Exercice 1

1. Soit X une variable aléatoire dont la fonction de répartition F est définie par $F(x) = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}$. Montrer que X est une variable à densité et déterminer une densité de X.

2. Même question pour $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \left(1 + \dfrac{x}{2}\right)^2 \mathrm{e}^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$

3. Même question pour $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - (1-x)^{\alpha} & \text{si } x \in [0,1[\\ 1 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$

Exercice 2

Déterminer si les fonctions suivantes sont des densités de probabilité.
Si oui, déterminer la fonction de répartition de la v.a. associée à cette densité.

1. $g(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 4t\mathrm{e}^{-2t} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$

2. $f(t) = \dfrac{a\mathrm{e}^{-ax}}{(1+\mathrm{e}^{-ax})^2}$ avec $a \in \mathbb{R}_+^*$.

3. $u(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2x^2} & \text{si } x \leqslant -1 \text{ ou } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Exercice 3

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} ax(1-x) & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

a) Déterminer le réel a pour que f soit une densité de probabilité.

b) Calculer, si elles existent, l'espérance et la variance de la v.a. X dont une densité est la fonction f.

2. Mêmes questions avec $h(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 1 \\ \dfrac{a\ln(t)}{t^3} & \text{si } t \geqslant 1 \end{cases}$

Exercice 4

On considère une v.a. Y dont une densité f est définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\sqrt{1-x}} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Déterminer la fonction de répartition F de la v.a. Y. Construire sa représentation graphique.

2. Calculer les probabilités : $\mathbb{P}\left(\left[\dfrac{1}{2} < Y \leqslant \dfrac{3}{2}\right]\right)$ et $\mathbb{P}_{\left[X<\frac{1}{2}\right]}\left(\left[X < \dfrac{3}{4}\right]\right)$.

3. Calculer $\mathbb{E}(1-X)$ puis en déduire l'espérance de X.

4. Calculer de même le moment d'ordre 2 de X.

Exercice 5

On note X une v.a. dont une densité est la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x\mathrm{e}^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$ et dont la fonction de répartition est notée F.

1. Sans calcul, justifier que la fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que pour tout réel x, $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-x}(1+x) & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$.

3. On considère la v.a. $Z = \mathrm{e}^X$.

a) Déterminer la fonction de répartition notée G de la v.a. Z.

b) En déduire que Z est une v.a. à densité et déterminer une densité de Z.

4. On considère la v.a. $S = X^2$.

a) Déterminer la fonction de répartition notée H de la v.a. S.

b) En déduire que S est une v.a. à densité et déterminer une densité de S.

5. Retrouver les résultats des questions ***3.b)*** et ***4.b)***, cette fois sans utiliser les fonctions de répartition G et H.

Exercice 6

On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction f par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x\sqrt{2x}} & \text{si } x \geqslant 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

1. Montrer que $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}}\, dx$ converge et donner sa valeur.

2. Montrer que f est une fonction de densité.

3. Soit X une v.a. dont f est une densité.
Déterminer la fonction de répartition de X.

4. X admet-elle une espérance ?

On considère trois v.a. X_1, X_2, X_3 indépendantes et toutes de même loi que X.

5. On pose $U = \min(X_1, X_2, X_3)$ et on admet que U est une v.a.

a) Déterminer la fonction de répartition G de U.

b) Montrer que U est une v.a. à densité, et donner une densité de U.

c) Montrer que U admet une espérance et la calculer.

6. On pose $V = \max(X_1, X_2, X_3)$ et on admet que V est une v.a.

a) Déterminer la fonction de répartition H de V.

b) Montrer que V est une v.a. à densité et donner une densité de V.

c) La v.a. V admet-elle une espérance ?

Exercice 7

Soit X une v.a. dont une densité f est définie par

$$f(x) = \begin{cases} e^{-|x|} & \text{si } -\ln 2 \leqslant x \leqslant \ln 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Déterminer la fonction de répartition F de X.

2. On pose $Y = |X|$

a) Déterminer la fonction de répartition F_Y de Y.

b) Montrer que Y est une v.a. à densité et donner une densité de Y.

