Exercice 1
Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a. réelles deux à deux indépendantes.
On suppose que X_i suit une loi de Bernoulli de paramètre p_i et on pose :

$$\overline{X}_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$$

1. A l'aide de l'inégalité de Markov, montrer que :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad 1 - \frac{\mathbb{V}(\overline{X}_n)}{\varepsilon^2} \leqslant \mathbb{P}\left(\left[|\overline{X}_n - \mathbb{E}(\overline{X}_n)| < \varepsilon\right]\right) \leqslant 1$$

2. En déduire que : $\forall \varepsilon > 0, \ \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left[\left|\overline{X}_n - \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} p_i\right| < \varepsilon\right]\right) = 1$

Exercice 2
Soit X une v.a. suivant la loi exponentielle de paramètre λ.

1. Justifier que pour tout $\varepsilon > 0$, on a : $\mathbb{P}\left(\left[X - \frac{1}{\lambda} \geqslant \varepsilon\right]\right) \leqslant \mathbb{P}\left(\left[\left|X - \frac{1}{\lambda}\right| \geqslant \varepsilon\right]\right)$.

2. En déduire, en utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, que :

$$\mathbb{P}\left(\left[X \geqslant \frac{3}{\lambda}\right]\right) \leqslant \frac{1}{4}$$

Exercice 3
40% des individus d'une population possèdent un caractère C. On considère un échantillon de 200 individus. Peut-on affirmer, à 99%, que la probabilité de la fréquence d'apparition du caractère C dans l'échantillon soit comprise entre 30% et 50% ?
On pourra poser X_i la v.a. de Bernoulli égale à 1 si l'individu i présente le caractère C, puis on utilisera l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Exercice 4
Une population de personnes présente une propriété donnée avec une proportion inconnue $p \in]0,1[$.
On choisit un échantillon d n personnes et on pose $X_i = 1$ si le i-ème individu présente la propriété étudiée, 0 sinon. On considère que les v.a. X_i ainsi définies sont indépendantes et suivent toutes une loi de Bernoulli de paramètre p.

1. Quelle est la loi suivie par $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$? Déterminer l'espérance et la variance de la v.a. $M_n = \frac{S_n}{n}$.

2. Soit $\varepsilon > 0$. Établir : $\mathbb{P}\left(\left[\left|\frac{S_n}{n} - p\right| > \varepsilon\right]\right) \leqslant \frac{1}{4n\varepsilon^2}$.

3. Pour $\varepsilon = 0,05$, quelle valeur de n choisir pour que $\frac{S_n}{n}$ soit voisin de p à ε près avec une probabilité supérieure à 95% ?

Exercice 5
Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de v.a. réelles définies sur un même espace probabilisé, indépendantes, suivant une loi uniforme sur $[0,1]$. Pour $n \geqslant 1$, on définit :

$$M_n = \max(X_1, \ldots, X_n) \ \text{ et } \ Y_n = n(1 - M_n)$$

1. Déterminer la fonction de répartition de M_n, puis en déduire celle de Y_n.

2. Montrer que la suite (Y_n) converge en loi vers une v.a. suivant la loi exponentielle de paramètre 1.

Exercice 6
Soit $n \geqslant 2$. On considère n v.a. indépendantes $Z_1, \ldots, Z_n$ suivant toutes la loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. On pose $M_n = \frac{Z_1 + \cdots + Z_n}{n}$.

1. Déterminer l'espérance m et l'écart type σ_n de M_n.

2. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}([0 \leqslant M_n - m \leqslant \sigma_n])$ existe et exprimer sa valeur à l'aide de $\int_0^1 \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\, dx$.

Exercice 7

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère une v.a. S_n suivant la loi binomiale de paramètres n et p.

1. Rappeler l'espérance et la variance de S_n.

2. En utilisant le théorème central limite, en déduire la valeur de :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}([S_n \leqslant np])$$

Exercice 8

On considère une suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ de v.a. définies sur le même espace probabilisé, indépendantes, et suivant toutes la loi de Poisson $\mathcal{P}(1)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ et $u_n = \mathrm{e}^{-n} \sum\limits_{i=0}^{n} \frac{n^i}{i!}$.

1. Donner la loi de S_n, son espérance et sa variance.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer u_n à l'aide de la v.a. S_n.

