Exercice 1. *Extrait de Edhec*
Soit $n \geqslant 3$ et f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f_n(x) = x - n\ln(x)$.

1. Étudier la fonction f_n et dresser son tableau de variations complet.

2. En déduire l'existence de deux réels u_n et v_n solutions de l'équation $f_n(x) = 0$, et vérifiant $0 < u_n < n < v_n$.

3. Montrer, pour tout $n \geqslant 3$: $1 < u_n < e$.

4. Que vaut $f_n(u_n)$? et $f_{n+1}(u_{n+1})$? Montrer alors : $f_n(u_{n+1}) = \ln(u_{n+1})$.

5. En déduire que la suite $(u_n)_{n\geqslant 3}$ est décroissante puis qu'elle converge.

Exercice 2. *Variations*
Déterminer le sens de variation des suites (u_n) suivantes.

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{1}{n}$

2. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{n^2+1}{n}$

3. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \sqrt{n+2}$

4. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = |4-n|$

5. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{3^n}{n}$

6. $\left\{\begin{array}{l} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n - u_n^2 \end{array}\right.$

7. $\left\{\begin{array}{l} u_0 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + \mathrm{e}^{u_n} \end{array}\right.$

8. $\left\{\begin{array}{l} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + \ln(1+|u_n|) \end{array}\right.$

9. $\left\{\begin{array}{l} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n\mathrm{e}^{u_n} \end{array}\right.$

Exercice 3. *Récurrence*
Montrer par récurrence que la suite (u_n) définie par $\left\{\begin{array}{l} u_0 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{5u_n+3}{u_n+3} \end{array}\right.$ est constante.

Exercice 4. *Récurrence et produit*
Soit (a_n) la suite définie par $\left\{\begin{array}{l} a_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = \dfrac{1}{n+1}a_n \end{array}\right.$. Déterminer a_n en fonction de n. (On pourra démontrer la formule par récurrence, après l'avoir conjecturée).

Exercice 5. *Récurrence et définition*

1. Soit (u_n) la suite définie par $\left\{\begin{array}{l} u_0 = -1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{4u_n+5} \end{array}\right.$
Montrer que (u_n) est bien définie.

2. Soit (u_n) la suite définie par $\left\{\begin{array}{l} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \ln(1+u_n) \end{array}\right.$
Montrer que (u_n) est bien définie.

Exercice 6. *Étude de fonction et suite*
Soit (u_n) la suite définie par $\left\{\begin{array}{l} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2} + \dfrac{5}{2u_n} \end{array}\right.$.

1. Étudier les variations de la fonction f définie sur l'intervalle $[2,3]$ par :
$$f : x \mapsto \frac{x}{2} + \frac{5}{2x}$$

2. Montrer que si $x \in [2,3]$, alors $f(x) \in [2,3]$.

3. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2 \leqslant u_n \leqslant 3$.

Exercice 7. *Dérivées et récurrence*
On définit sur $\mathbb{R}$ une fonction f par : $f : x \mapsto x\mathrm{e}^x$.
Calculer la suite des dérivées $n^{\text{ème}}$ de f (que l'on note $f^{(n)}(x)$) en fonction de n, pour tout entier $n \geqslant 1$.

Exercice 8. *Suite bornée*
Soit (u_n) la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (-1)^n + \dfrac{(-1)^{n-1}}{n+1}$.
Montrer que (u_n) est bornée.

Exercice 9. *Suites usuelles*
Donner le terme général des suites suivantes et donner la somme des n premiers termes :

1. $\begin{cases} u_0 = 6 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + 3 \end{cases}$

2. $\begin{cases} v_0 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = v_n - 1 \end{cases}$

3. $\begin{cases} w_1 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ w_{n+1} - w_n - 4 = 0 \end{cases}$

4. $\begin{cases} u_0 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 4u_n \end{cases}$

5. $\begin{cases} v_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ 7v_{n+1} = v_n \end{cases}$

6. $\begin{cases} w_1 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ 3w_{n+1} - 2w_n = 0 \end{cases}$

Exercice 10. *Suites non usuelles*
Calculer le terme général des suites réelles suivantes :

1. $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{2n+2}{n+2} u_n \end{cases}$

2. $\begin{cases} u_1 \in \mathbb{R} \\ \forall n \geqslant 1,\ u_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{u_k}{k} \end{cases}$

3. $\begin{cases} u_1 = 1 \\ \forall n \geqslant 1,\ u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + \dfrac{1}{2^n}} \end{cases}$

Exercice 11. *Suite auxiliaire 1*
Soit u la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \geqslant 0,\ u_{n+1} = 2u_n + 3^n \end{cases}$

Pour étudier cette suite, on introduit la suite auxiliaire $v_n = \dfrac{u_n}{3^n}$ pour tout $n \geqslant 0$.

