Équations différentielles linéaires d'ordre 1

Exercice 1
Résoudre les équations différentielles suivantes.

1. $y' = y + 1$
2. $y' = 3y + e^{3x}$
3. $y' = 2y + e^{2x}(1 + x)$
4. $7y' + 2y = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 1$
5. $y' = -y + x\,e^x$
6. $y' = 2y + 2x^2 - 1$
7. $y = \dfrac{y}{x^2}$
8. $y' + \dfrac{2x}{1+x^2}\,y = \dfrac{1+3x^2}{1+x^2}$
9. $y' - \ln(x)\,y = x^x$

Exercice 2
Résoudre les problèmes de Cauchy suivants.

1. $\begin{cases} y' + 2y = 3 \\ y(0) = 10 \end{cases}$
2. $\begin{cases} y' - y = t^2 + 1 \\ y(0) = -3 \end{cases}$
3. $\begin{cases} y' + y = t\,e^t \\ y(1) = -1 \end{cases}$

Exercice 3 (Lemme de Gronwall)
Soient $c \in [0, +\infty[$ et $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue positive. Soit $u : I \to \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \in [a, b[, \quad \big|u(x)\big| \leqslant c + \int_a^x \big|u(t)\big|\,g(t)\,dt$$

1. On pose $v : x \mapsto c + \displaystyle\int_a^x \big|u(t)\big|\,g(t)\,dt$ et $w : x \mapsto v(x)\exp\left(-\displaystyle\int_a^x g(t)\,dt\right)$.
   Montrer que w est décroissante sur I.
2. En déduire : $\forall x \in [a, b]$, $\big|u(x)\big| \leqslant c\exp\left(\displaystyle\int_a^x g(t)\,dt\right)$.

Exercice 4
Résoudre, sur $]0, 1[$, l'équation différentielle :

$$(1 - x^2)\,y' + x\,y = \frac{1}{x} + x\,\ln(x) - x$$

Exercice 5
Déterminer l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \int_0^x f(t)\,(2x - 3t)\,dt = \frac{x^2}{2}$$

Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

Exercice 6
Résoudre les équations différentielles suivantes.

1. $y'' - 3y' + 2y = 2\,e^{3x}$
2. $y'' - 3y' + 2y = e^x$
3. $y'' - 3y' + 2y = 2\,e^{3x} + e^x$
4. $y'' + 4y' + 4y = 2$
5. $y'' - 2y' + y = x\,e^x$
6. $y'' + y' - 2y = \mathrm{ch}(x)$
7. $y'' - y = |x| + 1$

Exercice 7
Résoudre les problèmes de Cauchy suivants :

1. $\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = 0 \\ y(-1) = 1 \\ y'(-1) = 2 \end{cases}$
2. $\begin{cases} y'' - 2y = e^t \\ y(0) = -3 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$
3. $\begin{cases} y' - 6y' + 3y = te^{3t} \\ y(0) = -1 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$

Exercice 8
Déterminer les solutions de l'équation différentielle $y'' - y' = 0$ de deux manières différentes :

1. en appliquant les résultats du cours sur les équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants.
2. en effectuant un changement de variable pour se ramener à une équation différentielle linéaire d'ordre 1.

Exercice 9
Déterminer l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x)\, f(y) \; = \; \int_{x-y}^{x+y} f(t)\; dt$$

Exercice 10
On cherche à résoudre l'équation différentielle :

$$(1+x)\, y'' - y' - xy \; = \; 0 \qquad (E)$$

1. Montrer que la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x$ est solution.

2. Soit y une solution de (E). Déterminer les fonctions $z : x \mapsto y(x)\, \mathrm{e}^{-x}$.

3. Conclure.

Équations fonctionnelles

Exercice 11
Soit f une fonction réelle à valeurs réelles deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}$:

$$f(x+y) + f(x-y) \; = \; 2\, f(x)\, f(y)$$

1. On commence par étudier la fonction f.

a) Déterminer les valeurs possibles de $f(0)$.

b) Montrer que si $f(0) = 0$, la fonction f est la fonction identiquement nulle.

c) Montrer que f est paire et : $f'(0) = 0$.