3. En appliquant le théorème central limite, en déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{1}{2}$, puis un équivalent de $\sum\limits_{i=0}^{n} \dfrac{n^i}{i!}$.

Exercice 9

Soit $k \in \mathbb{N}^*$, et $X_1, \dots, X_k$ des v.a. indépendantes suivant la loi de Poisson $\mathcal{P}(5)$. On pose $Y_k = \sum\limits_{i=1}^{k} X_i$.

1. Rappeler $\mathbb{E}(Y_k)$ et $\mathbb{V}(Y_k)$.

2. Justifier l'existence d'un unique réel $t_0 > 0$ qui vérifie $\displaystyle\int_{-\infty}^{t_0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = 0,99$.

3. Établir que $\lim\limits_{k\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left[Y_k - 5k > t_0\sqrt{5k}\right]\right) = 0,01$.

Exercice 10

Soient X, Y et Z, mutuellement indépendantes et suivant toutes la loi binomiale $\mathcal{B}\left(10, \frac{1}{2}\right)$. On note $R = \dfrac{1}{3}(X+Y+Z)$.

1. Quelle est la loi de $X+Y+Z$?

2. On donne $\Phi\left(\sqrt{\dfrac{6}{5}}\right) \approx 0,86$. En utilisant une approximation de la loi binomiale par la loi normale, en déduire une valeur approchée de la probabilité $\mathbb{P}([R \geqslant 4])$.

Exercice 11

On effectue 100 lancers d'une pièce équilibrée.

1. Estimer la probabilité qu'on obtienne autant de piles que de faces.

2. Estimer la probabilité qu'on obtienne un nombre de piles compris entre 40 et 50 avec correction de continuité et sans correction de continuité.

Exercice 12

On estime que le nombre journalier de clients d'un magasin suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(10)$ et que la fréquentation du magasin est indépendante d'un jour à l'autre.
Estimer la probabilité d'avoir au moins 180 clients au cours de 20 jours d'ouverture.

Exercice 13

1. Soit X une v.a. définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, prenant des valeurs positives et possédant une espérance, et $a > 0$.
On considère l'événement $A = [X \geqslant a]$, et on note I la variable indicatrice de cet événement, c'est-à-dire la v.a. qui vaut 1 si A est réalisé et 0 sinon.

a) Montrer que pour tout $\omega \in \Omega$, on a $I(\omega) \leqslant \dfrac{1}{a} X(\omega)$.

b) Utiliser la croissance de l'espérance pour en déduire que :

$$\mathbb{P}([X \geqslant a]) \leqslant \frac{\mathbb{E}(X)}{a}$$

2. On considère une v.a. discrète Z, d'espérance nulle et de variance σ^2.

a) Montrer que, pour tout $(a,x) \in]0,+\infty[\times\mathbb{R}_+$:

$$\mathbb{P}([Z \geqslant a]) \leqslant \mathbb{P}\left(\left[(Z+x)^2 \geqslant (a+x)^2\right]\right)$$

b) Montrer que : $\forall a > 0,\ \forall x \geqslant 0,\ \mathbb{P}([Z \geqslant a]) \leqslant \dfrac{\sigma^2+x^2}{(a+x)^2}$.

On pourra appliquer ***1.b)*** à la v.a.r. $(Z+x)^2$.

c) En déduire que : $\forall a > 0,\ \mathbb{P}([Z \geqslant a]) \leqslant \dfrac{\sigma^2}{\sigma^2+a^2}$.

On pourra étudier la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\sigma^2+x^2}{(a+x)^2}$ sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 14

On considère une suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ de v.a. indépendantes, définies sur le même espace probabilisé, et suivant toutes la loi de Bernoulli $\mathcal{B}\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$.

1. Quelle est la loi suivie par S_n ? Donner son espérance et sa variance.

2. a) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver une constante K_ε telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{K_\varepsilon}{n}$$

b) En déduire que pour tout réel r vérifiant $0 < r < \dfrac{1}{2}$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left[\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}\right| \geqslant \frac{1}{n^r}\right]\right) = 0$$

3. Montrer d'autre part, à l'aide du théorème central limite, que

$$\mathbb{P}\left(\left[\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}\right| \geqslant \frac{1}{\sqrt{n}}\right]\right)$$

admet une limite non nulle lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 15

En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que pour tout $x > 0$:

$$\int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\, dt \geqslant \sqrt{2\pi}\left(1 - \frac{1}{2x^2}\right)$$

Exercice 16

Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de v.a. définies sur le même espace probabilisé, indépendantes, et suivant toutes la loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$.