1. Reconnaître la suite (v_n).

2. En déduire l'expression de u_n en fonction de n puis calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.

Exercice 12. *Suites usuelles d'ordre 2*
Étudier dans chacun des cas suivants la suite (u_n). On exprimera u_n en fonction de n.

1. $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n \end{cases}$

2. $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 3u_{n+1} + u_n \end{cases}$

3. $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_1 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ 2u_{n+2} = -3u_{n+1} + u_n \end{cases}$

Exercice 13. *Suite auxiliaire 2*
Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{1}{3} u_n + n - 1 \end{cases}$

1. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = au_n + bn + c$.
Déterminer a, b, et c pour que la suite (v_n) soit géométrique.

2. Exprimer u_n en fonction de n.

3. Exprimer $U_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$ en fonction de n.

Exercice 14. *Système de suites*
On étudie les suites (u_n) et (v_n) définies par $\begin{cases} u_1 = 1 \\ v_1 = 12 \end{cases}$ et, pour tout $n \geqslant 1$,

$$\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{1}{3}(u_n + 2v_n) \\ v_{n+1} = \dfrac{1}{4}(u_n + 3v_n) \end{cases}$$

1. Calculer u_2, v_2, u_3, v_3.

2. On définit la suite (w_n) par $w_n = v_n - u_n$. Montrer que (w_n) est une suite géométrique, et préciser sa limite.

3. Quel est le sens de variation des suites (u_n) et (v_n) ?

4. On définit la suite (t_n) par $t_n = 3u_n + 8v_n$. Montrer que (t_n) est une suite constante.

5. En déduire une expression en fonction de n des suites (u_n) et (v_n).

Exercice 15. *Limites de suites*
Déterminer les limites des suites suivantes :

1. $a_n = n^5 - n^3 - 2$
2. $b_n = -n^2 + n^6 - n^8$
3. $c_n = \dfrac{n^4 + n^3 - 2n^2 + 1}{4n^3 - n^2 + n - 1}$
4. $d_n = \dfrac{2n^3 - 7}{3n^3 + 2n^2 - 1}$
5. $e_n = 2n - \ln(n)$
6. $f_n = \sqrt{n^2 + 1}$
7. $g_n = 6^n$
8. $h_n = \left(\dfrac{1}{5}\right)^n$
9. $i_n = (-1)^{2n+3}$
10. $j_n = 3^n - 7^n$
11. $k_n = n^2 e^{-n}$
12. $\ell_n = \sqrt{n^4 + 1} - n$
13. $m_n = \dfrac{(\ln n)^4}{n^3}$
14. $p_n = \dfrac{3^n}{n^a}$, avec $a \in \mathbb{R}$.
15. $q_n = \dfrac{(n+2)!}{(2n^2 + 1) \times n!}$
16. $r_n = n^3 \left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right)$
17. $s_n = (2n - \ln n) \ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$
18. $t_n = \sqrt{n^2 + 1} - 2n$
19. $u_n = 1 + 2e^{-n} - 3\ln(n) + n$
20. $v_n = 2^n - n^2$

Exercice 16. *Monotonie et limite*
Soit la suite (v_n) définie par $\begin{cases} v_0 = 2 \\ \forall n \geqslant 0,\ v_{n+1} = \dfrac{1}{2}(1 + v_n^2) \end{cases}$

1. Déterminer la monotonie de la suite.

2. La suite (v_n) peut-elle être majorée ? En déduire la limite de (v_n).

Exercice 17. *Suite convergente 1*
Soit $k \in]0, 1[$, et Q un entier naturel. Soit (u_n) une suite positive telle que pour tout entier $n \geqslant Q$, on a $u_{n+1} \leqslant k u_n$. Montrer que (u_n) est convergente.

