasard, et on note X le nombre de roues de ce véhicule. Déterminer la loi de X, son espérance, et sa variance.

3. Une étude statistique a permis de déterminer que 10% de la population est gauchère. Quelle est la probabilité qu'un groupe de 8 personnes contienne un seul gaucher ? Au plus deux gauchers ?

4. Le stock d'un fournisseur de lasagnes contient une proportion $p = \dfrac{49}{1000}$ de barquettes de lasagnes à base de viande de cheval. Un contrôleur examine des barquettes de lasagnes chez ce fournisseur. Combien doit-il contrôler de barquettes en moyenne pour qu'il trouve au moins une barquette à base de viande de cheval.

5. Une jarre contient 12 scorpions, 27 araignées et 56 blattes. On choisit une araignée au hasard parmi les 27 araignées dans la jarre. X est le nombre de pattes de l'animal choisi. Déterminer la loi de X, espérance et variance.

Exercice 41. *Une loi construite*
Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que
$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}([X = k]) = a3^{-k}$.

1. Déterminer a pour que l'on définisse bien ainsi une loi de probabilité.

2. X a-t-elle plus de chance de prendre des valeurs paires ou impaires ?

3. Montrer que X admet une espérance et une variance et les calculer.

4. On pose la v.a. $Y = X(X - 1)$. Montrer que Y admet une espérance et la calculer.

Exercice 42. *Uniforme*
Soient a, b deux entiers relatifs tels que $a < b$ et soit X une variable aléatoire de loi uniforme $\mathcal{U}(\llbracket a, b \rrbracket)$. Déterminer l'espérance et la variance de X.

Exercice 43. *Loi Binomiale 1*
Soit X une variable de loi $\mathcal{B}(n, p)$, avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0, 1[$. Donner la loi de $Y = n - X$.

Exercice 44. *Loi Binomiale 2*
Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.
Calculer $\mathbb{E}(2^X)$ et $\mathbb{E}\left(\dfrac{1}{1 + X}\right)$.

Exercice 45. *Indicatrice pour des lancers de dés*
On fait n lancers d'un dé dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On note X la v.a égale au nombre de fois où l'on obtient un numéro pair. Quelle est la loi de X ?

Exercice 46. *Retour du Binôme de Newton*
Soit une urne avec a boules blanches et b boules noires. On effectue n tirages d'une boule, avec remise à chaque fois. Soit X une v.a. comptant le nombre de boules blanches.

1. Donner la loi de X.

2. Que vaut $X(\Omega)$? Que vaut $\mathbb{P}([X = k])$?

3. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}([X = k])$?

4. En déduire la formule du binôme de Newton.

Exercice 47. *Affichage défaillant*
Soit X une variable aléatoire réelle de loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$. Un compteur est censé afficher le résultat de X mais celui-ci ne fonctionne pas correctement : si X n'est pas nul, le compteur affiche bien la valeur de X ; si X est nul, il affiche au hasard une valeur entre 1 et n. On note Y la variable aléatoire égale au nombre affiché par le compteur.

1. Déterminer la loi de Y.

2. Justifier sans calcul que $\mathbb{E}(Y) \geqslant \mathbb{E}(X)$ puis confirmer en calculant $\mathbb{E}(Y)$.

Exercice 48. *Deux pas en avant, un pas en arrière*
Une puce se déplace en faisant des sauts aléatoires sur un axe gradué. Initialement à l'origine, la puce se déplace à chacun de ses sauts d'une unité vers la droite avec probabilité $p \in]0,1[$ ou d'une unité vers la gauche avec probabilité $1-p$. On note X_n sa position sur l'axe après le n-ième saut, et Y_n le nombre de fois où elle s'est déplacée vers la droite entre le premier et le $n^{\text{ème}}$ saut (compris).

1. Quelle est la loi de Y_n ?
2. Trouver une relation entre X_n et Y_n.
3. En déduire la loi de X_n, puis les expressions de $\mathbb{E}(X_n)$ et $\mathbb{V}(X_n)$ en fonction de n.

Exercice 49. *Saut en hauteur*
Un sauteur en hauteur tente de franchir les hauteurs successives $1, 2, \ldots, n, \ldots$ On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la probabilité de succès à la hauteur $n \in \mathbb{N}^*$ est $\dfrac{1}{n}$. Le sauteur est éliminé à son premier échec. On note X la variable aléatoire égale au numéro du dernier saut réussi.

1. Justifier soigneusement : $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$, puis déterminer la loi de X, et vérifier que $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X=k]) = 1$.
2. Montrer que X admet une espérance (et une variance) et les calculer.

Exercice 50. *La loi des urnes*
Une urne contient des boules blanches en proportion b et vertes en proportion v. Donc $0 < b < 1$, $0 < v < 1$ et $b + v = 1$. On effectue des tirages successifs avec remise jusqu'au premier changement de couleur. Soit X la variable égale au nombre de tirages effectués, et Y la variable égale au nombre de boules blanches obtenues.