3. On pose $Z = e^X$ et on note F_Z la fonction de répartition de Z.

a) Exprimer F_Z à l'aide de F_X.

b) Montrer sans expliciter F_Z que Z est une v.a. à densité puis montrer qu'une densité de Z est donnée par $\begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 1/2 \\ 1 & \text{si } x \in]1/2, 1] \\ \dfrac{1}{x^2} & \text{si } x \in]1, 2] \\ 0 & \text{si } x > 2 \end{cases}$.

Exercice 8

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ ate^{-2t} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$

1. Rappeler l'espérance d'une v.a. suivant la loi exponentielle de paramètre 2.

2. Déterminer le réel a pour que f soit une densité de probabilité.

3. Soit X une v.a. admettant pour densité la fonction f.
Montrer que X admet une espérance et la calculer.

Exercice 9

Soient $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1])$ et $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. On considère les v.a. : $V = -\dfrac{1}{\lambda} \ln(1 - U)$.

1. Déterminer la loi de V, son espérance et sa variance.

2. Déterminer une densité de $W = V^2$ et de $Z = \dfrac{1}{V}$.

Exercice 10

Trois personnes, notées A, B et C entrent simultanément dans une agence bancaire disposant de deux guichets. Les clients A et B occupent simultanément à l'instant 0 les deux guichets tandis que C attend que l'un des deux guichets se libère pour se faire servir.
On suppose que les durées de passage au guichet des trois personnes A, B et C sont mesurées en heures et on suppose que ce sont des v.a. indépendantes, notées respectivement X, Y et Z et suivant toutes la loi uniforme sur $[0, 1[$.
On suppose également que la durée du changement de personne à un guichet est négligeable.
On pose $U = \min(X, Y)$ et on admet que U est une v.a.
On note T le temps total passé par C dans l'agence bancaire.

1. Montrer que la fonction de répartition F_U de U est définie par :

$$F_U(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2x - x^2 & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

2. En déduire que U est une v.a. à densité et donner une densité de U.

3. Déterminer l'espérance de U.

4. Exprimer T en fonction de certaines variables précédentes puis en déduire $\mathbb{E}(T)$.

Exercice 11

On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de v.a. indépendantes suivant toutes la loi exponentielle de paramètre 1 et on définit la v.a. $T_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$.
On note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \begin{cases} n\mathrm{e}^{-x}(1-\mathrm{e}^{-x})^{n-1} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

1. Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, la probabilité $\mathbb{P}([T_n \leqslant x])$.

2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, T_n est une v.a. à densité admettant f_n pour densité.

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, T_n admet une espérance.

4. Déterminer $\mathbb{E}(T_1)$ et $\mathbb{E}(T_2)$.

Exercice 12

1. Soit $X_1, X_2, \ldots, X_n$ des v.a. indépendantes suivant toutes la loi normale centrée réduite. On note $S_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$.

   a) Déterminer la loi de la v.a. S_n.

   b) Déterminer la loi de la v.a. $Z_n = \sqrt{n}S_n$.

2. Répondre aux questions précédentes en supposant que les X_i suivent toute la loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$.

Exercice 13

Pour tout réel x, on note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière de x, *i.e.* l'unique entier vérifiant : $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$.
Soit X la v.a. suivant la loi exponentielle de paramètre λ ($\lambda > 0$).
On pose $Y = \lfloor X \rfloor$, Y est donc la partie entière de X et on a :

$$\forall k \in \mathbb{Z},\ [Y = k] = [k \leqslant X < k + 1]$$

1. ***a)*** Montrer que Y prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$.

   b) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, calculer $\mathbb{P}([Y = k - 1])$.

   c) En déduire que la v.a. $Y + 1$ suit une loi géométrique dont on donnera le paramètre.

   d) Donner l'espérance et la variance de $Y + 1$. En déduire l'espérance et la variance de Y.

