Exercice 1

Pour chaque sous ensemble de $\mathbb{R}^2$, préciser s'il s'agit d'un ouvert, d'un fermé, ou d'un fermé borné. Aucune justification n'est demandée.

1. $\mathbb{R}^2$;
2. $A = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$;
3. $B = [0,1] \times [0,1]$;
4. $C =]0,1[\times]0,1[$;
5. $D = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$;
6. $E = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$;
7. $F =]1,+\infty[\times\mathbb{R}_+^*$;
8. $G = \mathbb{R} - \{-1;1\} \times \mathbb{R}_+^*$;
9. $H = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ x+y \geq 1\right\}$;
10. $I = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.

Exercice 2

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ par $f(x,y) = \dfrac{\ln(1+x)}{y^2+1} - \sqrt{xy}$.

1. Expliciter les dérivées partielles de f en $(2,1)$.
2. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$.
3. Montrer que f admet un maximum et un minimum sur $[0,1] \times [0,1]$.

Exercice 3

Montrer que les fonctions suivantes sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert U proposé, et calculer les dérivées partielles premières et secondes de f.

1. f définie par $f(x,y) = x^2 + 3x^2y - xy + y^2$ sur $U = \mathbb{R}^2$;
2. f définie par $f(x,y) = (x+y)(1-2x-2y)$ sur $U = \mathbb{R}^2$;
3. f définie par $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ sur $U = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$;
4. f définie par $f(x,y) = x(\ln x + x + y^2)$ sur $U = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$;
5. f définie par $f(x,y) = xy\mathrm{e}^{-x^2-y^2}$ sur $U = \mathbb{R}^2$;
6. f définie par $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{x}}{\ln y}$ sur $U =]0,+\infty[\times]1,+\infty[$;
7. f définie par $f(x,y) = \mathrm{e}^{xy}\ln(1+x^2+y^2)$ sur $U = \mathbb{R}^2$.

Exercice 4

On note $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ par :

$$F(x,y) = (x-1)(y-2)(x+y-6)$$

1. Montrer que $(4,2)$ et $(2,3)$ sont des points critiques de F.
2. Est-ce que F présente un extremum local au point $(4,2)$? au point $(2,3)$?

Exercice 5

Déterminer les extrema de la fonctions f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y) = xy(x+y-1)$$

Exercice 6

Soit f définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $f(x,y) = 9x^2 + 8xy + 3y^2 + x - 2y$.

1. Montrer que f admet un seul extremum sur $\mathbb{R}^2$. Quelle est sa nature ?
2. Calculer $f\left(-\dfrac{1}{2}, 1\right)$ puis retrouver le résultat de la question précédente en développant l'expression :
$$3\left(y + \frac{4}{3}x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{11}{3}\left(x + \frac{1}{2}\right)^2$$
3. Cet extremum est-il global ?

Exercice 7

Soit le fonction f définie par : $f(x,y) = x\left((\ln(x))^2 + y^2\right)$.

1. Préciser le domaine de définition de f et le représenter. *On admet que ce domaine est ouvert.*
2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur ce domaine.
3. Montrer que f admet un seul extremum local. Préciser sa nature et sa valeur.
4. Cet extremum est-il global ?

Exercice 8
Soit f définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $f(x,y) = xy\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$.

1. Calculer $\partial_1(f)$ et $\partial_2(f)$.

2. Déterminer les points critiques de f et indiquer si ces points correspondent à un minimum ou un maximum.

Exercice 9. *EML 2015*
Dans cet exercice, on pourra utiliser l'encadrement $2 < \mathrm{e} < 3$.

1. On considère l'application $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2\mathrm{e}^x - 1 \end{array} \right.$

a) Dresser le tableau de variations de φ, en précisant les limites de φ en $-\infty$ et $+\infty$ et sa valeur en 0.

b) Établir que l'équation $\mathrm{e}^x = \dfrac{1}{x^2}$, d'inconnue $x \in]0,+\infty[$, admet une solution et une seule, notée α, et que α appartient à l'intervalle $\left]\dfrac{1}{2}, 1\right[$.

On considère l'ouvert $U =]0,+\infty[\times\mathbb{R}$ de $\mathbb{R}^2$ et l'application g de classe $\mathcal{C}^2$ suivante :

$$g : \left\{ \begin{array}{ccc} U & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \dfrac{1}{x} + \mathrm{e}^x - y^2\mathrm{e}^y \end{array} \right.$$

2. Représenter graphiquement l'ensemble U.

3. Calculer, pour tout (x,y) de U, les dérivées partielles premières de g en (x,y).

4. Montrer que g admet deux points critiques et deux seulement et que ceux-ci sont $(\alpha, 0)$ et $(\alpha, -2)$, où α est le réel défini à la question 2.

