Exercice 1. *Injections, surjections*

1. Montrer que $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & n+1 \end{array} \right.$ n'est pas surjective. Modifier l'ensemble d'arrivée pour la rendre surjective. Est-ce alors bijectif ?

2. Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ k & \mapsto & 2k+1 \end{array} \right.$. f est-elle injective ? surjective ? bijective ? Déterminer l'ensemble image de f.

Exercice 2. *Bijection et réciproque*

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \{a\} & \to & \mathbb{R}^* \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{x-a} \end{array} \right.$. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ dans $\mathbb{R}^*$ et déterminer f^{-1}.

Exercice 3. $\mathbb{N}$ *et* $\mathbb{Z}$ *en bijection*

Définissons la fonction :

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{Z} \\ n & \mapsto & \varphi(n) = \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair,} \\ -\left(\dfrac{n+1}{2}\right) & \text{si } n \text{ est impair.} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Montrer que φ est une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{Z}$.

Exercice 4. *Compositions*

Soit f et g deux applications, $f : E \to F$ et $g : F \to G$.

1. Si f est injective et g injective, alors $g \circ f$ est injective.

2. Si f est surjective et g surjective, alors $g \circ f$ est surjective.

3. Si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.

4. Si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.

Exercice 5. *Fonctions bijectives*

Démontrer que les fonctions suivantes f réalisent une bijection de l'intervalle I donné sur l'intervalle $f(I)$ que l'on précisera. Énoncer les propriétés de f^{-1} et donner son tableau de variation.

1. $f(x) = \dfrac{3x-1}{x-2}$ avec $I =]2, +\infty[$

2. $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$ avec $I = [0, 1]$

3. $f(x) = \ln(2-x) - \ln(x+2)$ sur son ensemble de définition à préciser.

4. $f(x) = \dfrac{2e^x - 1}{e^x + 1}$ avec $I = \mathbb{R}$.

Exercice 6. *Une unique solution*

Montrer que les équations suivantes possèdent une unique solution dans l'intervalle I :

1. $I = [-1, 1]$ et $x^5 - x^4 = -1$.

2. $I = [0, 1]$ et $3x = 1 + \ln(2 + x^2)$.

Exercice 7. *Encadrement de l'unique solution*

1. Montrer que l'équation $3 - 2x = e^x$ possède une unique solution α dans $\mathbb{R}$.

2. Vérifier que $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. A-t-on $\dfrac{1}{2} \leqslant \alpha \leqslant 1$?

Remarque : $e \simeq 2.718 \pm 10^{-3}$ et $e^{1/2} \simeq 1.648 \pm 10^{-3}$.

Exercice 8. *Unique solution paramétrée*

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$, on considère l'équation $(E_n) : x^{3n} + n^n x^n - 1 = 0$

1. Démontrer que (E) admet une unique solution que l'on notera a_n.

2. Justifier que $a_n < \dfrac{1}{n}$.

Exercice 9. *Problème récapitulatif*
Soit f la fonction définie pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = x + \ln(x)$.
On prendra $\ln(2) \simeq 0.69$.

1. Démontrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur un intervalle à préciser.
2. Énoncer les propriétés de f^{-1} et donner son tableau de variation.
3. Justifier que l'équation $x + \ln(x) = 0$ admet une unique solution qu'on notera α.
4. Vérifier que $\dfrac{1}{2} < \alpha < 1$.
5. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, démontrer que l'équation $x + \ln(x) = \dfrac{1}{n}$ admet une et une seule solution, notée α_n.

Exercice 10. *Réciproque inconnue*
Soit g la fonction définie sur $]0,1[$ par $g(x) = \ln\left|\dfrac{x-1}{x}\right| - x$.

1. Montrer que g est une bijection de $]0,1[$ sur $\mathbb{R}$, et préciser les variations de g^{-1}.
2. Déterminer $g^{-1}(\ln(2) - 1/3)$ et $g^{-1}(-1/2)$.