On pose $Z_n = \max(X_1,\dots,X_n) - \ln(n)$ et on admet que Z_n est une variable aléatoire.

1. Déterminer la fonction de répartition de Z_n.

2. On pose $Z = -\ln(X)$, où X suit aussi la loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$.

a) Donner la loi de Z.

b) Montrer que la suite $(Z_n)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers Z.

Exercice 17

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère n urnes $U_1,\dots,U_n$. Pour tout i de $[\![1,n]\!]$, l'urne U_i contient i boules blanches et $n-i$ boules noires. On choisit une urne au hasard et on y effectue des tirage avec remise jusqu'à obtenir une boule blanche. On note X_n la v.a. égale au nombre de tirages effectués.

1. Déterminer la loi de X_n. On exprimera le résultat sous forme de somme.

2. Déterminer $\mathbb{E}(X_n)$ puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}(X_n)$.

3. Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une v.a. dont on précisera la loi.

Exercice 18

Pour tout $n \geqslant 2$, on considère une v.a. X_n à valeurs dans $[\![2, n+1]\!]$ et vérifiant : $\forall k \in [\![2, n]\!]$, $\mathbb{P}([X_n > k]) = \dfrac{1}{n^k}\dbinom{n}{k}$.

1. ***a)*** Exprimer, pour tout $k \in [\![2, n+1]\!]$, $\mathbb{P}([X_n = k])$ à l'aide de $\mathbb{P}([X_n > k-1])$ et $\mathbb{P}([X_n > k])$.

b) En déduire que : $\forall k \in [\![2, n+1]\!]$, $\mathbb{P}([X_n = k]) = \dfrac{k-1}{n^k}\dbinom{n+1}{k}$.

c) Pour tout $k \geqslant 2$, on pose $u_k = \dfrac{k-1}{k!}$.

Vérifier que la suite u définit une loi de probabilité.
On considère alors une v.a. Z telle que pour tout $k \geqslant 2$, $\mathbb{P}([Z = k]) = u_k$.

d) Montrer que la suite de v.a. $(X_n)_{n\geqslant 2}$ converge en loi vers Z.

2. ***a)*** Montrer que : $\mathbb{E}(X_n) = \sum\limits_{k=0}^{n} \mathbb{P}([X_n > k])$.

b) Calculer $\mathbb{E}(X_n)$.

c) Montrer que Z admet une espérance et la calculer.

d) Comparer $\mathbb{E}(Z)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}(X_n)$.

Exercice 19

On considère une suite $(\Delta_n)_{n\geqslant 1}$ de v.a. définies sur le même espace probabilisé, indépendantes, strictement positives et suivant toutes la loi exponentielle d'espérance 1.

On pose $T_0 = 0$, et $T_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \Delta_i$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer l'espérance et la variance de T_n.

2. Soit t un réel positif.

a) Justifier que pour tout entier $n > t$, $[T_n < t] \subset [|T_n - n| \geqslant n - t]$.

b) En déduire, à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}([T_n < t])$.

c) Montrer que l'événement $\bigcap\limits_{n\geqslant 1} [T_n < t]$ a une probabilité nulle.

Exercice 20

On considère une suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ de v.a. indépendantes et de même loi. Pour tout $t > 0$, on note $A_{n,t}$ la v.a. égale au nombre de v.a. X_i qui sont inférieures à t pari les v.a. $X_1, \dots, X_n$: $A_{n,t} = \text{Card}\{i \in [\![1, n]\!] \ / \ X_i \leqslant t\}$.

On note également : $F_n(t) = \dfrac{1}{n} A_{n,t}$.

1. Déterminer la loi de $A_{n,t}$. Donner son espérance m, et sa variance V en fonction de la fonction de répartition commune des X_i notée F_X.

2. Donner un majorant de V indépendant de t.

3. Soit $t > 0$. En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}([|F_n(t) - F_X(t)| \geqslant \varepsilon]) = 0$$

Exercice 21

On considère une suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ de v.a. indépendantes et de même loi de Bernoulli de paramètre p.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $Y_n \, X_n \, X_{n+1}$.