1. Donner la loi de X, avec son espérance et sa variance.
2. Déterminer $Y(\Omega)$, puis pour tout $k \geqslant 2$, décrire $(Y = k)$ puis en déduire $\mathbb{P}([Y = k])$.
3. En déduire la loi de Y.

Exercice 51. *La boule noire...*
Une urne contient au départ une boule blanche et une boule noire. On effectue des tirages d'une boule avec remise jusqu'à l'obtention d'une boule noire, en rajoutant à chaque tirage, une boule blanche supplémentaire. On note X la variable égale au numéro du tirage final où apparaît une boule noire, si un tel tirage existe, et à 0 si à chaque tirage une boule blanche est obtenue.

1. Déterminer la loi de X.
2. Justifier que $\dfrac{1}{n(n+1)}$ se décompose en différence de deux termes consécutifs, puis montrer que $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X=n]) = 1$. En déduire $\mathbb{P}([X=0])$. Conclure.

Exercice 52. *Service Client*
Le service de dépannage d'un grand magasin dispose d'équipes intervenant sur appel de la clientèle. Pour des causes diverses les interventions ont lieu parfois avec un retard. On admet que les appels se produisent indépendamment les uns des autres et que, pour chaque appel, la probabilité d'un retard est $\dfrac{1}{4}$.

1. Un client appelle le service à 4 reprises : soit X la v.a.r. égale au nombre de fois où il a subi un retard.
   a) Déterminer la loi de probabilité de X.
   b) Calculer la probabilité de l'événement : « le client a subi au moins un retard ».
2. Au cours des années 2012 et 2013 le service après-vente enregistre une succession d'appels. Le rang du premier appel pour lequel l'intervention s'effectue avec retard en 2012 (resp. 2013) définit une v.a. Y (resp. Z).
   a) Déterminer les lois de Y et Z. Montrer qu'elles admettent une espérance et une variance et la calculer.
   b) Calculer $\mathbb{P}([Y \leqslant n])$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   c) On pose $T = \max(Y, Z)$. Calculer $\mathbb{P}([T \leqslant n])$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et en déduire la loi de T.

Exercice 53. *Un Poisson*
Soit X une v.a. suivant une loi $\mathcal{P}(\lambda)$. On pose $Y = \dfrac{1}{X+1}$. Montrer que Y admet une espérance et la calculer.

Exercice 54. *Géométrique sans mémoire*
Soit X une v.a. suivant une loi $\mathcal{G}(p)$, avec $0 < p < 1$.

1. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}([X > k]) = (1-p)^k$.

2. Montrer alors la propriété d'absence de mémoire :

$$\forall (k, \ell) \in \mathbb{N}^2, \ \mathbb{P}_{[X>\ell]}([X > k + \ell]) = \mathbb{P}([X > k])$$

Exercice 55. *Deviner la loi*
Soit un réel $p \in]0, 1[$. On suppose que la fonction de répartition d'une variable X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ vérifie : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $F(n) = 1 - (1-p)^n$. Donner la loi de X.

Exercice 56. *Loi du jeu de Pile/Face*
Deux joueurs A et B disposent d'une pièce telle que la probabilité d'obtenir pile est $\dfrac{1}{3}$. Chaque joueur lance la pièce n fois : on note X_A, resp. X_B, le nombre de piles obtenus par le joueur A, resp. B. Déterminer la probabilité qu'ils obtiennent le même nombre de piles.

Exercice 57. *Ski géométrique*
Jean-Claude D. va au téleski et emprunte l'une des N perches de cet appareil. Entre cet instant et la prochaine remontée de Jean-Claude le nombre de skieurs (autres que J-C) qui se présentent est une variable de loi $\mathcal{G}(p)$. Quelle est la probabilité que Jean-Claude reprenne la même perche ?

Exercice 58. *Péage*
Un péage comporte 10 guichets numérotés de 1 à 10. Le nombre de voitures N, arrivant au péage en 1 heure, suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On suppose de plus que les conducteurs choisissent leur file au hasard et indépendamment des autres. Soit X_1 la variable aléatoire égale au nombre de voitures se présentant au guichet n°1 en une heure.

1. Déterminer le nombre moyen de voitures arrivant au péage en une heure.

2. Quelle est la proba qu'une voiture qui arrive au péage se dirige vers le guichet n°1 ?

3. Calculer $\mathbb{P}_{[N=n]}([X_1 = k])$ pour tout $0 \leqslant k \leqslant n$. Et pour $k > n$?

4. Justifier que $\mathbb{P}([X_1 = k]) = \displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty} \mathbb{P}_{[N=n]}([X_1 = k]) \times \mathbb{P}([N = n])$

puis montrer que $\mathbb{P}([X_1 = k]) = \mathrm{e}^{-\lambda} \left(\dfrac{1}{10}\right)^k \dfrac{\lambda^k}{k!} \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\dfrac{9}{10}\right)^n \dfrac{\lambda^n}{n!}$.

5. En déduire la loi de X_1, son espérance et sa variance