Exercice 11. *Premières gammes*
Calculer les limites au(x) point(s) considéré(s)

a) $\dfrac{\ln(\sqrt{x})}{x^{1/3}}$ en 0 et $+\infty$

b) $\dfrac{\ln(1+x)}{x^2}$ en 0^+

c) $\dfrac{\ln(1+x^2)}{x}$ en 0^+

d*) $\dfrac{\sqrt{x}}{e^x - 1}$ en 0 et $+\infty$

e) $\dfrac{x+2}{x^2\ln(x)}$ en 0^+

f) $4x^2 + \ln(x) + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ en 0

g*) $\dfrac{x^2 + x + \ln(x)}{3\ln(x)}$ en $+\infty$, 0^+ et 1.

Exercice 12. *Secondes gammes*
Calculer les limites au(x) point(s) considéré(s) :

a) $\dfrac{x^2+3x-1}{x-1}$ en 1 et $+\infty$

b) $\dfrac{x^2+|x|}{x}$ en 0 et $-\infty$

c) $x(1+x^2-x)$ en $-\infty$

d*) $\dfrac{(x^5)^x}{(5^x)^5}$ en $+\infty$ et 0^+

e) $\dfrac{1+x+x^3}{2^x}$ en 0 et $+\infty$

f) $\sqrt{x+5} - \sqrt{x-3}$ en $+\infty$

g) $\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}$ en $+\infty$

Exercice 13. *Retour à zéro*
Étudier les limites des fonctions suivantes au point considéré :
Pour étudier $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, on pourra poser $x = a + h$ et étudier $\lim\limits_{h\to 0} f(a+h)$

a) $\dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2}$ en 2

b) $\dfrac{e^x - e^3}{x-3}$ en 3

c) $\dfrac{x^n-1}{x-1}$ en 1

d) $\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{2}{x^2-1}$ en 1

e) $\dfrac{\ln(x)}{x^3-1}$ en 1

Exercice 14. *Quelques preuves de cours*

1. ***a)*** Montrer que : $\forall x \geqslant 1$, $e^x \geqslant x^2$. En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$.

   b) À l'aide du changement de variable $X = \dfrac{x}{\alpha}$, montrer que pour tout $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$

2. ***a)*** Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\quad 1 + x \leqslant e^x \leqslant 1 + xe^x$.

   b) En déduire la limite $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x}$

3. ***a)*** Montrer que $\forall x \in]-1,+\infty[, \quad \dfrac{x}{1+x} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$.

b) En déduire la limite $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

Exercice 15. *Retour de la partie entière*

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x\left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor$.

1. Exprimer $f(x)$ pour $x > 1$. En déduire la limite de f en $+\infty$. Et en $-\infty$?

2. ***a)*** Encadrer $f(x)$ pour $x > 0$. En déduire que f admet une limite à droite en 0.

b) Que se passe-t-il à gauche en 0 ?

Exercice 16. *Définition en deux parties*

1. Soit f la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leqslant 1 \\ x^{\ln(\ln(x))} & \text{si } x > 1 \end{cases}$.

Montrer que f est bien définie et admet une limite au point 1.

2. Faire de même avec la fonction $g(x) = \begin{cases} (x-1)e^{\frac{1}{x-1}} & \text{si } x < 1 \\ 0 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$.

Exercice 17. *Définition et limites*

Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes, ainsi que leurs limites éventuelles aux bornes de leur domaine de définition :

a) $f(x) = \dfrac{x}{1+e^{1/x}}$

b) $f(x) = x^{\sqrt{x}}$

c) $f(x) = x + \sqrt{x^2-1}$

d) $f(x) = \dfrac{5x^2+3}{4+\sqrt{x}} - \ln(x)$

e) $f(x) = \ln(1+e^x+e^{2x})$

f) $f(x) = (x+\ln(x))e^{1/x}$

Exercice 18. *Raccord 1 ?*

Soit la fonction f définie par $f(x) = \begin{cases}]0,1[\, \cup\,]1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x\ln(x)}{x^2-1} \end{cases}$

1. Peut-on prolonger f par continuité en 1 ?

2. Préciser la limite de f en 0^+.

Exercice 19. *Raccord 2 ?*

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit sur $\mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$ la fonction g par $g(x) = \dfrac{e^{x^2}-e}{x^{2n}-1}$.
Cette fonction est-elle prolongeable par continuité en -1 ? en 1 ?

