Thème 1 : algèbre linéaire (matrices et endomorphismes)

I. Séance 1 : produit matriciel

Exercice 1

1. Pour les exemples suivants, dire si les produits matriciels AB et BA sont bien définis ou non. S'ils sont définis, les calculer ; s'ils ne sont pas définis, expliquer pourquoi.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 5 \\ 8 & -4 & 3 & 7 \end{pmatrix}$;

b) $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. On considère un vecteur $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ où a, b, c sont des réels non tous nuls.

Dans la suite, on note $M = X\,{}^tX$ et $m = {}^tX\,X$.

a) Calculer m.

b) (i) Calculer M et en déduire qu'elle est symétrique.
Question réservée aux cubes : que peut-on en déduire ?

(ii) Calculer $M\ X$.
Question réservée aux cubes : que peut-on en déduire ?

3. On considère maintenant un entier n non nul et un vecteur $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nul. On note :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad M \ = \ X\,{}^tX \quad \text{et} \quad m = {}^tX\,X$$

a) Calculer m.

b) (i) Démontrer que M est symétrique.
Question réservée aux cubes : que peut-on en déduire ?

(ii) Calculer $M\ X$.
Question réservée aux cubes : que peut-on en déduire ?

Exercice 2. (**)

Pour toute matrice $A = \big(a_{i,j}\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on appelle trace de A et on note $\mathrm{tr}(A)$ la somme des coefficients diagonaux de A, c'est-à-dire $\mathrm{tr}(A) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{i,i}$.

1. Montrer que l'application $\mathrm{tr} : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ A & \mapsto & \mathrm{tr}(A) \end{array}$, est linéaire.

2. Montrer : $\forall (A, B) \in \big(\mathscr{M}_n(\mathbb{R})\big)^2$, $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

3. Vérifier, pour tout $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$: $\mathrm{tr}({}^tAA) = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{j,i}^2$.

II. Séance 2 : calcul d'inverse

II.1. Définition de l'inverse et utilisation d'une relation matricielle

Exercice 3

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
Quelle propriété démontre que $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est l'inverse de A ?

2. On considère la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Démontrez que P est inversible, d'inverse $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

3. On considère la matrice $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Trouver une relation entre J^2, J et I.

b) Montrer que J est inversible et donner son inverse en fonction de J et I.

4. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Calculer $A^2 - 4A$.

b) En déduire que A est inversible et donner son inverse en fonction de A et I.

5. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calculer les matrices $(A - I)^2$ et $(A - I)^3$.

b) En déduire que A est inversible et donner son inverse en fonction de A et I.

II.2. Reconnaître les matrices non inversibles

Commentaire

Pour démontrer qu'une matrice carrée M est non inversible, on peut utiliser l'une des propriétés suivantes :

M est trinagulaire et l'un (au moins) de ses coefficients diagonaux est nul	$\Rightarrow$	M est non inversible
M possède deux colonnes (resp. lignes) égales	$\Rightarrow$	M est non inversible
M possède deux colonnes (resp. lignes) colinéaires.	$\Rightarrow$	M est non inversible

On utilisera à bon escient l'une ou l'autre de ces propriétés dans les exercices suivants.
Ces propriétés seront détaillées dans l'année (notamment lors de la définition du rang d'une matrice).

Exercice 4
Sans faire de calcul, expliquez pourquoi les matrices suivantes sont non inversibles.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad O = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -4 \\ 3 & -2 & -6 \\ 1 & 7 & -2 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -6 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

II.3. Inverse d'une matrice carrée d'ordre 2

Commentaire

Commençons par rappeler la formule d'inversion pour les matrices carrées d'ordre 2.
Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

1) Si $ad - bc = 0$, la matrice A n'est pas inversible.

2) Si $ad - bc \neq 0$, la matrice A inversible, d'inverse :

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}}$$

Comment retenir cette formule :

× on échange les éléments diagonaux,

× on multiplie les autres par -1,

× et on n'oublie pas de multiplier par l'inverse de $ad - bc$ (obtenu par « produit en croix »).