Exercice 18. *Suite convergente 2*
Soit a un réel positif. Soit (u_n) la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \dfrac{a^n}{n!}$.
Montrer que (u_n) est convergente.

Exercice 19. *Suite convergente 3*
Étudier la suite u définie par $\begin{cases} u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = \dfrac{e^{-u_n}}{n^2} \end{cases}$

Exercice 20. *Encadrement 1*
Pour tout $n \geqslant 1$, on définit les sommes s_n et t_n par

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \\ t_n &= \frac{1}{\sqrt{n^4+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^4+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^4+k}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^4+n}} \end{aligned}$$

1. *a)* Dire, quels sont le plus petit et le plus grand des termes dans chacune des sommes

b) Déterminer un encadrement de s_n.

c) Montrer à l'aide de cet encadrement : $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = 1$.

2. En utilisant la même démarche, trouver $\lim\limits_{n\to\infty} t_n$.

Exercice 21. *Encadrement 2*
Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par

$$u_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Donner une minoration de u_n par le terme général d'une suite divergente.

Exercice 22. *Encadrement 3*
Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par

$$u_n = \frac{1! + 2! + \ldots + n!}{(n+1)!}$$

1. Montrer par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 2$, on a l'inégalité :

$$1! + 2! + \ldots + (n-1)! \leqslant n!$$

2. Justifier que pour tout $n \geqslant 2$, on a : $0 < u_n < \dfrac{2}{n+1}$.

3. Que peut-on en déduire sur la suite (u_n) ?

Exercice 23. *Suites adjacentes 1*
Soient (u_n) et (v_n) définies par $u_n = 1 - \dfrac{1}{n}$ et $v_n = 1 + \dfrac{1}{n^2}$.
Montrer que les deux suites sont adjacentes.

Exercice 24. *Suites adjacentes 2*
On étudie les suites (u_n) et (v_n) définies par : $u_n = 1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \ldots + \dfrac{1}{n!}$,
et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n!}$.

1. Écrire ces suites avec le symbole $\sum$.

2. Montrer que ces suites sont adjacentes (Culture : leur limite commune est e.)

Exercice 25. *Suites adjacentes 3*
On étudie les suites (u_n) et (v_n) définies par : $u_n = \sum\limits_{p=1}^{n} \dfrac{1}{p^2}$, et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n}$.

Montrer que ces suites sont adjacentes (Culture : leur limite commune est $\dfrac{\pi^2}{6}$.)

Exercice 26. *Suites adjacentes et système*
On étudie les suites (u_n) et (v_n) définies par : $\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & 2 \\ v_0 & = & 3 \end{array}\right.$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_{n+1} & = & \dfrac{1}{5}(3u_n + 2v_n) \\ v_{n+1} & = & \dfrac{1}{5}(2u_n + 3v_n) \end{array}\right.$$

1. Démontrer par récurrence sur n : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n - u_n > 0$.

2. Montrer que la suite (w_n) définie par $w_n = v_n - u_n$ est une suite géométrique.

3. Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

4. ***a)*** Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $u_{n+1} + v_{n+1}$ en fonction de $u_n + v_n$.

b) Que peut-on en déduire sur la suite (x_n) définie par $x_n = u_n + v_n$.

5. En déduire la limite commune des suites (u_n) et (v_n).

Exercice 27. *Problème*
Soit (u_n) la suite définie par : $\left\{\begin{array}{l} u_0 > 0 \\ u_1 > 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = \sqrt{u_n u_{n+1}} \end{array}\right.$

1. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

2. On considère alors la suite (w_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = \ln(u_n)$.

a) Montrer que (w_n) est récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Expliciter w_n en fonction de n, w_1 et w_0 et en déduire sa limite en $+\infty$.

3. Calculer alors la limite de (u_n) en $+\infty$ en fonction de u_0 et u_1.

Exercice 28. *Suite récurrente 1*

Soit f la fonction définie par : $\forall x \in [0,1],\ f(x) = \sqrt{\dfrac{1+x}{2}}$. Soit (u_n) la suite définie par :

$$\left\{\begin{array}{l} u_0 \in [0,1] \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{array}\right.$$

1. Étudier les variations de f.

