Exercice 1. *Primitives - Gammes*
Pour chaque fonction, donner une primitive et indiquer un intervalle sur lequel votre réponse est valide :

1. $f_1(x) = \dfrac{x-3}{2}$
2. $f_2(x) = 3x^2 + 2x + 1$
3. $f_3(x) = -x^2 + 1$
4. $f_4(x) = -\dfrac{1}{x}$
5. $f_5(x) = \mathrm{e}^x$
6. $f_6(x) = x - \dfrac{1}{x^2}$
7. $f_7(x) = x^7$
8. $f_8(x) = \dfrac{1}{x^3}$
9. $f_9(x) = \dfrac{x^4+1}{x^2}$
10. $f_{10}(x) = 5x^2 + x + \dfrac{2}{x}$
11. $f_{11}(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x + 4}{3}$
12. $f_{12}(x) = 2(2x+1)^3$
13. $f_{13}(x) = (3x+1)^{-5}$
14. $f_{14}(x) = (-2x+1)^5$
15. $f_{15}(x) = \dfrac{2x+1}{(x^2+x+1)^4}$
16. $f_{16}(x) = \dfrac{1}{x}(\ln x)^2$
17. $f_{17}(x) = -3\sqrt{x}\, x^2$
18. $f_{18}(x) = \dfrac{2\sqrt{x}}{5x^3}$
19. $f_{19}(x) = \sqrt[3]{x^4}$
20. $f_{20}(x) = \mathrm{e}^{2x}$
21. $f_{21}(x) = \dfrac{3x^2}{2\sqrt{x^3+1}}$
22. $f_{22}(x) = 2^x$
23. $f_{23}(x) = \mathrm{e}^{-x/2}$

Exercice 2. *Intégrales - Gammes* Calculer les intégrales suivantes :

1. $A = \displaystyle\int_1^2 \frac{\ln x}{x}\, dx$
2. $B = \displaystyle\int_0^4 \sqrt{u}(u - 2\sqrt{u})\, du$
3. $C = \displaystyle\int_1^4 (2z-1)\mathrm{e}^{z^2-z}\, dz$
4. $D = \displaystyle\int_0^2 3x^4 + 5x + \mathrm{e}^{3x}\, dx$
5. $E = \displaystyle\int_1^0 (x^2+1)\mathrm{e}^{x^3+3x}\, dx$
6. $\forall n \in \mathbb{N},\ F_n = \displaystyle\int_0^n t^n\, dt$
7. $G = \displaystyle\int_0^1 \frac{5x}{1+x^2}\, dx$
8. $H = \displaystyle\int_0^1 \frac{5x}{(1+x^2)^2}\, dx$
9. $\forall n \geqslant 2,\ I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{5t}{(1+t^2)^n}\, dt$
10. $J = \displaystyle\int_1^2 3^u\, du$
11. $K = \displaystyle\int_0^1 (2x-1)\exp(x^2-x+1)\, dx$
12. $L = \displaystyle\int_1^4 \frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx$

Exercice 3. *IPP - Gammes* Calculer les intégrales suivantes par intégrations par parties :

$A = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \ln(x)\, dx$

$B = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} x\ln(x)\, dx$

$C = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} x^2\ln(x)\, dx$

$D = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} t^2(\ln t)^3\, dt$**(*)**

$E = \displaystyle\int_2^5 \sqrt{3s}\ln s\, ds$

$F = \displaystyle\int_0^{-1} (2x^2+1)\mathrm{e}^{5x}\, dx$ **(*)**

$G = \displaystyle\int_0^1 (1+x)\ln(1+x)\, dx$

Pour **(*)**, plusieurs IPP sont nécessaires.
(Pour G, après l'IPP, on pourra utiliser l'égalité $x^2 + 2x = (x^2+2x+1) - 1$)

Exercice 4. *Changement de variable - Gammes*
Calculer les intégrales suivantes à l'aide du changement de variables indiqué :

