Exercice 1. *Symbole $\sum$ (1)*
Écrire sans le symbole $\sum$ les expressions suivantes

a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{5} k^2$ ***b)*** $\displaystyle\sum_{j=3}^{8} \frac{j^2}{3^j}$ ***c)*** $\displaystyle\sum_{n=1}^{5} (-1)^{n^2} \frac{x^{2n+4}}{n}$

Exercice 2. *Symbole $\sum$ (2)*
Écrire avec le symbole $\sum$ les expressions suivantes

a) $2^5 + 3^5 + 4^5 + \ldots + n^5$

b) $1 - a + a^2 - a^3 + \ldots + (-1)^n a^n$

c) $\dfrac{1}{1} + \dfrac{2}{2} + \dfrac{2^2}{3} + \dfrac{2^3}{4} + \ldots + \dfrac{2^{2015}}{2016}$

d) $\ln(1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n)$

Exercice 3. *Calcul de sommes*
Calculer les sommes suivantes :

1. $A_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} (3k^2 + 2k + 1)$

2. $B = \displaystyle\sum_{p=358}^{2016} 3$

3. $C_k = \displaystyle\sum_{n=1}^{k} n(2k-1)(n+1)$

4. $D_n = 1 - 3 + 3^2 - 3^3 + \ldots + (-1)^n 3^n$

5. $E_n = (0,4)^2 + (0,4)^3 + \ldots + (0,4)^n$

6. $F_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \frac{3}{5^i}$

7. $G_n = \displaystyle\sum_{\ell=2}^{n} \left(\frac{1}{3}\right)^{\ell}$

8. $H_N = \displaystyle\sum_{i=0}^{N+1} 3^{2i+1}$

9. $I_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k}$

Exercice 4. *Télescopage*
Soit $(a_k)_{k=0..n}$ une famille de réels. Justifier l'égalité suivante

$$\sum_{k=0}^{n-1} k(a_k - a_{k+1}) = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) - n a_n$$

Exercice 5. *Produits*
Calculer les produits suivants :

$$P_n = \prod_{p=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) \qquad Q_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + x^{2^k}\right) \qquad R_n = \prod_{k=1}^{n} 4^{k^2+1}$$

Exercice 6. *Sommes doubles*
Calculer les sommes doubles suivantes :

1. $a_n = \displaystyle\sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}^{\min} (i,j)$

2. $b_n = \displaystyle\sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}^{\max} (i,j)$

3. $c_n = \displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}^{i} j$

4. $d_n = \displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}^{(} i + j)$

Exercice 7. *Quelques classiques de la récurrence*
Montrer par récurrence

1. $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (2k+1) = n^2$

2. $\forall n \in \mathbb{N} \quad \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} k \times 2^{k-1} = n \times 2^{n+1} + 1$

3. Pour $a \in \mathbb{R}_+$ et $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$(1+a)^n \geqslant 1 + an$$

4. $\forall n \geqslant 3, \quad n! \geqslant 2 \times 3^{n-2}$

5. $(*)$ $\forall n \geqslant 5, \quad \dfrac{3^n}{n!} \leqslant \dfrac{1}{2^{n-7}}$

Exercice 8. *Quelques suites*

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k \end{cases}$

Vérifier par récurrence forte que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 2^{n-1}$.

2. Soit u une suite telle que $\forall n \geqslant 0$, $u_{n+1} \leqslant a\ u_n$ où a est un réel positif.
Montrer par récurrence que $\forall n \geqslant 0$, $u_n \leqslant a^n\ u_0$.

Exercice 9. *Nombres de Fermat*
Pour tout n, on pose $F_n = 2^{2^n} + 1$ le n-ième nombre de Fermat. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \prod_{k=0}^{n} F_k = F_{n+1} - 2$$

(Indice : Vérifier que $F_{n+1}^2 = F_{n+2} + 2F_{n+1} - 2$*)*

Exercice 10. *Suite de Fibonacci*
Pour tout n, la suite de Fibonacci $(F_n)_{n \geqslant 0}$ est définie par

$$\begin{cases} F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \\ \forall n \geqslant 0,\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \end{cases}$$

On pose également $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\psi = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

1. Montrer que φ et ψ sont racines d'un trinôme du second degré à coefficients entiers que l'on déterminera.

2. Montrer que pour tout $n \geqslant 0$, $F_n = \dfrac{\varphi^n - \psi^n}{\sqrt{5}}$.

Exercice 11. *Initialisation*

1. Montrer que la proposition $\left(\forall n \in \mathbb{N}, 2^n \geqslant n^2\right)$ est fausse.

2. Montrer en revanche que la proposition $\left(\forall n \geqslant 4, 2^n \geqslant n^2\right)$ est vraie.

Exercice 12. *Pair et impair*
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie comme suit

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n - 1} \end{cases}$$

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{2n} = \dfrac{1}{2}$ et $u_{2n+1} = -1$.

Exercice 13. *Suite de fonctions*
Considérons la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur $\mathbb{R}$ de la manière suivante :
$\forall x \in \mathbb{R}$, $f_0(x) = 1$, $f_1(x) = x$ et pour tout entier naturel n,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{n+2}(x) = 2x f_{n+1}(x) - f_n(x)\,.$$

1. Montrer par récurrence double que $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n(-x) = (-1)^n f_n(x)$.

2. En déduire que pour tout n, la fonction f_n a même parité que n.