1. Déterminer la loi de Y_n.

2. Calculer la covariance de Y_n et Y_{n+1}.

3. Justifier que la covariance de Y_n et Y_p est nulle pour $|n - p| \geqslant 2$.

4. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $Z_n = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} Y_i}{n}$.

a) Déterminer l'espérance de Z_n.

b) On admet que : $\mathbb{V}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} Y_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{V}(Y_i) + 2 \sum\limits_{1\leqslant i > j \leqslant n} \text{Cov}(Y_i, Y_j)$. (Vous pouvez aussi démontrer cette formule)

Déterminer la variance de Z.

c) En déduire que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left[|Z_n - p^2| \geqslant \varepsilon\right]\right) = 0$.

Exercice 22

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère une variable aléatoire réelle X_n de loi exponentielle de paramètre $\dfrac{1}{n}$, et on définit la variable aléatoire Y_n, par $Y_n = \lfloor X_n \rfloor$, où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière du réel x. On rappelle que $\lfloor x \rfloor$ est égal à l'unique entier k vérifiant $k \leqslant x < k+1$.

1. ***a)*** Préciser les valeurs prises par Y_n et déterminer la loi de Y_n.

b) Calculer l'espérance $\mathbb{E}(Y_n)$ et la variance $\mathbb{V}(Y_n)$.

2. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose $Z_n = X_n - Y_n$. On définit ainsi une suite $(Z_n)_{n \geqslant 1}$ de variables aléatoires réelles.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, Z_n est une variable aléatoire à densité et déterminer une densité de Z_n.

b) Montrer que la suite $(Z_n)_{n \geqslant 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire U dont on donnera la loi.

c) Calculer l'espérance $\mathbb{E}(Z_n)$. Montrer que la suite $(\mathbb{E}(Z_n))_{n \geqslant 1}$ admet une limite que l'on déterminera. A-t-on $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{E}(Z_n) = \mathbb{E}(U)$?

Exercice 23

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Un groupe de n personnes portant des numéros de 1 à n tire à tour de rôle, avec remise, un numéro compris entre 1 et n dans une urne. Si l'une des personnes a tiré son propre numéro, on recommence la série des n tirages, sinon on arrête.

On note X_n le nombre de séries de n tirages qu'il faut effectuer pour que chaque personne ait tiré un numéro différent du sien.

1. Montrer que X_n suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre.

2. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}([X_n = k])$. En déduire que la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire X dont on précisera la loi.

Exercice 24

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la même loi exponentielle de paramètre 1.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\overline{X}_n = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ et $X_n^* = \sqrt{n}(\overline{X}_n - 1)$. On note F_n la fonction de répartition de X_n^* .

1. ***a)*** Donner l'espérance et la variance de $\overline{X_n}$.

b) Montrer que $\overline{X}_n$ converge en probabilité vers 1, c'est-à-dire que :
$\forall \varepsilon > 0, \ \lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(\left[\left|\overline{X}_n - 1\right| > \varepsilon\right]\right) = 0$

2. ***a)*** Quelle est, pour $x \in \mathbb{R}$, la limite de $F_n(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$?

b) Calculer une valeur approchée de $\mathbb{P}\left(\left[1 - \dfrac{2}{\sqrt{n}} \leqslant \overline{X}_n \leqslant 1 + \dfrac{2}{\sqrt{n}}\right]\right)$, pour n assez grand.
Si Φ la fonction de répartition de la loi normale réduite, on donne $\Phi(2) \approx 0{,}977$.

Exercice 25

On veut estimer le pourcentage p de réponses positives à un référendum. Pour cela, on effectue un sondage sur n personnes, et on estime p par la fréquence relative F_n de « oui » sur les personnes sondées.

On suppose les réponses données par les personnes sondées mutuellement indépendantes.

On cherche la taille minimale n de l'échantillon pour que la probabilité que la fréquence relative F_n diffère de p de plus de $0,01$ soit inférieure $0,05$.

1. Étudier la fonction $x \longmapsto x(1-x)$ sur $[0,1]$.

2. <u>Première méthode : utilisation de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev</u>

a) Montrer, en utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, que : $\mathbb{P}\left([|F_n - p| > 0,0\right.$
$\dfrac{2500}{n}$

b) Conclure quant à la taille minimale cherchée n de l'échantillon.