2. Un point fixe de f est un réel x de l'ensemble de définition de f tel que : $f(x) = x$. Déterminer les points fixes de f.

3. Justifier que la suite (u_n) est bien définie.

4. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $0 \leqslant u_n \leqslant 1$.

5. Montrer que la suite (u_n) est croissante.

6. Étudier la convergence de la suite (u_n).

Exercice 29. *Suite récurrente 2*

Soit f la fonction définie par : $\forall x \in [0,+\infty[,\ f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$. Soit (u_n) la suite définie par :

$$\left\{\begin{array}{l} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{array}\right.$$

1. Étudier les variations de f.

2. Un point fixe de f est un réel x de l'ensemble de définition de f tel que : $f(x) = x$. Déterminer les points fixes de f.

3. Justifier que la suite (u_n) est bien définie.

4. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $0 \leqslant u_n \leqslant 1$.

5. On considère la suite (v_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{2n}$. Montrer que la suite (v_n) est décroissante.

6. On considère la suite (w_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = u_{2n+1}$. Montrer que la suite (w_n) est croissante.

7. En déduire la convergence de la suite (u_n).

Exercice 30. *Suite homographique*

Soit (u_n) la suite définie par : $\left\{\begin{array}{l} u_0 = 5 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{6}{u_n+1} \end{array}\right.$

1. Justifier que la suite (u_n) est bien définie.

2. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n > 0$.

3. On considère la suite (v_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \dfrac{u_n - 2}{u_n + 3}$.

a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique et déterminer son terme général.

b) Étudier la convergence de la suite (u_n).

Exercice 31. *Problème*

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. On considère la fonction f_a définie pour tout réel $t > 0$ par :

$$f_a(t) = \frac{1}{2}\left(t + \frac{a^2}{t}\right)$$

ainsi que la suite (u_n) de nombre réels déterminée par son premier terme $u_0 > 0$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f_a(u_n).$$

Étude des variations de la fonction f_a

1. Déterminer la limite de f_a lorsque t tend vers $+\infty$. Justifier l'existence d'une asymptote oblique au voisinage de $+\infty$ et donner la position de la courbe représentative de f_a par rapport à cette asymptote.

2. Déterminer la limite de f_a lorsque t tend vers 0 par valeurs positives. Interpréter graphiquement cette limite.

3. Donner l'expression de la fonction dérivée de f_a sur $\mathbb{R}_+^*$ et dresser le tableau de variation de f_a.

4. En déduire : $\forall t > 0,\ f_a(t) \geqslant a$.

Étude de la convergence de la suite (u_n)

1. Démontrer que la suite (u_n) est bien définie et : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \geqslant a$.

2. Que dire de la suite (u_n) dans le cas particulier où $u_0 = a$?

3. Dans la suite, on revient au cas général $u_0 > 0$.
Démontrer :
$$\forall t > a,\ 0 < f_a'(t) < \frac{1}{2}.$$

4. Prouver alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$0 \ \leqslant\ u_{n+1} - a \ \leqslant\ \frac{1}{2}(u_n - a)$$
Puis :
$$|u_n - a| \ \leqslant\ \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} |u_1 - a|.$$

5. En déduire la convergence de la suite (u_n) et indiquer sa limite.

Exercice 32. *Extrait EML 2007*

On note $I = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ et on considère l'application :
$$f : \begin{cases} I & \to \quad \mathbb{R} \\ x & \mapsto \quad x - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}\ln(x) \end{cases}$$

1. *a)* Montrer que f est strictement croissante sur I

b) Montrer : $\frac{1}{2} \ <\ f\left(\frac{1}{2}\right) \ <\ f(1) \ <\ 1$.

c) En déduire, pour tout $x \in I$: $f(x) \in I$.

2. On considère la suite réelle (u_n) définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

a) Justifier que la suite (u_n) est bien définie.

b) Calculer u_1.

c) Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \in I$.

d) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

e) En déduire que la suite (u_n) converge.