$A = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{2x+1}\, dx \qquad (u = 2x+1)$

$B = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{5}} \frac{1}{1-4x}\, dx \qquad (u = 1-4x)$

$C = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(2x+1)^2}\, dx \qquad (u = 2x+1)$

$D = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{5}} \frac{\mathrm{d}x}{(1-4x)^2} \qquad (u = 1-4x)$

$E = \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\, dx \qquad (u = x^2+1)$

$F = \displaystyle\int_0^1 x\sqrt{3x+1}\, dx \qquad (u = 3x+1)$

$G = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln(t)}{t}\, dt \qquad (x = \ln(t))$

$H = \displaystyle\int_1^2 3y\sqrt{5-2y}\, dy \qquad (x = 5-2y)$

$I = \displaystyle\int_0^3 \frac{x}{1+\sqrt{x+1}}\, dx \qquad (t = \sqrt{x+1})$

Plus dur :

$$G = \int_0^1 \frac{1}{e^x+1}\,dx \qquad (u = e^x)$$

(penser à découper $\dfrac{1}{u(u+1)}$ *en une somme)*

$$H = \int_0^1 \frac{(t^2+\sqrt{t^2+1})^2}{\sqrt{t^2+1}} t\,dt \qquad (u = \sqrt{t^2+1})$$

Exercice 5. *Décomposition en éléments simples - Gammes*
Calculer les intégrales suivantes :
Pour cela, on cherchera à chaque fois des réels a, b, c tels que la fraction proposée du type $\dfrac{1}{uv}$ (ou $\dfrac{1}{uvw}$) s'écrive comme une somme de fractions plus simples $\dfrac{a}{u} + \dfrac{b}{v}$ $(+\dfrac{c}{w})$.

$$G = \int_2^1 \frac{1}{x(x+1)}\,dx \qquad H = \int_0^1 \frac{1}{(x+1)(x+3)}\,dx$$

$$I = \int_1^2 \frac{1}{x(x+1)(x+2)}\,dx$$

Exercice 6. *Découper et/ou changer de variable*

1. Soit f la fonction définie sur $[0,2]$ par $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0,1] \\ x^2 & \text{si } x \in [1,2] \end{cases}$. Calculer $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx$.

2. Soit $a > 0$.
Montrer que : $\displaystyle\int_{\frac{1}{a}}^a \frac{\ln(x)}{1+x^2}\,dx = 0$ grâce au changement de variable $x = \dfrac{1}{t}$.

3. Soit $g : [-1,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et impaire.
Démontrer que : $\displaystyle\int_{-1}^1 g(x)\,dx = 0$
(Indication : poser $t = -x$)

Exercice 7. *Fonctions définies par une intégrale - Gammes*
Pour chacune des fonctions suivantes, donner le domaine de définition, justifier que la fonction est $\mathcal{C}^1$ sur son domaine de définition et expliciter sa dérivée.

$$a : x \mapsto \int_1^x \ln(t)\,dt \qquad d : x \mapsto \int_x^1 \frac{t}{\sqrt{t^3+1}}\,dt$$

$$b : x \mapsto \int_{-2}^x \frac{1}{1-t^2}\,dt \qquad e : x \mapsto \int_{\frac{1}{2}}^x \frac{1}{t^2-t}\,dt$$

$$c : x \mapsto \int_{-3}^x \sqrt{t^4-1}\,dt$$

Exercice 8. *Dériver des intégrales - Gammes*
Dériver les fonctions suivantes :

$$a(x) = \int_0^x \sqrt{t^2+1}\,dt \qquad d(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{1+t+t^2}\,dt$$

$$b(x) = \int_x^0 e^{-t^2}\,dt \qquad e(x) = \int_{-x}^{e^x} \sqrt{1+e^{-t}}\,dt$$

$$c(x) = \int_0^{2x} \frac{1}{1+t^2}\,dt$$

Exercice 9. *Suites définies par une intégrale*
Etudier la monotonie des suites suivantes, (ici, $n \in \mathbb{N}^*$) :

$$a_n = \int_0^n \exp(-t^2)\,dt \qquad c_n = \int_2^0 y\exp(ny)\,dy$$

$$b_n = \int_1^n \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\,dx \qquad d_n = \int_{-1}^0 z\exp(n^2 z)\,dz$$

