Exercice 1. *Cours Somme*
Justifier les égalités suivantes du cours, avec $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,

1. $A + B = B + A$
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$
3. $A + (-A) = 0$
4. $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$
5. $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$

Exercice 2. *Cours Somme*
Soient $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $3(A - 2B) + 2(3B + C) - (2A + C)$.
2. Résoudre $A + 3X = B$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$.

Exercice 3. *Cours Produit*

1. Soit $L = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}$. Calculer si possible LC et CL.
2. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. Calculer si possible ${}^tXY$ et X^tY.
3. À quelles conditions sur $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{m,q}(\mathbb{R})$ les produits AB et BA existent-ils ? Préciser dans ce cas les dimensions des matrices AB et BA.

Exercice 4. *Cours Transposée*

1. Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que A est symétrique si et seulement si pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$, $a_{i,j} = a_{j,i}$.
2. Que peut-on dire des coefficients diagonaux d'une matrice A vérifiant ${}^tA = -A$?

Exercice 5. *Écriture matricielle*
Expliciter les matrices suivantes :

$$A = \big((-1)^{i+j}\big)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant 3 \\ 1 \leqslant j \leqslant 3}} \qquad B = (i + j)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant 2 \\ 1 \leqslant j \leqslant 3}} \qquad C = (ij)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant 4 \\ 1 \leqslant j \leqslant 3}}$$

Trouver une écriture compacte pour la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 \\ -1 & -3 & -5 & -7 & -9 & -11 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 \end{pmatrix}$

Exercice 6. *Gammes sur les produits 1*
Calculer les produits suivants

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$
2. $B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$
3. $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$
4. $D = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$
5. $E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
6. $F = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & 5 \end{pmatrix}$

Exercice 7. *Gammes sur les produits 2*
Soient les quatre matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculer tous les produits possibles.

Exercice 8. *Puissance d'une matrice*

Soit A la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$, et $B = A - 2I$.

1. Calculer B^2 puis B^3. En déduire l'expression de B^k en fonction de k.

2. En remarquant que $A = B + 2I$, calculer A^n.

Exercice 9

On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad P = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad Q = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer P^2, Q^2, PQ, QP. Déterminer deux réels a et b tels que $A = aP + bQ$.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = a^n P + b^n Q$.

Exercice 10. *Newton et Puissance*

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} q & 0 & 1 \\ 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & q \end{pmatrix}$, où $q \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer une matrice M telle que $A = qI + M$.

2. Calculer M^2 puis en déduire A^n.

Exercice 11. *Récurrence sur la puissance - Suites*

On considère la matrice A définie par $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & 6 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer qu'il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait :

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2a_n & 1 - 2a_n & 2a_n \\ a_n & -a_n & 1 + a_n \end{pmatrix}$$

2. Montrer que la suite (a_n) est arithmético-géométrique. En déduire a_n en fonction de n, puis A^n en fonction de n.

Exercice 12. *Résolution de suites par une matrice*

On considère les matrices $I = I_3$ et $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer J^2 et J^3. En déduire l'expression de J^k pour $k \geqslant 3$.

2. On pose $T = 2I + J$. Donner l'expression de T^n pour tout entier $n \geqslant 2$.

3. Vérifier que l'expression est valable pour $n = 0$ et $n = 1$.

4. Soient (a_n), (b_n) et (c_n) trois suites définies par

$$\forall n \geqslant 0, \begin{cases} a_{n+1} = 2a_n \\ b_{n+1} = 2a_n + 2b_n \\ c_{n+1} = b_n + 2c_n \end{cases}$$

En utilisant T^n, déterminer les expressions de a_n, b_n et c_n en fonction de a_0, b_0,c_0 et n.

Exercice 13. *Cours Inversible*

1. Montrer que si A est inversible, ${}^tA$ est inversible et calculer $({}^tA)^{-1}$.

2. Montrer que si A est inversible et $\lambda \in \mathbb{R}^*$, λA est inversible et calculer $(\lambda A)^{-1}$.

3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 - 3A - 2I_n = 0$. Montrer que A est inversible et calculer A^{-1}.

Exercice 14. *Inversion de matrices*

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Montrer que $A^3 - A^2 - A + I = 0$. En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}. Montrer ensuite que A^2 est inversible et calculer $(A^2)^{-1}$.

2. Soit $C = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer C^3, en déduire que C n'est pas inversible.

Exercice 15. *Puissance et inverse*

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on définit la matrice $M_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -t \\ t & 1 & -t^2/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. Soient $s, t \in \mathbb{R}$. Calculer le produit $M_s M_t$. Calculer ensuite $(M_t)^n$.

2. Soit $t \in \mathbb{R}$. Montrer que M_t est inversible et calculer $(M_t)^{-1}$.

Exercice 16. *Critère d'inversibilité en taille 2*

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. On pose $B = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

1. Calculer AB et BA.

2. On pose $\delta = ad - bc$. Supposons que $\delta \neq 0$.
Montrer alors que A est inversible et donner son inverse.

3. Supposons désormais que $\delta = 0$. Dans ce cas, A est-elle inversible ? (par l'absurde)

4. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ soit inversible.

Exercice 17. *Puissance par diagonalisation*

Soient $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer PQ et montrer que P est inversible. Déterminer P^{-1}.

2. Calculer $D = P^{-1}AP$.

3. Exprimer A en fonction de D, P et P^{-1}.

4. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.

5. Calculer A^n.