La quantité $q = ad - bc$ est appelé **déterminant de** A. On la note habituellement det(A). Cette notion de déterminant est aussi définie pour des matrices $n \times n$ (mais nous ne le ferons pas cette année). On pourra retenir :

$$\boxed{A \text{ est inversible} \quad \Leftrightarrow \quad \det(A) \neq 0}$$

Exercice 5
Les matrices suivantes sont-elles inversibles ? Si oui, donnez (sans faire de calcul) leur inverse.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad O = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -9 & 18 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

II.4. Inverse par algorithme du pivot de Gaus

Exercice 6
À l'aide de l'algorithme du pivot de Gauss, montrer que chacune des matrices suivantes est inversible et déterminer son inverse. On optera pour la présentation matricielle.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

III. Séance 3 : résolution de systèmes

III.1. Savoir utiliser l'algorithme du pivot de Gauss pour résoudre un système linéaire homogène

Exercice 7

1. Résoudre le système linéaire :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 3\,x & - & 6\,y & + & 2\,z & = & 0 \\ -x & + & 4\,y & - & 2\,z & = & 0 \\ 2\,x & - & 5\,y & + & z & = & 0 \end{array}\right.$$

2. Résoudre le système linéaire :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 3\,x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & + & 3\,y & + & z & = & 0 \\ x & + & y & + & 3\,z & = & 0 \end{array}\right.$$

3. Résoudre le système linéaire :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 0 \\ 2\,x & - & y & + & z & = & 0 \\ 3\,x & + & 4\,y & - & z & = & 0 \end{array}\right.$$

Exercice 8

1. Résoudre le système linéaire :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 3\,x & + & y & - & z & = & 0 \\ 2\,x & + & 2\,y & - & 2\,z & = & 0 \\ x & - & y & + & z & = & 0 \end{array}\right.$$

2. Résoudre le système linéaire :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & 0 \\ 2\,x & & & - & 2\,z & = & 0 \\ x & - & y & - & z & = & 0 \end{array}\right.$$

3. Résoudre le système linéaire :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} -x & + & y & - & z & = & 0 \\ 2\,x & - & 2\,y & - & 2\,z & = & 0 \\ x & - & y & - & 3\,z & = & 0 \end{array}\right.$$

Exercice 9

1. Résoudre le système linéaire :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 0 \\ -x & - & y & - & z & = & 0 \\ -2\,x & - & 2\,y & - & 2\,z & = & 0 \end{array}\right.$$

2. Résoudre le système linéaire :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2\,x & - & y & + & 3\,z & = & 0 \\ 6\,x & - & 3\,y & + & 9\,z & = & 0 \\ 2\,x & - & y & + & 3\,z & = & 0 \end{array}\right.$$

III.2. Savoir utiliser l'algorithme du pivot de Gauss pour déterminer une base d'un « sous-espace propre »

Exercice 10
Soit $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on note : $E_\lambda(A) = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = \lambda \cdot X\}$.

Commentaire

- On peut démontrer que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $E_\lambda(A)$ est un espace vectoriel.
Pour ce faire, on démontre que $E_\lambda(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
Rappelons ci-dessous la manière de procéder.

(i) $E_\lambda(A) \subseteq \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ par définition.

(ii) $E_\lambda(A)$ est non vide.
En effet le vecteur nul $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ est tel que : $A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
On en conclut : $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in E_\lambda(A)$.

(iii) Soit $(\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et soit $(X_1, X_2) \in E_\lambda(A) \times E_\lambda(A)$.
Démontrons : $\mu_1 \cdot X_1 + \mu_2 \cdot X_2 \in E_\lambda(A)$.
Autrement dit, il s'agit de démontrer : $A\,\big(\mu_1 \cdot X_1 + \mu_2 \cdot X_2\big) = \lambda \cdot \big(\mu_1 \cdot X_1 + \mu_2 \cdot X_2\big)$.
Remarquons tout d'abord :
  × Comme $X_1 \in E_\lambda(A)$ alors : $AX_1 = \lambda \cdot X_1$.
  × Comme $X_2 \in E_\lambda(A)$ alors : $AX_2 = \lambda \cdot X_2$.

