Thème 2 : suites réelles

I. Séance 1 : définitions

Exercice 1
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels et soit $\ell \in \mathbb{R}$.

1. Qu'est-ce qu'une suite monotone ?

2. Traduire en mathématiques (avec les quantificateurs) les propositions mathématiques suivantes.

a) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

b) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.

c) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

d) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

3. Reprendre les questions ***2.a)*** et ***2.b)*** dans le cas où les propriétés précédentes sont vérifiées seulement à partir d'un certain rang.

4. Écrire la négation des propositions de la question ***2.***

Exercice 2. $(**)$ *Vrai ou Faux ?*

1. Si la suite (u_n) diverge vers $+\infty$, alors elle n'est pas majorée.

2. Une suite (u_n) croissante à partir d'un certain rang est minorée.

3. Si $(|u_n|)$ converge alors (u_n) converge.

4. Si $(|u_n|)$ tend vers 0 alors (u_n) tend vers 0.

5. Une suite convergente est monotone à partir d'un certain rang.

6. Une suite convergente et majorée est croissante.

7. Une suite divergeant vers $+\infty$ est croissante à partir d'un certain rang.

8. Une suite strictement croissante diverge vers $+\infty$.

9. Une suite strictement décroissante diverge vers $-\infty$.

10. Si (u_n) est croissante et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \leqslant v_n$ alors (v_n) est croissante.

11. Si (u_n) tend vers 0 et (v_n) tend vers $+\infty$, alors on ne peut conclure sur la limite du quotient $\dfrac{u_n}{v_n}$.

12. Si (u_n) est divergente, alors la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_{n+1} - u_n$ est divergente.

13. Si (u_n) tend vers $\ell \neq 0$ alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} - u_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1$.

Séance 2 : manipulations de base (et Python)

Exercice 3
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n^2} \end{cases}$$

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$.

2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.

3. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

4. ***a)*** Écrire en **Python** la fonction `calculSuite` qui prend en paramètre un entier `n` et renvoie le `n`$^{\text{ème}}$ terme de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

b) Quel appel permet de calculer u_8 ?

5. ***a)*** Écrire en **Python** la fonction `calculPremiersTermes` qui prend en paramètre un entier `n` et renvoie la liste `L` contenant les `n` premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

b) On considère alors le programme **Python** suivant :

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

n = 100
absc = np.linspace(0, n-1, n)
t = calculPremiersTermes(n)
plt.plot(absc, t)
plt.show()
```

Que réalise ce programme ?

6. ***a)*** Justifier qu'il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geqslant n_0,\ |u_n| \leqslant 10^{-4}$.

b) Écrire en **Python** un programme qui permet de déterminer le premier entier n tel que $|u_n| \leqslant 10^{-4}$.

Séance 3 : suites récurrentes linéaires usuelles

Exercice 4

On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_0 > 0$, $u_1 > 0$, et vérifiant la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_n^3 \times u_{n+1}^2$$

1. Montrer par une récurrence double que $u_n > 0$ pour tout entier naturel n.

2. On note $t_n = \ln(u_n)$.

a) Montrer que la suite (t_n) vérifie $\forall n \in \mathbb{N},\ t_{n+2} = 3t_n + 2t_{n+1}$.

b) De quel type de suite s'agit-il ?

3. Déterminer, en fonction de u_0 et u_1, le terme général de la suite (t_n).

4. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \exp\left(\frac{3^n}{4}\ln(u_0u_1) + \frac{(-1)^n}{4}\ln\left(\frac{u_0^3}{u_1}\right)\right)$$

Exercice 5

On considère la suite (u_n) définie dans l'Exercice 4.

1. Écrire en **Python** la fonction `calculPremiersTermes` qui prend en paramètre un entier `n`, des valeurs `u0`, `u1` et renvoie la liste `L` contenant les `n` premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2. Écrire un programme permettant de tracer les 100 premiers termes de la suite (u_n) pour les valeurs $u_0 = 0,7$ et $u_1 = 1,2$.

Exercice 6

On appelle $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{2}\, u_n + 1 \end{cases}$$

1. Démontrer par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant n$.

2. En déduire la limite de (u_n) quand n tend vers $+\infty$.

3. Déterminer la formule explicite de u_n.

Séance 4 : suites récurrentes et inégalités des accroissements finis

Exercice 7

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}+1}$.

1. *a)* Démontrer que f est paire sur $\mathbb{R}$.

b) Justifier que f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et étudier ses variations.

c) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution $\ell \in \mathbb{R}^+$.

d) Justifier que : $0 \leqslant \ell \leqslant \dfrac{1}{2}$.
Données numériques : $\mathrm{e}^{1/2} \simeq 1,65$ et $\mathrm{e} \simeq 2,72$ au centième près.

e) Montrer que : $\forall x \geqslant 0,\ |f'(x)| \ \leqslant\ f(x)$.
En déduire que : $\forall x \geqslant 0,\ |f'(x)| \ \leqslant\ \dfrac{1}{2}$.

f) Vérifier que $f\big(\big[0, \frac{1}{2}\big]\big) \subset \big[0, \frac{1}{2}\big]$.

2. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$u_0 = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$$

a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \big[0, \frac{1}{2}\big]$.

b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|u_{n+1} - \ell| \ \leqslant\ \frac{1}{2}\ |u_n - \ell| \qquad \text{puis que} \qquad |u_n - \ell| \ \leqslant\ \frac{1}{2^{n+1}}$$

c) En déduire que la suite (u_n) converge vers ℓ.

3. **Informatique**

a) Écrire une fonction **Python** `f` qui prend en entrée un réel `x` et qui calcule f(`x`).

b) En utilisant la fonction `f` précédente, écrire une fonction `SuiteU` qui prend en entrée un entier positif `n` et qui calcule $u_{\mathtt{n}}$.

c) En utilisant la fonction `SuiteU` précédente, comment peut-on obtenir à l'aide de **Python** une valeur approchée de ℓ à 10^{-4} près ?

Exercice 8
Dans tout cet exercice, f désigne la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$\forall x \in \,]0,+\infty[, \; f(x) = x - \ln(x)$$

Partie I : Étude de la fonction f

1. Dresser le tableau de variations de f en précisant ses limites en 0 et en $+\infty$.

2. Montrer que l'équation $f(x) = 2$, d'inconnue $x \in \,]0,+\infty[$, admet exactement deux solutions, que l'on note a et b, telles que $0 < a < 1 < b$.

3. Montrer : $b \in [2,4]$. On donne : $\ln(2) \simeq 0,7$.

Partie II : Étude d'une suite

On pose : $u_0 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \; u_{n+1} = \ln(u_n) + 2$.

4. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}, \, u_n \in [b,+\infty[$.

5. Déterminer la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En déduire qu'elle converge et préciser sa limite.

6. *a)* Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, \, u_{n+1} - b \leqslant \dfrac{1}{2}(u_n - b)$.

b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}, \, 0 \leqslant u_n - b \leqslant \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

7. *a)* Écrire une fonction **Python** d'en-tête `def suite(n) :` qui, prenant en argument un entier n de $\mathbb{N}$, renvoie la valeur de u_n.

b) Recopier et compléter la ligne 3 de la fonction **Python** suivante afin que, prenant en argument un réel `epsilon` strictement positif, elle renvoie une valeur approchée de b à `epsilon` près.

