Exercice 1. *Combinaison Linéaire 1*
Écrire le vecteur $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ comme une combinaison linéaire des vecteurs $\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$.

Exercice 2. *Combinaisons linéaires 2*

1. Dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, le vecteur $\begin{pmatrix}4\\-1\\1\end{pmatrix}$ est-il une combinaison linéaire des vecteurs $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$?
2. Dans $\mathbb{R}[X]$, le polynôme $P = X^3 + X^2 - 2X$ est-il une combinaison linéaire des polynômes $X^2(X-1), X(X-1)^2$?
3. Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, la matrice $\begin{pmatrix}3&0\\6&4\end{pmatrix}$ est-elle une combinaison linéaire des matrices $\begin{pmatrix}2&1\\3&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&-1\\0&2\end{pmatrix}$?

Exercice 3. *Sev ?*
Pour chaque ensemble F_i, déterminer s'il est ou non un sous-espace vectoriel de E.

1. $E = \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ $\quad F_1 = \left\{ \begin{pmatrix}x\\1\end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\}$ $\quad F_2 = \left\{ \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in E \;\middle/\; x + 2y = 0 \right\}$
   $F_3 = \left\{ \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} \in E \;\middle/\; a + b^2 = 0 \right\}$
2. $E = \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ $\quad F_4 = \left\{ \begin{pmatrix}x\\2x\\-x\end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\}$
   $F_5 = \left\{ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \;\middle/\; \begin{matrix} x + 2y = 0 \\ \text{et } x + y + 3z = 0 \end{matrix} \right\}$

Exercice 4. *Ev ?*
Les ensembles suivants sont-ils des espaces vectoriels ?

1. L'ensemble $\mathcal{D}$ des matrices diagonales de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
2. L'ensemble $\mathcal{S}$ des matrices triangulaires supérieures de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
3. L'ensemble $\mathcal{T}$ des matrices triangulaires de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
4. L'ensemble $\mathcal{N}$ des suites convergeant vers 0.
5. L'ensemble $\mathcal{I}$ des suites divergeant vers 0.
6. $P_0 = \{P \in \mathbb{R}[X] \;/\; P(0) = P'(0) = 0\}$.
7. $P_1 = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \;/\; P'(0) = 0\}$.
8. $P_2 = \{P \in \mathbb{R}[X] \;/\; \deg(P) \geqslant 3\}$.
9. $F_1 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \;/\; f \text{ est croissante sur } \mathbb{R}\}$.
10. $F_2 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \;/\; f \text{ est paire sur } \mathbb{R}\}$.

Exercice 5. *Libre ou liée ?*
Dire, pour chaque famille de vecteurs, si elle est libre ou liée :

1. $((2,1,1),\ (1,2,1),\ (1,1,2))$ dans $\mathbb{R}^3$.
2. $((1,-2,1),\ (0,3,-1),\ (2,-1,1))$ dans $\mathbb{R}^3$.
3. $((1,2,3),\ (4,5,6),\ (7,8,9))$ dans $\mathbb{R}^3$.
4. $((4,-16,10),\ (4,-5,3))$ dans $\mathbb{R}^3$.
5. $((-1,0,1),\ (1,-1,1),\ (0,1,2))$ dans $\mathbb{R}^3$.
6. $((1,1,1,1),\ (1,2,3,4),\ (1,2,8,16))$ dans $\mathbb{R}^4$.
7. $((2,2,2),\ (0,1,1),\ (1,1,0),\ (1,1,1))$ dans $\mathbb{R}^3$.
8. $(X^2, X^2 + X + 1)$ dans $\mathbb{R}_2[X]$.
9. $(X^2, X^2 - X, X^2 + X)$ dans $\mathbb{R}[X]$.
10. $(X^2, X(X-2), (X-2)^2)$ dans $\mathbb{R}_2[X]$.
11. $\left(\begin{pmatrix}1&-2\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3&6\\0&-3\end{pmatrix} \right)$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
12. $\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&-2\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3&6\\0&-3\end{pmatrix} \right)$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 6. *Famille libre*
Soient a, b, c trois réels, tous différents. Démontrer que les vecteurs :

$u = \begin{pmatrix}1\\a\\a^2\end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix}1\\b\\b^2\end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix}1\\c\\c^2\end{pmatrix}$ forment une famille libre.

Exercice 7. *Libre ?*
Pour quel(s) réel(s) a la famille (u, v, w) est-elle libre ?

$$u = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$$

Exercice 8. *Vect ?*
Soient les vecteurs $x = (1, 2, 1)$, $y = (0, 0, 1)$ et $z = (1, 2, k)$ de $\mathbb{R}^3$.
Déterminer $k \in \mathbb{R}$ tel que $z \in \text{Vect}\,(x, y)$.

Exercice 9. *Générateurs*
Soient les vecteurs $u = (-4, 4, 3)$, $v = (-3, 2, 1)$, $r = (-1, 2, 2)$ et $s = (-1, 6, 7)$ de $\mathbb{R}^3$. Montrer que $\text{Vect}\,(()\,u, v) = \text{Vect}\,(()\,r, s)$.

Exercice 10. *Famille génératrice*
Démontrer que les vecteurs : $u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ engendrent $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Exercice 11. *Ev et famille génératrice*
Justifier que les ensembles suivants sont des espaces vectoriels en déterminant une famille génératrice.

1. $A = \{(x - y, x + y, 2x - 3y) \ / \ (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$.

