

Exercice 1. Proposition contraire

Donner les propositions contraires aux propositions suivantes :

- $\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{Z}, n \leq x < n + 1$
- Toute suite convergente est bornée.
- Tous les garçons de la classe ont une mère qui a au moins un frère.
- $\forall (a, b) \in A^2, ab = 0 \Rightarrow (a = 0 \text{ ou } b = 0)$.
- $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_{n+1}$.

Exercice 2. Quantifier

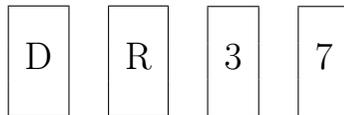
Écrire avec des quantificateurs les propositions suivantes :

- La fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est constante.
- La fonction f est l'identité sur \mathbb{R} .
- n est un nombre impair.
- f est positive sur \mathbb{R}_+ .
- f s'annule sur $[0, 1]$.
- f est nulle sur \mathbb{R} .
- f est de signe constant sur \mathbb{R} .
- La suite (u_n) est décroissante.

Exercice 3. Des cartes

On dispose de quatre cartes, chacune comportant un chiffre sur un côté et une lettre sur l'autre.

On place les quatre cartes ainsi sur la table :



La règle est : « Si une carte a un D sur l'un des côtés, alors il y a un 3 de l'autre côté. »

Quelles cartes devez-vous retourner afin de vérifier que la règle est bien respectée ?

Exercice 4. Irrationalité de $\sqrt{2}$

Supposons qu'il existe p et q deux entiers avec $q \geq 1$ tels que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ de façon irréductible.

- Montrer que p^2 est pair, puis que p est pair.
- En déduire que q est pair.
- Conclure.

Exercice 5. Raisonnement par l'absurde

Soient a, b, c, d des nombres rationnels tels que $a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{2}$.

En utilisant un raisonnement par l'absurde ainsi que le résultat de l'exercice précédent, montrer que $a = c$ et $b = d$.

Exercice 6. Implications et équivalence

Compléter par \Rightarrow , \Leftarrow ou \Leftrightarrow .

- | | |
|--|---|
| 1. $x^2 = 9 \quad \dots \quad x = 3$ | 4. \sqrt{x} existe $\quad \dots \quad x \geq 0$ |
| 2. $\ln x = -3 \quad \dots \quad x = e^{-3}$ | 5. $ x \leq 3 \quad \dots \quad 0 \leq x \leq 3$ |
| 3. $x \geq x^2 \quad \dots \quad x \geq 0$ | 6. $ x \geq 5 \quad \dots \quad 5 \leq x$ |

Exercice 7. Équations

Résoudre les équations suivantes :

- | | |
|---|--|
| 1. $\sqrt{x} + 1 = 2x$ | 4. $(\ln x)^2 = -2 - 3 \ln x$ |
| 2. $e^x + e^{-x} = 2$ | 5. $ x + 1 + 2x + 1 = 0$ |
| 3. $\frac{x^3 + 2x^2 - x + 1}{x - 1} = 2 - x + x^2$ | 6. (*) $(m-2)x^2 + 2(m+1)x + m - 14 = 0$
avec m paramètre réel. |

Exercice 8. Inéquations

Résoudre les inéquations suivantes :

1 $|4 - 2x| \leq 8$

3 $5 \left(\frac{1}{3}\right)^x \leq 10^{-10}$

2 $\frac{x}{x+1} + \frac{1}{x(x-1)} \leq 1$

4 $\ln(3x+1) \leq \ln(2x-1)$

5 $\sqrt{x+5} \geq \sqrt{x^2-4}$

Exercice 9. Simplification

Simplifier les expressions suivantes :