```
1 def valeur_approchee(epsilon) :
2     n = 0
3     while ............ :
4         n = n + 1
5     return suite(n)
```

Séance 5 : suites implicites

Exercice 9
Pour tout entier n positif, on définit sur $[0,+\infty[$ la fonction f_n par :

$$\forall x \in [0,+\infty[,\ f_n(x) \ = \ \mathrm{e}^x + nx^2 - 3$$

1. *a)* Montrer que f_n est continue et dérivable sur son ensemble de définition.
Dresser son tableau de variations.

b) Donner l'équation de la tangente de f_n en 1.

c) Tracer dans un même repère les courbes de f_0, f_1 et f_2.

d) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ a exactement une solution positive, notée u_n.

e) Préciser la valeur de u_0. Dans la suite on supposera que $n \geqslant 1$.

f) Vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in]0,1[$.

2. Écrire une fonction **Python** qui prend un entier n et qui calcule une valeur approchée de u_n à $0,001$ près par la méthode de dichotomie.

3. *a)* Montrer que : $\forall x \in]0,1[,\ f_{n+1}(x) > f_n(x)$.

b) En déduire le signe de $f_n(u_{n+1})$, puis le sens de variation de la suite (u_n).

c) Montrer que (u_n) est convergente. On note ℓ sa limite.

d) On suppose dans cette question que $\ell > 0$.
Calculer la limite de $\mathrm{e}^{u_n} + n\,u_n^2 - 3$ et en déduire une contradiction.

e) Donner enfin la valeur de ℓ.

f) Montrer que $\sqrt{\dfrac{n}{2}}\,u_n$ tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 10
Pour tout entier n non nul, on note h_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x > 0,\ \ h_n(x) \ = \ f(x^n, 1) \ = \ x^n + 1 + \frac{1}{x^n}$$

1. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, la fonction h_n est strictement décroissante sur $]0,1[$ et strictement croissante sur $[1,+\infty[$.

2. En déduire que pour tout entier n non nul, l'équation $h_n(x) = 4$ admet exactement deux solutions, notées u_n et v_n et vérifiant : $0 < u_n < 1 < v_n$.

3. *a)* Démontrer :

$$\forall x > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ h_{n+1}(x) - h_n(x) = \frac{(x-1)(x^{2n+1}-1)}{x^{n+1}}$$

b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ h_{n+1}(v_n) \geqslant 4$.

c) Montrer alors que la suite (v_n) est décroissante.

4. *a)* Démontrer que la suite (v_n) converge vers un réel ℓ et montrer : $\ell \geqslant 1$.

b) En supposant que $\ell > 1$, démontrer : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n^n = +\infty$.
En déduire une contradiction.

c) Déterminer la limite de (v_n).

5. ***a)*** Montrer : $\forall n \geqslant 1,\ v_n \leqslant 3$.

b) Écrire une fonction **Python** d'en-tête `def h(n,x)` qui renvoie la valeur de $h_n(x)$ lorsqu'on lui fournit un entier naturel n non nul et un réel $x \in \mathbb{R}_+^*$ en entrée.

c) Compléter la fonction suivante pour qu'elle renvoie une valeur approchée à 10^{-5} près de v_n par la méthode de dichotomie lorsqu'on lui fournit un entier $n \geqslant 1$ en entrée :

```
def v(n) :
    a = 1
    b = 3
    while (b-a) > 10**(-5) :
        c = (a + b)/2
        if h(n,c) < 4 :
            ..........
        else :
            ..........
    return ..........
```