2. $B = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \ \middle/ \ \begin{cases} -x + 2y = y + 6z \\ y + 3z = -2x \end{cases} \right\}$

3. $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + 2y - 3z = 0\}$.

4. $D = \left\{ \begin{pmatrix} x + z & 2x - y & z \\ y - x & z + 2y & x + z \\ 0 & 2x & x - z \end{pmatrix} \ \middle/ \ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \right\}$

5. $E = \{P = aX^2 + (b - 2a)X + a - b + c \ / \ (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}$.

6. $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \ / \ P(0) = P(1) = 0\}$.

Exercice 12. *Base et coordonnées*

1. Montrer que la famille (e_1, e_2, e_3) où $e_1 = (1, 1, 0)$, $e_2 = (1, 2, 1)$ et $e_3 = (2, 3, 2)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Déterminer les coordonnées du vecteur $u = (0, 1, -2)$ dans cette base.

2. Même question avec $e_1 = (0, 1, 1)$, $e_2 = (2, 0, -1)$, $e_3 = (2, 1, 1)$ et $u = (1, -2, -1)$

Exercice 13. *Solutions de Systèmes linéaires*
Pour chacun des systèmes suivants, justifier que l'ensemble des solutions $\mathcal{S}$ est un espace vectoriel, et déterminer une base :

$$(S_1)\{3x + y - z = 0 \qquad (S_2)\begin{cases} 2x - 3z + t = 0 \\ x + y + z - t = 0 \\ -2y - 5z + 3t = 0 \\ 3x + y - 2z = 0 \end{cases}$$

$$(S_3)\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ -2x - 3y + 3z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases}$$

Exercice 14. *Base*

Trouver une base du s.e.v. de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ engendré par $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 15. *Sev et base*
Démontrer que les ensembles suivants sont des sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. À chaque fois, en donner une base.

1. $A = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \middle/ x - 2y + 3z = 0 \right\}$,

2. $B = \left\{ \begin{pmatrix} x+y \\ 2x-y \\ -3x+2y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \middle/ x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R} \right\}$

3. $C = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \middle/ x + y + z = 0 \text{ et } 2x - y + z = 0 \right\}$

Exercice 16
Soit : $E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R}),\ x + y + z + t = 0 \right\}$

et $\quad F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R}),\ x - y + z - t = 0 \right\}$.

Démontrer que E et F sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. Donner une base pour chacun des sous-espaces vectoriels E, F, $E \cap F$.

Exercice 17. *Ev et matrices*
Soit K une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ différente de I_n. On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $MK = KM = M$.

1. a) Montrer que $\mathcal{E}$ est une espace vectoriel.

b) Montrer par l'absurde qu'aucune matrice de $\mathcal{E}$ n'est inversible.

2. Dans cette question, on pose $K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

a) Donner la forme des matrices de $\mathcal{E}$ puis déterminer une famille génératrice de $\mathcal{E}$.

b) Retrouver le fait que les matrices de $\mathcal{E}$ ne sont pas inversibles.

c) On considère l'ensemble $\mathcal{F}$ des matrices de la forme $M = \begin{pmatrix} x & y & x \\ y & z & y \\ x & y & x \end{pmatrix}$ où x, y et z sont des réels. Vérifier que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$ et donner une famille génératrice de $\mathcal{F}$.

Exercice 18
On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et l'ensemble
$\mathcal{F} = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \ / \ AM - MA = 0\}$. Montrer que $\mathcal{F}$ est un espace vectoriel et que $\mathcal{F} = \text{Vect}\,(A, I_2)$.

Exercice 19
Soient a, b et c des réels. On considère les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ suivantes :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad M_{a,b,c} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a+c & b \\ c & b & a \end{pmatrix}$$

et $\mathcal{F}$ l'ensemble des matrices de la forme $M_{a,b,c}$: $\mathcal{F} = \{M_{a,b,c},\ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\}$.

1. Montrer que $\mathcal{F}$ est un espace vectoriel.

2. Exprimer A^2 comme combinaison linéaire de I, A et J, puis montrer que : $\mathcal{F} = \text{Vect}\left(I, A, A^2\right)$.

3. La famille (I, A, A^2) est-elle libre ?

Exercice 20. *Ev et suites*
On rappelle que l'ensemble des suites numériques $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est un espace vectoriel.

1. Montrer que l'ensemble $\mathcal{R} = \{(u_n) \ / \ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n\}$ est sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

2. Peut-on trouver une famille génératrice de $\mathcal{R}$?

Exercice 21. *Égalité d'ev*
On considère les ensembles $F = \text{Vect}\left((1,1,0),\ (1,2,1)\right)$ et
$G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ -x+y-z = 0\}$. Montrer que $F = G$.

Exercice 22

1. Soient u, v, w les suites définies par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^n,\ v_n = 3^n,\ w_n = 4^n$. Montrer que la famille (u, v, w) est libre.

2. Soient a et b deux réels distincts et pour tout $k \in [\![0,2]\!]$, on note f_k la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f_k(x) = (x-a)^k(x-b)^{2-k}$. Montrer que la famille (f_0, f_1, f_2) est libre.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer par récurrence que la famille $(1, (X-1), \ldots, (X-1)^n)$ est une famille libre de $\mathbb{R}_n[X]$.

Plus généralement, on peut montrer que toute famille $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ de polynômes tels que $deg(P_i) = i$ est une famille libre de $\mathbb{R}_n[X]$. On parle de famille de polynômes de degrés échelonnés.