Exercice 20. *On continue !*

Étudier la continuité de la fonction suivante : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x+3}{x^2+1} & \text{si } x \leqslant 1 \\ \dfrac{x^5-1}{x^3-x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Exercice 21. *Absolument !*

A-t-on f continue $\Leftrightarrow |f|$ continue ?

Exercice 22. *Intermède*

Montrer que l'équation $\ln(x)\, e^x - 3 = 0$ admet au moins une solution sur $[1,+\infty[$.

Exercice 23. *Retour aux polynômes*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $\lim\limits_{-\infty} f = -\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$. Montrer que f s'annule.
Appliquer ce résultat aux polynômes de degré impair.

Exercice 24. *Lorsque f rencontre $f(x)$*
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ continue telle que $\forall x \in I,\ f(x)^2 = 1$.
Montrer que f est constante : $\forall x \in I,\ f = 1$ ou $\forall x \in I,\ f = -1$.

Exercice 25. *Du saut en hauteur*

1. Démontrer que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue sur le segment $[a, b]$ et si $\forall x \in [a, b]$, $f(x) > 0$, alors il existe un réel $\lambda > 0$ tel que $\forall x \in [a, b],\ f(x) \geqslant \lambda$.
2. Montrer que cette implication est fausse si on prend un intervalle ouvert, ou si on prend f non continue.

Exercice 26. *Preuve par trois*
Soit f une fonction continue en 0 et telle que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(3x) = f(x)$.

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\quad \forall x \in \mathbb{R},\quad f\left(\dfrac{x}{3^n}\right) = f(x)$, et en déduire que f est constante.

Exercice 27. *A la racine des entiers*
Soit la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$. Préciser son ensemble de définition.
Étudier la continuité de f en 0, puis la continuité de f sur $[-1, 2]$.

Exercice 28. *Raccordements en un point*
Donner les ensembles de définition des fonctions suivantes puis étudier leur continuité au point de raccordement. Étudier aussi (lorsque cela est possible) la dérivabilité en ce point.

$$f(x) = \begin{cases} x\ln(x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} \dfrac{\exp(2x^2) - 1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1 + x^3)}{3x^2} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \qquad \ell(x) = \begin{cases} \exp\left(\dfrac{-1}{x+1}\right) & \text{si } x \neq -1 \\ 0 & \text{si } x = -1 \end{cases}$$

Exercice 29. *Ensemble de dérivabilité*
Soit f définie par $f(x) = x\sqrt{2x - x^2}$. Déterminer son ensemble de définition. Étudier la continuité et la dérivabilité de f. (attention en $x = 0$ et $x = 2$).

Exercice 30. *Intervalles à la dérive*
Sur quels intervalles ces fonctions sont-elles continues ? dérivables ? Calculer leur dérivée.

1. $a(x) = \ln(1 + x^2)$
2. $b(x) = \dfrac{e^{2x}}{x^2 - 1}$
3. $c(x) = \dfrac{x + 1}{x^2 - 3x + 2}$
4. $d(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x^2 + 1}$
5. $e(x) = \exp\left(x + \dfrac{1}{x}\right)$
6. $f(x) = \sqrt{1 - 4x^2}$
7. $g(x) = \ln(2x^2 - x - 1)$
8. $h(x) = (1 + x^2)^x$

Exercice 31. *Tangente hyperbolique*
Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

1. Étudier la parité de f puis déterminer les limites en $+\infty$ et $-\infty$.
2. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée ? En déduire le tableau de variations.

Exercice 32. *Dérivée continue 1 ?*
Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x|x|$.
Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que sa dérivée est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 33. *Dérivée continue 2 ?*
Soit f définie par $f(x) = |\ln(x)|$.

1. Montrer que f est continue sur son ensemble de définition.
2. Étudier la dérivabilité de f, puis calculer sa dérivée là où elle est dérivable. Sa dérivée est-elle continue sur cet intervalle ?