Exercice 10. *IPP et suite*

Pour tout $(m,n) \in \mathbb{N}^2$, on pose : $I_{m,n} = \displaystyle\int_0^1 x^m(1-x)^n \, dx$

1. Calculer $I_{m,0}$.
2. Établir une relation entre $I_{m,n+1}$ et $I_{m+1,n}$;
3. En déduire une expression simple de $I_{m,n}$.

Exercice 11. *Fonction définie par une intégrale*

On considère la fonction numérique Φ définie par : $\Phi(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{4+t^4}} \, dt$

1. Calculer $\mathcal{D}_\Phi$ et montrer que Φ est une fonction impaire (utiliser le changement de variables $u = -t$).
2. Établir, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$: $\dfrac{x}{\sqrt{4+16x^4}} \leqslant \Phi(x) \leqslant \dfrac{x}{\sqrt{4+x^4}}$.
   En déduire la limite de $\Phi(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
3. Justifier la dérivabilité de Φ sur $\mathbb{R}$ et calculer $\Phi'(x)$.

Exercice 12. *Une série exponentielle*

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^1 (1-t)^n \mathrm{e}^t \, dt$

1. Calculer I_0 et I_1.
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{\mathrm{e}}{n!}$.
   En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.
3. Par une intégration par parties, montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad I_n = I_{n-1} - \dfrac{1}{n!}$
4. Montrer que : $\forall n \geqslant 0$, $I_n = \mathrm{e} - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.
   En déduire la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$

Exercice 13. *Un aperçu d'Arctangente*

On considère la fonction : $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^2} \, dt$.

1. Donner le domaine de définition de F, noté $\mathcal{D}_F$.
   Justifier que F est dérivable sur $\mathcal{D}_F$, et calculer sa dérivée.
2. Monter que F est impaire.
3. Déterminer la monotonie de F.
4. Montrer que $\forall x \geqslant 1$, $\displaystyle\int_1^x \frac{1}{1+t^2} \, dt \leqslant 1$.
   (comparer $(1+t^2)$ par rapport à t^2)
5. En déduire que la fonction F admet une limite en $+\infty$.
   On note $L = \lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$.
6. On pose $G(x) = F(x) + F\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
   a) Justifier que G est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer G'. Que dire de G ?
   b) En faisant tendre x vers $+\infty$, montrer que $L = 2F(1)$.

Exercice 14. *Suites et intégrales convergentes*

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $I_n = \lim\limits_{a\to+\infty} \displaystyle\int_0^a x^n \mathrm{e}^{-x} \, dx$.

1. Calculer I_0, I_1, I_2, I_3.
2. Énoncer une conjecture pour I_n et démontrez-la.

Exercice 15. *Appelez Riemann !*

Étudier la convergence des suites définies par :

$$u_n = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \exp\left(\frac{i}{n}\right) \qquad v_n = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{\frac{i}{n^3}} \qquad s_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k}$$

$$t_n = \sqrt[n]{\prod_{k=0}^{n-1}\left(1+\frac{k}{n}\right)}$$

(on pourra étudier $w_n = \ln(t_n)$)
(on pourra poser $u = 1+t$)

Exercice 16. *Segments $k-1, k, k+1$*

Soit $n \geqslant 2$. On pose $u_n = \dfrac{\ln(n!)}{\ln(n^n)}$.