3. <u>Seconde méthode : utilisation d'une approximation en loi</u>

a) Expliquer pourquoi on peut approcher la loi de $\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}}\,(F_n - p)$ par la loi normale centrée réduite.

b) Conclure quant à la taille minimale cherchée n de l'échantillon.
On donne $\Phi(1,96) = 0,975$, et $98^2 = 9\,604$.
Remarque : $98^2 = (100-2)^2 = 100^2 - 4 \times 100 + 4 = 10000 - 400 + 4 = 9604$.

4. Discuter les avantages et les inconvénients des deux méthodes. Quelle méthode l'institut de sondage va-t-il choisir ?

Remarque : Dans les deux cas, on cherche la taille minimale n de l'échantillon observé tel que $\mathbb{P}\left([|F_n - p| > 0,01]\right) \leqslant 0,05$, soit en passant au complémentaire $\mathbb{P}\left([|F_n - p| \leqslant 0,01]\right) \geqslant 0,95$. On a donc cherché la taille minimale n telle que $\mathbb{P}\left([F_n - 0,01 \leqslant p \leqslant F_n + 0,01]\right) \geqslant 0,95$. Nous avons donc, pour la valeur de n calculée selon la méthode utilisée, obtenu un intervalle de confiance de p au niveau de confiance $0,95$: $[F_n - 0,01\ ;\ F_n + 0,01]$ est un **intervalle de confiance de p au niveau de risque** $0,05$.

Exercice 26

Pour ce jeu de hasard, la mise pour chaque partie est de 1 euro. L'observation montre qu'une partie est gagnée avec probabilité $\dfrac{1}{10}$, perdue avec probabilité $\dfrac{9}{10}$.
Toute partie gagnée rapporte 3 euros. Les différentes parties sont indépendantes.
Une personne décide de jouer N parties ($N \geqslant 2$). On note X_N la variable aléatoire représentant le nombre de parties gagnées et Y_N la variable aléatoire représentant le gain algébrique du joueur.

1. Donner la loi de X_N ainsi que la valeur de l'espérance et de la variance de cette variable.

2. Exprimer Y_N en fonction de X_N. En déduire la valeur de l'espérance et de la variance de Y_N.

3. La personne décide de jouer 60 parties. On admet que l'on peut approcher X_{60} par une loi de Poisson.

a) Donner le paramètre de cette loi de Poisson.

b) A l'issue des 60 parties, quelle est la probabilité que le joueur perde moins de 50 euros ? (cette probabilité sera impérativement calculée en utilisant l'annexe située à la fin de l'exercice)

k	$\lambda = 3$	$\lambda = 4$	$\lambda = 5$	$\lambda = 6$	$\lambda = 7$
0	$0,0498$	$0,0183$	$0,0067$	$0,0025$	$0,0009$
1	$0,1991$	$0,0916$	$0,0404$	$0,0174$	$0,0073$
2	$0,4232$	$0,2381$	$0,1247$	$0,0620$	$0,0296$
3	$0,6472$	$0,4335$	$0,2650$	$0,1512$	$0,0818$
4	$0,8153$	$0,6288$	$0,4405$	$0,2851$	$0,1730$
5	$0,9161$	$0,7851$	$0,6160$	$0,4457$	$0,3007$
6	$0,9665$	$0,8893$	$0,7622$	$0,6063$	$0,4497$
7	$0,9881$	$0,9489$	$0,8666$	$0,7440$	$0,5987$
8	$0,9962$	$0,9786$	$0,9319$	$0,8472$	$0,7291$
9	$0,9989$	$0,9919$	$0,9682$	$0,9161$	$0,8305$
10	$0,9997$	$0,9972$	$0,9863$	$0,9574$	$0,9015$
11	$0,9999$	$0,9991$	$0,9945$	$0,9799$	$0,9467$
12	$1,0000$	$0,9997$	$0,9980$	$0,9912$	$0,9730$
13		$0,9999$	$0,9993$	$0,9964$	$0,9872$
14		$1,0000$	$0,9998$	$0,9986$	$0,9943$
15			$0,9999$	$0,9995$	$0,9976$
16			$1,0000$	$0,9998$	$0,9990$
17				$0,9999$	$0,9996$
18				$1,0000$	$0,9999$
19					$1,0000$
20					

Table de Poisson donnant les probabilités cumulées : $\displaystyle\sum_{i=0}^{k} \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!}$