Exercice 33. *Suites négligeables, suites équivalentes*

Peut-on comparer les suites (u_n) et (v_n) suivantes ? Sont-elles équivalentes ? L'une est-elle négligeable par rapport à l'autre ?
Les suites (u_n) et (v_n) sont définies pour tout entier n telles que :

1. $\begin{cases} u_n &= n^3 + n^2 + 3n + 1 \\ v_n &= n^2 - 3n + 10 \end{cases}$

2. $\begin{cases} u_n &= \mathrm{e}^n \\ v_n &= n\mathrm{e}^n \end{cases}$

3. $\begin{cases} u_n &= \mathrm{e}^n \\ v_n &= \mathrm{e}^n + \ln\left(n^3 + 100n\right) \end{cases}$

4. $\begin{cases} u_n &= \mathrm{e}^n \\ v_n &= n^n \end{cases}$

5. $\begin{cases} u_n &= 2^n + n^2 - 10n \\ v_n &= 3^n + n^2 \end{cases}$

6. $\begin{cases} u_n &= \dfrac{n^7 - 10n^5 + 3n - 46}{n^8 - 20n^7 + 3n^4 - n} \\ v_n &= n^4 \end{cases}$

7. $\begin{cases} u_n &= \ln\left(n^2 + 1\right) \\ v_n &= n^2 + n - 3 \end{cases}$

Exercice 34. *Équivalents et limites*

1. Déterminer un équivalent puis la limite de $u_n = \sqrt{n+1}\,(\ln(n+1) - \ln(n))$.

2. Déterminer la limite de $v_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

3. Déterminer un équivalent de $w_n = n\ln\left(1 - \frac{2}{n}\right) - 2$.

4. Déterminer un équivalent de $b_n = \binom{n}{k}$ pour $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 35
On considère la suite (u_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{n!}{n^n}$

1. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

2. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{n}$.

3. En déduire que $n! = \underset{n\to+\infty}{o}(n^n)$.

Exercice 36. *Suite et intégrale*
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note : $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n e^{-x} dx$.

1. *a)* Montrer :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n+1}.$$

b) En déduire que la suite (I_n) converge et donner sa limite.

2. A l'aide d'une intégration par parties, établir :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = \frac{1}{(n+1)e} + \frac{I_{n+1}}{n+1}$$

3. *a)* En déduire :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant I_n - \frac{1}{(n+1)e} \leqslant \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

b) Trouver un équivalent simple de I_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 37. *Équivalent et suite récurrente*
On considère la suite (u_n) définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{1}{u_n + n + 1} \end{cases}$$

1. *a)* Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$. En déduire que (u_n) est bien définie.

b) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \leqslant \dfrac{1}{n}$.

c) Déterminer la limite de la suite (u_n).

2. *a)* Déterminer la limite de la suite (nu_n).

b) En déduire un équivalent de u_n.

3. *1.* Démontrer : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^3 \left(u_n - \frac{1}{n}\right) = -1$.

2. En déduire : $u_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$.

Exercice 38
Pour tout entier naturel non nul, on définit la fonction f_n sur $\mathbb{R}_+$ par :
$$\forall x \geqslant 0,\ f_n(x) = \int_0^x \frac{t^{2n} - 1}{t+1}\, dt$$

Partie A : Étude de la fonction f_n

Dans cette partie, on fixe un entier naturel n non nul.

1. Démontrer que la fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et :
$$\forall x \geqslant 0,\ f_n'(x) = \frac{x^{2n} - 1}{x+1}$$

2. Étudier les variations de f_n.

3. Démontrer que f_n est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+$, et calculer sa dérivée seconde.
En déduire que f_n est convexe sur $\mathbb{R}_+$.

4. ***a)*** Démontrer : $\forall t \geqslant 1,\ t^{2n} - 1 \ \geqslant\ n\,(t^2 - 1)$.

b) Montrer alors : $\forall x \geqslant 1,\ f_n(x) \ \geqslant\ f_n(1) + \dfrac{n}{2}\,(x-1)^2$.

c) En déduire la limite de $f_n(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

5. Calculer $f_n(0)$, puis démontrer : $f_n(1) < 0$.

6. Démontrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution strictement positive, et que cette solution est strictement supérieure à 1.
On note x_n cette solution.