5. Est-ce que g admet un extremum local en $(\alpha, 0)$?

6. Est-ce que g admet un extremum local en $(\alpha, -2)$?

7. Est-ce que g admet un extremum global sur U ?

Exercice 10. *Ecricome 2007*
On considère, sur l'ouvert $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, la fonction g définie par :

$$g(x,y) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)(1+x)(1+y).$$

1. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 de g sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.

2. Montrer que g admet un extremum local sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ dont on précisera la nature et la valeur.

3. On considère la fonction f, définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $f(t) = \dfrac{1}{2}\left(t + \dfrac{1}{t}\right)$.

a) Montrer que pour tout $t > 0$, on a : $f(t) \geqslant 1$.

b) Vérifier que : $g(x,y) = 1 + f_1(x) + f_1(y) + f_1\left(\dfrac{x}{y}\right)$.

c) En déduire que l'extremum local est un extremum global de g sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.

Exercice 11. *Edhec 2010*
On note f la fonction définie, pour tout (x,y) de l'ouvert $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$, par :

$$f(x,y) = (x+y)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right).$$

1. Montrer que pour tout couple (x,y) de $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$, on a :

$$f(x,y) = 2 + \frac{y}{x} + \frac{x}{y} \quad \text{et} \quad f(x,y) = \frac{(x+y)^2}{xy}.$$

2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$.

3. Montrer que f possède une infinité de points critiques et les déterminer.

4. Déterminer les dérivées partielles secondes de f.
Vérifier que ces dernières ne permettent pas de conclure à l'existence d'un extremum local de f sur l'ouvert $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$.

5. a) Comparer les réels $(x+y)^2$ et $4xy$.

b) En déduire que f admet sur $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$ un minimum global en tous ses points critiques et donner sa valeur.

6. Soit g la fonction définie pour tout (x,y) de $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$, par :

$$g(x,y) = 2\ln(x+y) - \ln(x) - \ln(y).$$

Montrer que : $\forall (x,y) \in]0,+\infty[\times]0,+\infty[,\ g(x,y) \geqslant 2\ln(2)$.

Exercice 12. *Edhec 2005*

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = x\mathrm{e}^{x(y^2+1)}$.

1. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

2. a) Déterminer les dérivées partielles premières de f.

b) En déduire que le seul point en lequel f est susceptible de présenter un extremum local est $A = (-1,0)$.

3. a) Déterminer les dérivées partielles secondes de f.

b) Montrer qu'effectivement, f présente un extremum local en A. En préciser la nature et la valeur.

4. a) Montrer que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) \geqslant x\mathrm{e}^x$.

b) En étudiant la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x\mathrm{e}^x$, conclure que l'extremum trouvé à la question ***2.b)*** est un extremum global de f sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 13. *Ecricome 2000*

On note T l'ensemble des couples (x,y) de réels solutions du système d'inéquations :

$$\begin{cases} x \geqslant \frac{1}{4} \\ y \geqslant \frac{1}{4} \\ x+y \leqslant \frac{3}{4} \end{cases}$$

On note T' l'intérieur de T à savoir l'ensemble des couples (x,y) solutions du système d'inéquations

$$\begin{cases} x > \frac{1}{4} \\ y > \frac{1}{4} \\ x+y < \frac{3}{4} \end{cases}$$

On admet que T' est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et que T est un fermé de $\mathbb{R}^2$.

Soit f la fonction définie sur T par : $\quad f(x,y) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} - \dfrac{2}{x+y}$.

1. Représenter sur un même graphique T et T'.

2. Montrer que f admet un minimum et un maximum sur T.

3. a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur T'.

b) Déterminer les dérivées partielles d'ordre 1 sur T' de la fonction f.

c) Montrer que f n'admet pas d'extremum local (et donc a fortiori absolu) sur T'.

4. a) Montrer que le minimum et le maximum de f sont atteints sur

$$C = \left\{(x,y) \in T,\ x = \frac{1}{4} \text{ ou } y = \frac{1}{4} \text{ ou } x+y = \frac{3}{4}\right\}$$

b) Démontrer par de simples considérations sur des inégalités que l'on a pour tout couple (x,y) de T :

$$2 \leqslant f(x,y) \leqslant \frac{16}{3}$$

Exercice 14
Soit f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = 5x^2 - 6xy + 2x + 2y^2 - 2y + 1$.

1. Calculer les dérivées partielles premières de f.

2. Déterminer l'unique point (a,b) en lequel f est susceptible de présenter un extremum local.

3. Prouver que f atteint un minimum en (a,b).

4. Calculer, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $5\left(x - \frac{3}{5}y + \frac{1}{5}\right)^2 + \frac{1}{5}(y-2)^2$. En déduire que f admet un minimum global su $\mathbb{R}^2$. Quelle est la valeur de ce minimum ?