2. On pose $Z = X - Y$.

   a) Déterminer $Z(\Omega)$.

   b) Montrer que : $[Z \leqslant x] \cap [Y = k] = [k \leqslant X \leqslant k + x]$.

c) En déduire que :

$$\forall x \in [0,1[,\ \mathbb{P}([Z \leqslant x]) = \frac{1-\mathrm{e}^{-\lambda x}}{1-\mathrm{e}^{-\lambda}}$$

d) En déduire une densité f de Z.

e) Déterminer l'espérance $\mathbb{E}(Z)$ de Z.

Exercice 14

Soit X une v.a. suivant la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$.

1. Déterminer la loi de la v.a. $Y = \sqrt{X}$.

2. Montrer que Y admet une espérance et que $\mathbb{E}(Y) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\lambda}}$.

On utilisera le changement de variable $x = \sqrt{2\lambda}\, t$.

3. En déduire la variance de Y sans calcul supplémentaire.

Exercice 15

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall y \in \mathbb{R},\ F(y) = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-y}}$.

On admet que F est la fonction de répartition d'une v.a. réelle. On dit alors que cette v.a. suit la *loi logistique*. On considère Z une v.a. suivant la loi logistique.

1. Déterminer une densité de probabilité de Z, notée f.

2. Étudier la parité de f puis en déduire que Z admet une espérance et la déterminer.

3. Soit U une v.a. de lui uniforme sur $]0,1[$.
Déterminer la loi de la v.a. $\ln\left(\dfrac{U}{1-U}\right)$.

Exercice 16

1. Soit X une v.a. admettant pour fonction de répartition $F : x \mapsto \exp(-\mathrm{e}^{-x})$. On dit alors que cette v.a. suit la *loi de Gumbel*.

a) Vérifier que la v.a. X est une v.a. à densité puis déterminer une densité de probabilité de X.

b) On pose $Y = \mathrm{e}^{-X}$. Déterminer la loi de la v.a. Y.

2. On considère une v.a. Z admettant une densité strictement positive sur $\mathbb{R}$ et dont la fonction de répartition F vérifie que pour tout $n \geqslant 1$, il existe $b_n \leqslant 0$ tel que pour tout x réel, $(F(x))^n = F(x+b_n)$.

a) Montrer que F réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0,1[$.

b) Montrer que la suite $(b_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante.

c) Montrer que la loi de Gumbel satisfait aux conditions précédentes.

Exercice 17

Soient $(a,b) \in \mathbb{R}_+^*$. Soit X une v.a. suivant la loi de Pareto de paramètres a et b, c'est-à-dire admettant pour densité la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < b \\ a\dfrac{b^a}{t^{a+1}} & \text{si } t \geqslant b \end{cases}$$

1. Vérifier que la fonction f définit bien une densité de probabilité.

2. Calculer l'espérance et la variance de X, en précisant à quelles conditions chacune de ces quantités existent.

3. Déterminer la fonction de répartition de X.

4. On appelle fonction de survie la fonction $S : x \mapsto \mathbb{P}([X > x])$. Préciser S.

5. Calculer, pour tout réel y positif ou nul, la probabilité conditionnelle

$$\mathbb{P}_{[X>x]}([X > x+y])$$

puis vérifier que cette quantité tend vers 1 quand x tend vers $+\infty$.

6. On pose dans cette question : $Y = \ln\left(\dfrac{X}{b}\right)$.
Démontrer que Y est une v.a. à densité puis montrer qu'elle suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.

Exercice 18

On admet le résultat suivant :

Soient X et Y deux v.a. à densité indépendantes, de densité respectives f_X et f_Y. Alors la v.a. $X+Y$ est une v.a. à densité et une densité de $X+Y$ est donnée par la fonction h définie par la relation

$$h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) f_Y(x-t) dt$$

1. Soient X_1, X_2 deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi exponentielle de paramètre 1.
Montrer que $X_1 + X_2$ admet pour densité :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_{X_1+X_2}(x) = \begin{cases} x\mathrm{e}^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2. Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de v.a. indépendantes, de même de loi exponentielle de paramètre λ.
Montrer que $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ admet pour densité :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_{S_n}(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^n}{(n-1)!}\mathrm{e}^{-\lambda t} t^{n-1} & \text{si } t \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$