1. Encadrer $\ln(k)$ par des intégrales avec $k \geqslant 2$.

2. En déduire un encadrement de u_n.
(on fera apparaître $\displaystyle\int_1^n \ln(t)\, dt$)
Que vaut $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n$?

Exercice 17. *Un encadrement*

Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n e^{-x}\, dx$.

Montrer que pour tout n, on a $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$. En déduire la limite de I_n.

Exercice 18

Soit f continue sur $[0,1]$, $n \in \mathbb{N}$ et $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n f(t)\, dt$.

1. Montrer que (I_n) converge vers 0, Puis que $\forall x \geqslant 0$, $0 \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$.

2. Limite quand $n \to +\infty$ de $J_n = \displaystyle\int_0^1 \ln(1+x^n)\, dx$.

3. On pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\, dx$.

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{\ln 2}{n} - \dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^1 \ln(1+x^n)\, dx$.

b) En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} nu_n$

Exercice 19

Soit $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n\sqrt{1-x}\, dx$. Calculer I_0, puis trouver une relation entre I_n et I_{n+1}.
En déduire I_n en fonction de n.

Exercice 20

Même exercice avec $n \geqslant k$ et $I_{n,k} = \displaystyle\int_0^1 x^k(1-x)^{n-k}\, dx$.

Trouver $I_{n,0}$ et montrer que $I_{n,k} = \dfrac{k}{n-(k-1)} I_{n,k-1}$.

En déduire que $I_{n,k} = \dfrac{1}{(n+1)\binom{n}{k}}$

Exercice 21. *Comparaison à une intégrale*
Soit f la fonction $f(t) = t\ln(t)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

1. Étudier les variations de f.

2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f(n) \leqslant \displaystyle\int_n^{n+1} f(t)\, dt \leqslant f(n+1)$.

3. On pose pour $n > 0$, $S_n = f(1) + \cdots + f(n)$.

a) Encadrer S_n par : $\displaystyle\int_1^n f(t)\, dt \leqslant S_n \leqslant \int_1^n f(t)\, dt + n\ln n$

b) Calculer $\displaystyle\int_1^n f(t)\, dt$.

c) En déduire les deux limites suivantes :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2}\ln(1^1\ 2^2\ 3^3\ 4^4 \cdots n^n) \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2}\left(1^1\ 2^2\ 3^3\ 4^4 \cdots n^n\right)^{\frac{4}{n^2}}$$

(on pourra prendre le ln *de la seconde expression avant de conclure)*

Exercice 22
Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $a_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2}\, dt$.

1. Calculer a_0.

2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant a_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$. En déduire la convergence de (a_n).

3. Calculer $a_n + a_{n+2}$ pour tout $n \geqslant 0$.

4. Déterminer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ où $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$

Exercice 23
Soit $x \in \mathbb{R}$, on pose $H(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \exp(-t^2)\, dt$.

1. Étudier les variations de H, et montrer que H est impaire.

2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad x\exp(-4x^2) \leqslant H(x) \leqslant x\exp(-x^2)$, et en déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} H(x)$.

Exercice 24. *Interversion Limite/Intégrale ?*
Soit la suite de fonctions (f_n) définies sur $[0,1]$ par $f_n(x) = 2nx\mathrm{e}^{-nx^2}$.
On pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(t)\, dt$.

1. Calculer pour tout $t \in [0,1]$ la limite de $f_n(t)$ lorsque n tend vers l'infini

2. Calculer I_n. Que vaut $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$?

3. A-t-on l'égalité suivante : $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^1 f_n(t)\, dt = \int_0^1 \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t)\, dt$?

Exercice 25. *Inégalités et intégrale*
En utilisant une intégrale, montrer les deux encadrements suivants :

$$a)\ \forall x > 1, \quad \frac{1}{x} \leqslant \ln(x) - \ln(x-1) \leqslant \frac{1}{x-1}$$

$$b)\ \forall x > 0, \quad \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \leqslant \sqrt{x+1} - \sqrt{x} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{x}}$$