Exercice 1. *Gammes*

Justifier la convergence des séries suivantes et calculer une valeur de leur somme.

$A = \sum_{k\geqslant 0} \frac{1}{2^k}$

$B = \sum_{k\geqslant 0} \frac{4}{5^k}$

$C = \sum_{k\geqslant 0} \frac{2}{3^{k+1}}$

$D = \sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{2^n}$

$E = \sum_{k\geqslant 0} \frac{k}{5^{k-1}}$

$F = \sum_{n\geqslant 1} \frac{n}{2^n}$

$G = \sum_{n\geqslant 0} \frac{n(n-1)}{3^n}$

$H = \sum_{n\geqslant 0} \frac{n^2}{5^n}$

$I = \sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n n}{3^n}$

$J = \sum_{n\geqslant 0} \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}$, $(\lambda \in \mathbb{R})$

$K = \sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n!}$

$L = \sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{n!}$

$M = \sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{(2n)!}$ (K et L)

$N = \sum_{k\geqslant 0} \frac{2^k}{(k+1)!}$

$O = \sum_{k\geqslant 1} \frac{k(2^k+1)}{k!}$

$P = \sum_{k\geqslant 0} \frac{k^2+k2^k}{3^k}$

Exercice 2. *Série télescopique 1*

On considère la série numérique $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)}$.

On note S_N sa $N^{\text{ème}}$ somme partielle.

1. Vérifier que $\forall N \in \mathbb{N}^*, \quad S_N = 1 - \frac{1}{N+1}$.

2. En déduire que la série initiale converge et calculer sa somme : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.

Exercice 3. *Série télescopique 2*

On considère la série numérique : $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{4n^2-1}$, et on note S_N sa $N^{\text{ème}}$ somme partielle.

1. Trouver deux réels a et b tels que $\forall n \geqslant 1, \quad \frac{1}{4n^2-1} = \frac{a}{2n-1} + \frac{b}{2n+1}$.

2. Montrer : $S_N = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2N+1}\right)$.

Conclure.

Exercice 4. *Une série de Riemann*

On considère la série numérique : $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$. On note T_N sa $N^{\text{ème}}$ somme partielle.

1. Vérifier :

$$\forall n \geqslant 2, \quad \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \leqslant \frac{1}{n^2} \leqslant \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$$

2. En déduire :

$$\forall N \geqslant 2, \quad \frac{3}{2} - \frac{1}{N+1} \leqslant T_N \leqslant 2 - \frac{1}{N}$$

3. Montrer que la suite (T_N) est majorée, puis déterminer la monotonie de $(T_N)_{N\geqslant 2}$.

4. En déduire la convergence de la série initiale.

5. Donner finalement un encadrement de la valeur de la série.

Exercice 5. *Série avec exponentielles*

On considère la série numérique : $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{e^n + e^{-n}}$. On note S_N sa $N^{\text{ème}}$ somme partielle.

1. Déterminer la monotonie de la suite $(S_N)_{N\geqslant 0}$.

2. Justifier :

$$\forall n \geqslant 0, \quad \frac{1}{e^n + e^{-n}} \leqslant e^{-n}$$

3. En déduire :

$$\forall N \geqslant 0, \quad S_N \leqslant \frac{1 - e^{-(N+1)}}{1 - e^{-1}}$$

4. Montrer que la série initiale converge et que l'on a l'encadrement suivant pour sa somme :
$$\frac{1}{2} \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^n + \mathrm{e}^{-n}} \leqslant \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}$$

Exercice 6. *Sommes partielles*
En calculant les sommes partielles, déterminer si les séries de terme général suivant (pour $n \geqslant 2$) sont convergentes. Si oui, donner la valeur de la somme :
$$u_n = \frac{\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)}{\ln(n)\ln(n+1)} \qquad v_n = \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

Exercice 7. *Comparaison de séries 1*
Soit la série de terme général $u_n = \dfrac{2n^2}{n^3-1}$, pour tout $n \geqslant 2$.

1. Montrer : $\forall n \geqslant 2,\ u_n \geqslant \dfrac{2}{n}$.

2. En déduire une minoration sur les sommes partielles. Quelle est la nature de cette série ?

Exercice 8. *Comparaison de séries 2*
Soit la série de terme général (u_n) où : $\forall n \geqslant 3,\ u_n = \dfrac{5}{4^n \ln(n)}$.

1. Montrer : $\forall n \geqslant 3,\ u_n \leqslant \dfrac{5}{4^n}$.

2. En déduire une majoration sur les sommes partielles. Quelle est la nature de cette série ?

Exercice 9. *Série harmonique*
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$ et $v_n = S_n - \ln(n)$.

1. Quelle est la limite de la suite (S_n) lorsque n tend vers $+\infty$?

2. Montrer, pour tout $x > 0$:
$$\frac{1}{x+1} \leqslant \ln(x+1) - \ln(x) \leqslant \frac{1}{x}.$$

3. En déduire la monotonie de la suite (v_n).

4. Démontrer que la suite (v_n) est à termes positifs.

5. Conclure que la suite (v_n) est convergente. On note γ sa limite appelée la *constante d'Euler*.

6. En déduire que : $S_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$ puis donner un équivalent de S_n.

Exercice 10. *Critère de convergence*

1. Soit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Montrer que la suite (u_n) converge ssi la série $\sum\limits_{k\geqslant 0} (u_{k+1} - u_k)$ est convergente.

2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 1 - \mathrm{e}^{-u_n}$.

a) Montrer, pour tout $x \geqslant 0$: $x - 1 + \mathrm{e}^{-x} \geqslant 0$.

b) Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $0 \leqslant u_n \leqslant 1$.

c) Démontrer que la suite (u_n) est convergente, préciser sa limite puis en déduire la nature de la série de terme général $u_n - u_{n+1}$.

d) On admet :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^{-x} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^k}{k!} + (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} \mathrm{e}^{-t}\, dt$$

i. En écrivant l'égalité précédente pour $n = 2$, puis pour $n = 3$, montrer :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \leqslant x - 1 + \mathrm{e}^{-x} \leqslant \frac{x^2}{2}.$$

ii. Montrer : $u_n - u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{u_n^2}{2}$.

iii. Conclure quant à la nature de la série de terme général u_n^2.

Exercice 11. *Séries de Riemann*
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$u_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^2}.$$

1. Justifier la convergence de la suite (v_n) puis déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{v_n}{u_n^2}$.

2. Soit Q la fonction polynomiale définie sur $\mathbb{R}$ par $Q(x) = \sum\limits_{j=1}^{n} \left(x - \dfrac{1}{j}\right)^2$.

a) À l'aide de l'étude de Q, établir : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n^2 \leqslant n v_n$.

b) En déduire la nature de la série de terme général $\dfrac{v_n}{u_n^2}$.