Exercice 15
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$.

1. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 de f.

2. Déterminer un équivalent de $f(x,x) - f(0,0)$ et de $f(x,0) - f(0,0)$ lorsque x tend vers 0. La fonction f présente-t-elle un extremum en $(0,0)$?

3. Rechercher les extrema de f sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 16. *INSEEC 2002*
On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}^3$ par :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ g(x,y,z) = 4x^2 + 4y^2 + 2z^2 + 4xz - 4yz$$

On définit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ par : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = g(x,y,y^2)$.
On dit alors qu'on étudie la fonction g **sous la contrainte** $z = y^2$.

1. Expliciter $f(x,y)$, et calculer $\partial_1(f)(x,y)$, $\partial_2(f)(x,y)$, $\partial^2_{1,1}(f)(x,y)$, $\partial^2_{1,2}(f)(x,y)$ et $\partial^2_{2,2}(f)(x,y)$.

2. Déterminer les extrema éventuels de f sur $\mathbb{R}^2$.

3. Montrer que, pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $g(x,y,z) = 4\left(x + \frac{1}{2}z\right)^2 + 4\left(y - \frac{1}{2}z\right)^2$. En déduire que f admet un minimum global en $(0,0)$.

4. Montrer que f présente un minimum local en $(-2,2)$.

5. Déterminer le développement limité d'ordre 2 de f en $\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$. En déduire le développement limité d'ordre 2 de $f\left(-\frac{1}{2} + h, 1 + h\right)$ et de $f\left(-\frac{1}{2} + h, 1 - h\right)$, lorsque h est au voisinage de 0. En déduire que f ne présente pas d'extremum local en $\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$.

Exercice 17. *ESCP 2002*
Soit a un paramètre réel et F_a la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ F_a(x,y) = \begin{pmatrix} x & y & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ a \end{pmatrix}$$

1. Déterminer, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, l'expression de $F_a(x,y)$ en fonction de x, y et a.

2. Vérifier que cette fonction est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et calculer ses dérivées partielles d'ordre 1 en tout point (x,y) de $\mathbb{R}^2$.

3. Montrer qu'il existe un unique point (x_0, y_0) de $\mathbb{R}^2$, que l'on précisera, en lequel les dérivées partielles d'ordre 1 de F_a sont nulles. Calculer $F_a(x_0, y_0)$.

4. Calculer, pour tout couple (x,y) de $\mathbb{R}^2$, le nombre :

$$G_a(x,y) = F_a(x,y) + \frac{1}{3}(3x - y - a)^2 + 2a^2,$$

et préciser son signe.

5. En déduire que la fonction F_a admet un unique extremum sur $\mathbb{R}^2$. Préciser s'il s'agit d'un minimum ou d'un maximum global et donner sa valeur notée $M(a)$.

6. Montrer que la fonction M qui, à tout réel a associe le nombre $M(a)$, admet un unique extremum que l'on précisera. Que peut-on en conclure ?

Exercice 18. *ESC 2005*
On considère la fonction f définie sur l'ouvert $U =]0,+\infty[\times]0,+\infty[$ par :

$$f(x,y) = x^2\ln(y) - y\ln(x)$$

1. On note g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $g(t) = 4t^2 - 2t\ln(t) - 1$.

a) Montrer que g est $\mathcal{C}^2$ sur son domaine et calculer $g'(t)$ et $g''(t)$ pour $t > 0$.

b) Étudier les variations de g' sur $]0,+\infty[$, puis celle de g sur $]0,+\infty[$.
(On précisera à chaque fois les limites aux bornes)

c) En déduire qu'il existe un unique élément strictment positif α tel que $g(\alpha) = 0$.

d) Vérifier que : $\ln(\alpha) = 2\alpha - \dfrac{1}{2\alpha}$

2. ***a)*** Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U.

b) Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de f.

c) En déduire que si (x_0,y_0) est un point critique de f , alors $x_0 > 1$ et $y_0 = \dfrac{(x_0)^2}{\ln(x_0)}$.

d) Établir alors que $g(\ln(x_0)) = 0$.
En déduire que f possède un unique point critique noté M , de coordonnées $\left(\mathrm{e}^{\alpha}, \dfrac{\mathrm{e}^{2\alpha}}{\alpha}\right)$ où α est le réel défini au ***1.c)***.

3. ***a)*** Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de f.

b) En utilisant la relation de la question ***1.d)***, montrer que $2\ln(y_0)+\dfrac{y_0}{(x_0)^2} = \dfrac{2}{\alpha}$.
En déduire que la fonction f ne présente pas d'extremum.