1. $|\ln(e^2 + 1)|$

8. $|\ln 6 - 2 \ln 4 - \ln 9|$

2. $8^{n+1} - 4^n \times 2^{n+2}$

9. $\frac{(-4)^3 \times 15^2}{6^3 \times 10^3 \times (-2)^{(-2)}}$

3. $(x^2 - x - 2)^2 - (2x^2 + x - 1)^2$

4. $\sqrt{4x^2 - 4x + 1}$

5. $\frac{1 + \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}$

10. $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \dots$

6. $\left(\sqrt{2 - \sqrt{3}} - \sqrt{2 + \sqrt{3}}\right)^2$

$\frac{a}{\frac{b}{c}}$

7. $\frac{(-1)^n - (-1)^{n-1}}{(-1)^{2n} - (-1)^{2n+1}}$

11. $\frac{\frac{c}{d}}{d} = \dots$

Exercice 10. Identification des coefficientsDans les deux cas suivants, déterminer les réels a, b et c tels que

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad a(x-1)(x-2) + bx(x-2) + cx(x-1) = (x+1)^2$

2. $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, -1, 0\}, \quad \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x+2} = \frac{1}{x(x+1)(x+2)}$

Exercice 11. Inégalités par étude de fonction

Justifier les deux inégalités suivantes :

a) $\forall x \geq 1, \quad \ln x \leq x - 1$ b) $\forall x \geq 0, \quad e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2}$

Exercice 12. Dérivées

Donner le domaine de définition des fonctions suivantes et donner l'expression de la dérivée. On supposera que les fonctions sont bien dérivables sur leur domaine de définition.

1. $a(x) = 7x^5 - 4x^3 + 5x^2 + x - \pi$

5. $e(x) = \frac{3x-1}{-2x^2+x-2}$

2. $b(x) = \exp\left(x + \frac{1}{x}\right)$

6. $f(x) = \sqrt{x}x^2 + 5$

3. $c(x) = x^{\sqrt{x}}$

7. $g(x) = e^{2\ln(x)}$

4. $d(x) = \ln(3+x) - \ln(4-2x) - \ln(2)$ 8. $h(x) = \ln(1 + e^{-x})$

Exercice 13. Images et antécédentsSoit f la fonction définie par $f : x \mapsto 2x^3 \ln(x)$.1. Quel est le domaine de définition de f ?2. Quelles sont les images par f de

$e, e^{-1}, e^2, e\sqrt{e}, \frac{1}{\sqrt{e}}$?

3. 0 possède-t-il des antécédents par f ?**Exercice 14. Parité**

Quelle est la parité des deux fonctions suivantes ?

1. $a(x) = \ln\left(\left|\frac{x+1}{x-1}\right|\right)$

2. $b(x) = \left(\frac{1}{x^2+1}\right)^2 \times \frac{x^3}{\sqrt{3x^2+5}}$

Exercice 15. *Période et partie entière*

1. Montrer que la fonction $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$ est 1-périodique.
La représenter graphiquement.
2. Étudier la fonction $g(x) = \lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor$.
3. Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{\lfloor x \rfloor}{x}$ est majorée sur $]0, +\infty[$. Est-ce vrai sur \mathbb{R}^* ?

Exercice 16. *Symétrie*

1. Montrer que la fonction $f : x \mapsto -x + \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right|$ admet une représentation graphique symétrique par rapport à l'origine.
2. Montrer que la fonction $g : x \mapsto \frac{x^4 - x^2 - 2}{x^8 - x^6 + 1}$ admet une courbe représentative symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Exercice 17. *d'après ESCP*

Soit f la fonction définie pour tout $x > 0$ par $f(x) = x - \ln(x)$.

1. Déterminer l'expression $f'(x)$ pour tout x strictement positif.
2. Donner le tableau de variation de la fonction f .
3. Donner l'expression de la tangente en $x = 1$ à la courbe représentative de f .
4. En déduire que $\forall x > 0, f(x) > 0$.
5. Déterminer l'expression $f''(x)$ pour tout x strictement positif.
6. En déduire les variations de f' .
7. Établir pour tout x dans $[1, 2]$ les inégalités suivantes, $0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{2}$.