2. Démontrer, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$f''(x)\, f(y) \; = \; f(x)\, f''(y)$$

3. En déduire que f est soit nulle, soit solution d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants.

4. Déterminer l'ensemble des fonctions f satisfaisant l'équation fonctionnelle.

Exercice 12
On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues telles que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(xy) \; = \; x\, f(y) + y\, f(x)$$

Dans toute la suite, f désigne une fonction de $\mathcal{E}$.

1. *a)* Déterminer les valeurs de $f(0)$, $f(1)$ et $f(-1)$.

b) Démontrer que la fonction f est impaire.

2. On suppose que la fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$.

a) Montrer que f est solution, sur l'intervalle $]0, +\infty[$, de l'équation différentielle :

$$x\, f'(x) - f(x) \; = \; k\, x$$

où k est une constante réelle dépendant de f que l'on précisera.

b) Résoudre sur $]0, +\infty[$ l'équation différentielle précédente.

c) En déduire, en fonction de la constante k, la valeur de $f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

d) La fonction f est-elle dérivable en 0 ?

3. On note F la primitive de f qui s'annule en 0.

a) Montrer que, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$F(xy) \; = \; x^2\, F(y) + \frac{x\, y^2}{2}\; f(x)$$

b) En déduire que la fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$.

4. Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$.

Équations différentielles non linéaires

Exercice 13
Soit $(a,b) \in]0,+\infty[^2$. On considère l'équation différentielle logistique (non linéaire) :

$$y' \ = \ ay - by^2 \qquad (E)$$

1. Déterminer les équilibres de l'équation logistique.

2. Soit f une solution de (E) sur $[0,+\infty[$ qui ne s'annule pas sur $[0,+\infty[$.

a) On pose $z = \dfrac{1}{f}$. Montrer que z satisfait une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants, notée (E').

b) Résoudre (E').

c) Conclure quant à l'ensemble des solutions de (E) ne s'annulant pas sur I.

3. Soit f une solution de (E) sur $[0,+\infty[$ qui ne s'annule pas sur $[0,+\infty[$.
Calculer $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)$. Que remarque-t-on ?

Exercice 14
On considère l'équation différentielle :

$$x\,y' - x\,\mathrm{e}^{-\frac{y}{x}} - y \ = \ 0 \qquad (E)$$

Résoudre cette équation différentielle à l'aide du changement de variable
$z : x \mapsto \dfrac{1}{x}\, y(x)$.

Systèmes différentiels dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$

Exercice 15
On considère le système différentiel :

$$(S) \qquad \left\{ \begin{array}{rcrcr} x' & = & x & + & 3\,y \\ y' & = & x & - & y \end{array} \right.$$

1. Résoudre le système (S).

2. Trouver les états d'équilibre du système (S).

3. Existe-t-il des trajectoires convergentes ? Si oui, en donner une.

4. Justifier que toutes les trajectoires ne sont pas convergentes.

Exercice 16
On considère le système différentiel :

$$(S) \qquad \left\{ \begin{array}{rcrcr} x' & = & x & + & y \\ y' & = & -2\,x & - & 2\,y \end{array} \right.$$

1. Montrer que les trajectoires de (S) sont convergentes.

2. Montrer qu'il existe une infinité d'états d'équilibre associés à (S) et les donner.

3. Résoudre le système (S).

4. Expliciter une trajectoire non constante qui converge vers l'état d'équilibre $(2,-2)$.

Exercice 17
On considère l'équation différentielle suivante :

$$x''(t) + 5\,x'(t) + 4\,x(t) \ = \ 0 \qquad (E)$$

1. Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -5 \end{pmatrix}$ possède deux valeurs propres que l'on déterminera, puis donner une base de chacun des sous-espaces propres associés.