Partie B : Étude d'une suite implicite

On étudie dans cette partie le comportement de la suite (x_n), où pour tout entier naturel n non nul, x_n est l'unique solution strictement positive de l'équation : $f_n(x) = 0$.
On admettra :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ x_n \geqslant \frac{2n+2}{2n+1}$$

7. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Démontrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f_{n+1}(x) - f_n(x) \ = \ x^{2n+1}\ \left(\frac{x}{2n+2} - \frac{1}{2n+1}\right)$$

8. ***a)*** Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \geqslant \dfrac{2n+2}{2n+1},\ f_{n+1}(x) \geqslant f_n(x)$.

b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f_{n+1}(x_n) \geqslant 0$.

c) Montrer alors que la suite (x_n) est décroissante, puis qu'elle est convergente.

9. ***a)*** Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 1$: $-\ln(2) \leqslant f_n(1) \leqslant 0$.

b) À l'aide de l'inégalité démontrée à la question ***4.b)*** de la partie ***A***, montrer alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant x_n - 1 \leqslant \sqrt{\frac{2\,\ln(2)}{n}}$$

Quelle est la limite de x_n lorsque n tend vers $+\infty$?

Exercice 39

On considère la fonction f définie sur $]0,1[$ par :

$$f : x \mapsto \frac{\ln(1-x)}{\ln(x)}$$

Partie A : Étude de la fonction f

1. Montrer que f est dérivable sur $]0,1[$ et que l'on a :

$$\forall x \in\ ]0,1[,\ f'(x) = \frac{1}{x\,(1-x)\,\big(\ln(x)\big)^2}\ \big(-x\,\ln(x) - (1-x)\,\ln(1-x)\big)$$

2. ***a)*** Justifier : $\forall t \in\ ]0,1[,\ t\,\ln(t) < 0$

b) En déduire que la fonction f est strictement croissante sur $]0,1[$.

3. ***a)*** Montrer que la fonction f est prolongeable par continuité en 0.
On note encore f la fonction ainsi prolongée en 0. Préciser $f(0)$.

b) Montrer que f est dérivable en 0 et préciser $f'(0)$.

4. Calculer la limite de f en 1. Que peut-on en déduire pour la courbe représentative de f ?

5. Tracer l'allure de la courbe représentative de f dans un repère orthonormé, en faisant figurer la tangente en 0 et les branches infinies éventuelles.

Partie B : Étude d'une suite

On note, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, (E_n) l'équation : $x^n + x - 1 = 0$.

6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Étudier les variations sur $\mathbb{R}_+$ de la fonction $x \mapsto x^n + x - 1$.
En déduire que l'équation (E_n) admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+$ que l'on note u_n.

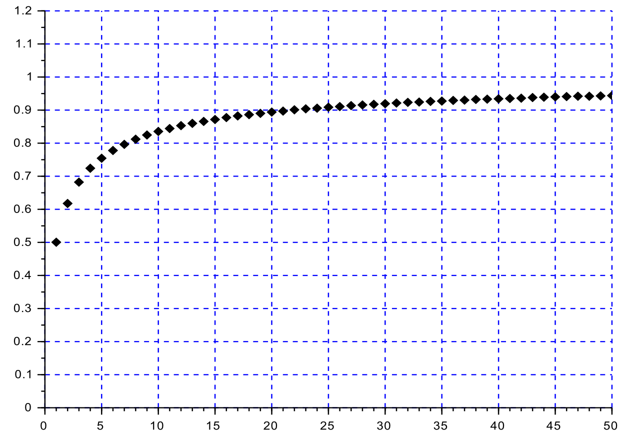
7. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, u_n appartient à l'intervalle $]0, 1[$.

8. Déterminer u_1 et u_2.

9. ***a)*** Recopier et compléter la fonction **Scilab** suivante afin que, prenant en argument un entier n de $\mathbb{N}^*$, elle renvoie une valeur approchée de u_n à 10^{-3} près, obtenue à l'aide de la méthode par dichotomie.

```
function u = valeur_approchee(n)
    a = 0
    b = 1
    while ...
        c = (a + b) / 2
        if (c^n + c - 1) > 0 then
            ...
        else
            ...
        end
        u = ...
    end
endfunction
```

b) On représente alors les premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et on obtient le graphe suivant.
Quelles conjectures peut-on faire sur la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ concernant sa monotonie, sa convergence et son éventuelle limite ?



10. ***a)*** Montrer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $f(u_n) = n$.

b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

c) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et préciser sa limite.