Exercice 1
Soient A et B deux parties d'un ensemble E. Simplifier les expressions suivantes

1. $A \cap \varnothing$
2. $A \cup \varnothing$
3. $(A \cap B) \cap (\overline{A} \cap B)$.
4. $A \backslash A$
5. $A \backslash \varnothing$
6. $(A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B) \cup (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})$

Exercice 2
Soient A, B et C trois parties d'un ensemble E. Montrer les égalités suivantes :

1. $A \backslash (B \cup C) = (A \backslash B) \cap (A \backslash C)$
2. $A \backslash (B \cap C) = (A \backslash B) \cup (A \backslash C)$
3. $(A \backslash B) \backslash C = A \backslash (B \cup C)$
4. $A \backslash (B \backslash C) = (A \backslash B) \cup (A \cap C)$
5. A-t-on $A \cap (B \cup C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$?

Exercice 3
Soient A et B deux parties d'un ensemble E.

1. Montrer que $A \subset B \Leftrightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$.
2. Montrer que $A \subset B \Rightarrow A \cap B = A$. La réciproque est-elle vraie ?
3. Montrer que $A \subset B \Rightarrow A \cup B = B$. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 4
Soient A, B, et C trois parties d'un ensemble E.

1. Montrer que $A \cup B = A \cap C \Leftrightarrow B \subset A$ et $A \subset C$.
2. En déduire que si $A \cup B = A \cap C$, $B \cup C = B \cap A$ et $C \cup A = C \cap B$, alors $A = B = C$.

Exercice 5. *Preuves du cours*

1. Prouver la formule du triangle de Pascal en utilisant la formule avec factorielles.
2. Prouver par récurrence la formule du binôme de Newton.

Exercice 6. *Binômiaux et factorielles*
Simplifier les expressions suivantes, et préciser le bon quantificateur pour n.

1. $\dfrac{35!}{34!}$
2. $\dfrac{n!}{(n-2)!}$
3. $\dfrac{(n+1)!}{(n-2)!} + \dfrac{n!}{(n-1)!}$
4. $\dbinom{30}{2}$
5. $\dbinom{n+1}{3}$
6. $\dbinom{n+1}{n-1}$
7. $\dbinom{2n+1}{2}$

Écrire avec des factorielles les expressions : $n(n+1)(n+2)$, puis $(2n+1)(2n+2)\dots(3n)$

Exercice 7. *Newton, on a un problème !*
Développer les expressions suivantes

1. $(2+x)^4$
2. $(3-2x)^3$
3. $(\sqrt{3}-1)^4$
4. $(1+x^2)^7$
5. $(1002)^3$

Donner le terme de degré 4 dans $(2+5x)^6$.

Exercice 8
Calculer les sommes suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k$
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k}$
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$
4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} x^k$
5. (*) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} x^{k-1}$
6. (*) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} k(k-1) \binom{n}{k} x^{k-2}$

Exercice 9

1. Soit $n \geqslant k$. Montrer que $\displaystyle\sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i}\binom{i}{k} x^{n-i} = \binom{n}{k}(1+x)^{n-k}$.

(*on pourra montrer que* $\displaystyle\binom{n}{i}\binom{i}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{i-k}$ pour $i \in [\![k, n]\!]$)

2. Soit $n \geqslant k$. Montrer que $\displaystyle\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\binom{n-i}{k-i} = 2^k \binom{n}{k}$.

Exercice 10. *Cantine*
À la cantine du lycée, il y a le choix entre 3 entrées, 2 plats et 4 desserts. Combien de menus (se composant d'une entrée, d'un plat et d'un dessert) sont possibles ?

Exercice 11. *Anagrammes*
Donner le nombre d'anagrammes des mots suivants :
SCILAB, SOMME, ELEVE, ANAGRAMME.

Exercice 12. *Urne*
On fait 5 tirages d'une boule, **successivement et avec remise**, dans une urne contenant 9 boules numérotées de 1 à 9.

1. Nombre de tirages possibles ?

2. Dénombrer alors l'ensemble des tirages contenant :

  a) exactement 2 fois la boule 2

  b) au moins 1 fois la boule 9

  c) 3 fois la boule 3 et 1 fois la boule 1.

3. ***a)*** Nombre de tirages tels que le 2e tirage ait donné la boule 1 ?

  b) Nombre de tirages tels que la 2e boule 1 tirée l'ait été au 3e tirage ?

Exercice 13. *Dénombrement divers*

1. 10 personnes se retrouvent à une soirée. Combien y a-t-il de poignées de mains différentes quand ils se saluent ?

2. Un groupe de touristes visite 4 villes de Toscane : Florence, Pise, Sienne, Montalcino. Combien y a-t-il d'itinéraires possibles ?

3. De combien de façons peut-on ranger 6 livres différents sur 3 étagères (sachant que chaque étagère peut recevoir entre 0 et 6 livres, et que l'ordre de rangement sur une étagère n'a pas d'importance) ?

Exercice 14. *Événements*
On tire deux cartes dans un jeu de 32 cartes. On considère les ensembles suivants :

$$\begin{array}{rcl} A & = & \{\text{les deux cartes tirées sont rouges}\} \\ B & = & \{\text{les deux cartes tirées sont un valet et un dix}\} \\ C & = & \{\text{les deux cartes tirées sont des personnages}\} \end{array}$$

1. Que représente les ensembles : $\overline{A}$? $\quad A \cap B \cap \overline{C}$? $\quad (A \cap B) \cap C$?

2. Écrire à l'aide des ensembles A, B, C les ensembles :

$$\begin{array}{rcl} D & = & \{\text{les deux cartes tirées sont des personnages et ne sont pas toutes les deux r} \\ E & = & \{\text{on obtient au plus un personnage rouge}\} \end{array}$$

Exercice 15. *Énigme*
Dans une pièce plongée dans l'obscurité se trouvent trois chapeaux noirs et deux blancs. On fait entrer trois personnes dont une aveugle. Chacun prend un chapeau au hasard et, sans le regarder, le pose sur sa tête. On cache les deux chapeaux restants. On allume ensuite la lumière et on demande à chaque personne si elle est capable de deviner la couleur de son chapeau. La première regarde les deux autres et répond : "Non." La deuxième regarde elle-aussi les deux autres et lance à son tour : " Non." La troisième, pourtant aveugle, lance : "Oui." Comment cette personne aveugle a-t-elle pu deviner la couleur de son chapeau ?