2. Résoudre l'équation (E).

Exercice 18
On considère le système différentiel :

$$(S) \qquad \left\{\begin{array}{rcrcr} x' & = & 3\,x & - & y \\ y' & = & x & + & y \end{array}\right.$$

1. a) Justifier que la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ possède une unique valeur propre, que l'on déterminera.

b) La matrice A est-elle diagonalisable ?

2. a) On pose : $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Montrer que P est inversible et déterminer P^{-1}.

b) Prouver que $P^{-1}AP$ est une matrice triangulaire P que l'on explicitera.

Soient x et y deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Dans la suite de l'exercice, on note $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et on pose $Y = P^{-1}X$.

3. a) En notant $Y = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, prouver que : $Y' = P^{-1}X'$.

b) En déduire : $X' = AX \iff Y' = TY$.

4. a) Résoudre l'équation différentielle $v' = 2v$.

b) En déduire les solutions du système $Y' = TY$.

c) Conclure.

Systèmes différentiels dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$

Exercice 19
On considère le système différentiel linéaire :

$$(S) \qquad \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x' & = & x & + & 4\,y & - & 4\,z \\ y' & = & 3\,x & + & 2\,y & - & 4\,z \\ z' & = & 3\,x & - & 3\,y & + & z \end{array}\right.$$

On pose, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ et $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

1. Montrer qu'il existe une unique solution au système (S) vérifiant : $X(0) = X_0$.

2. Résoudre le système (S).

3. a) Déterminer la trajectoire associée à la solution évoquée en question ***1.***

b) Cette trajectoire est-elle ocnvergente ?

Exercice 20
On considère le système différentiel linéaire :

$$(E) \qquad \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x' & = & x & + & 2\,y & - & 2\,z \\ y' & = & -4\,x & - & 3\,y & + & 4\,z \\ z' & = & -2\,x & & & + & z \end{array}\right.$$

où x, y et z sont trois fonctions inconnues, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

1. On pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Définir une matrice A telle que :

$$(E) \iff X' = AX$$

2. On note $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et on admet que P est inversible d'inverse :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Démontrer : $P^{-1}AP = T$, où T est la matrice triangulaire supérieure $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

b) On pose $Y = P^{-1}X$. Démontrer : $X' = AX \;\Leftrightarrow\; Y' = TY$.

3. ***a)*** Résoudre l'équation différentielle $(\mathcal{E}_1)$: $\varphi' = \varphi$.

b) Résoudre l'équation différentielle $(\mathcal{E}_2)$: $\varphi' = -\varphi$.

c) Soit $c \in \mathbb{R}$. Montrer que la fonction $t \mapsto c\,t\,\mathrm{e}^{-t}$ est une solution particulière de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_3)$: $\varphi' = -\varphi + c\,\mathrm{e}^{-t}$.

4. On note $Y = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ et on suppose que $Y' = TY$. Montrer que α est solution de $(\mathcal{E}_1)$, γ est solution de $(\mathcal{E}_2)$ et β est solution de $(\mathcal{E}_3)$ pour un réel c bien choisi.

5. En déduire que, si $X' = AX$, alors il existe des réels λ_1, λ_2 et λ_3 tels que, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x(t) & = & (2\,\lambda_1\,t + \lambda_2 - \lambda_1)\,\mathrm{e}^{-t} \\ y(t) & = & 2\,\lambda_1\,\mathrm{e}^{-t} + \lambda_3\,\mathrm{e}^{t} \\ z(t) & = & (2\,\lambda_1\,t + \lambda_2)\,\mathrm{e}^{-t} + \lambda_3\,\mathrm{e}^{t} \end{array} \right.$$

6. En déduire une solution non stationnaire de (S) qui converge vers l'unique état d'équilibre du système (E).