Exercice 34. *Bijection et dérivée 1*
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}$.

1. Monter que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle que l'on déterminera.

2. En quels points f^{-1} est-elle dérivable ?

3. Calculer $(f^{-1})'(1)$.

Exercice 35. *Bijection et dérivée 2*
Soit f la fonction définie sur $I =]0, +\infty[$ par $f(x) = x + \ln(x)$.

1. Monter que f réalise une bijection de I sur un intervalle que l'on déterminera.

2. On note g la bijection réciproque.
Montrer que g vérifie : $\forall y \in \mathbb{R},\ g'(y) = \dfrac{g(y)}{1+g(y)}$.

Exercice 36. $\mathcal{C}^1$ *mais pas* $\mathcal{D}^2$
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} 1+x & \text{si } x \geqslant 0 \\ e^x & \text{si } x < 0 \end{cases}$

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 37. *IAF*
Montrer que

1. $\forall x \in [0,1],\ x \leqslant e^x - 1 \leqslant xe$.

2. $\forall x > 0, \quad \dfrac{x}{1+x} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$

3. $\forall\, 0 < a < b, \quad a \leqslant \dfrac{b-a}{\ln b - \ln a} \leqslant b$

4. $\forall\, 0 < a < b, \quad \sqrt[3]{1+b} - \sqrt[3]{1+a} \leqslant \dfrac{b-a}{3}$

Exercice 38. *Par Euler !*

1. Démontrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $\dfrac{1}{k+1} \leqslant \ln\left(\dfrac{k+1}{k}\right) \leqslant \dfrac{1}{k}$.

2. Soit (u_n) la suite définie pour $n \geqslant 1$ par la relation $u_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}\right) - \ln(n)$

   a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right) \leqslant u_n \leqslant 1$.

   b) Montrer que la suite (u_n) converge.
   La limite est appelée constante d'Euler (souvent notée γ)

Exercice 39. *Fonction et suite - Un classique !*
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \dfrac{e^x}{x+2}$.

1. Justifier que l'on peut définir une suite (u_n) par $u_0 = 1/2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$.

2. ***a)*** Déterminer $f([0,1])$.

   b) Justifier : $\forall x \in [0,1], \quad \dfrac{1}{4} \leqslant f'(x) \leqslant \dfrac{2}{3}$. (*On pourra calculer $f''(x)$ pour cela*)

   c) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution a dans $[0,1]$.

3. ***a)*** Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n \leqslant 1$.

   b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - a| \leqslant \dfrac{2}{3}|u_n - a|$.
   En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - a| \leqslant \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.

   c) En déduire la convergence de (u_n) vers a.

   d) Trouver un entier n tel que u_n soit une valeur approchée de a à 10^{-3} près.

Exercice 40. *Convexité*
Montrer que la fonction a définie sur $\mathbb{R}$ par $a(x) = \ln(1 + e^x)$ est convexe.

Exercice 41. *Étude de fonction 1*
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} x\mathrm{e}^{-\frac{3}{|x|}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

1. Montrer que f est une fonction impaire sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

3. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = \mathrm{e}^{-\frac{3}{|x|}} \left(1 + \dfrac{3}{|x|}\right)$.

4. Montrer alors que f est C^1 sur $\mathbb{R}^*$. En déduire que f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

5. Dresser le tableau de variations de la fonction f, en précisant les limites de f.

Exercice 42. *Étude de fonction 2*
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x + 1}$.

1. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et expliciter f'.

2. Dresser le tableau de variations de f (avec limites).

3. Sur quels intervalles la fonction f est-elle convexe ? concave ?
Déterminer les points d'inflexion de f.

4. Tracer dans un repère orthonormé $\mathcal{C}_f$, ainsi que la tangente au point d'inflexion.

Exercice 43. *Convexité, inflexion*
On considère la fonction $f(x) = -x^2 + 3x - \ln(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et on donne $1/\sqrt{2} \simeq 0.7$.

1. Étudier la convexité de f et déterminer les points d'inflexion.

2. Déterminer les tangentes horizontales de $\mathcal{C}_f$. Donner une allure de la courbe.