On a alors :

$$\begin{array}{rcll} A\,\big(\mu_1 \cdot X_1 + \mu_2 \cdot X_2\big) & = & A\,\big(\mu_1 \cdot X_1\big) + A\,\big(\mu_2 \cdot X_2\big) & \\ & = & \mu_1 \cdot (AX_1) + \mu_2 \cdot (AX_2) & \\ & = & \mu_1 \cdot (\lambda \cdot X_1) + \mu_2 \cdot (\lambda \cdot X_2) & \textit{(car } X_1 \in \mathbb{E}_\lambda(A) \textit{ et } X_2 \in \mathbb{E}_\lambda(A)\textit{)} \\ & = & (\mu_1 \times \lambda) \cdot X_1 + (\mu_2 \times \lambda) \cdot X_2 & \\ & = & (\lambda \times \mu_1) \cdot X_1 + (\lambda \times \mu_2) \cdot X_2 & \\ & = & \lambda \cdot (\mu_1 \cdot X_1) + \lambda \cdot (\mu_2 \cdot X_2) & \\ & = & \lambda \cdot \big(\mu_1 \cdot X_1 + \mu_2 \cdot X_2\big) & \end{array}$$

Ainsi, on a bien : $\mu_1 \cdot X_1 + \mu_2 \cdot X_2 \in E_\lambda(A)$.
(on a démontré que l'ensemble $E_\lambda(A)$ est stable par combinaisons linéaires)

- La démonstration précédente est donnée ici simplement pour illustrer la méthode consistant à démontrer qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel de espace vectoriel de référence. Elle ne sera demandée dans les épreuves.

- Par contre, savoir déterminer une base de $E_\lambda(A)$ constitue un exercice incontournable en 2$^{\text{ème}}$ année. Cette question est présente dans `TOUTES` les épreuves de mathématiques. C'est d'ailleurs une excellente nouvelle car cette question se résout très facilement : il s'agit simplement de savoir résoudre un système linéaire homogène ! En effet :

$$\begin{array}{rcl} X \in E_\lambda(A) & \Leftrightarrow & AX = \lambda \cdot X \\ & \Leftrightarrow & AX - \lambda \cdot X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\ & \Leftrightarrow & \big(A - \lambda \cdot I_3\big) \cdot X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \end{array}$$

1. Dans la suite de l'exercice, on note $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Déterminer $E_1(A)$.

b) Déterminer $E_{-2}(A)$.

c) Déterminer $E_3(A)$.

2. On considère la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Démontrer que P est inversible et déterminer P^{-1}.

b) Démontrer que la matrice définie par $D = P^{-1}AP$ est diagonale.
Déduire de cette écriture une écriture de la matrice A en fonction des matrices P et D.

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.

3. La formule de la question ***2.c)*** est-elle vérifiée pour $n = -1$?

Exercice 11

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -1 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on note $E_\lambda(A) = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = \lambda \cdot X\}$.

1. ***a)*** Déterminer $E_1(A)$.

b) Déterminer $E_2(A)$.

c) Déterminer $E_3(A)$.

2. On considère la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Démontrer que P est inversible d'inverse $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Démontrer que la matrice définie par $D = P^{-1}AP$ est diagonale.
Déduire de cette écriture une écriture de la matrice A en fonction des matrices P et D.

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.

IV. Séance 4 : puissances d'une matrice via le binôme de Newton

Exercice 12

On note I la matrice identité d'ordre 3 et on considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer qu'il existe une unique matrice $H \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que : $A = I + 2H$.

2. Calculer H^2, puis H^k pour tout $k \geqslant 2$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. À l'aide de la formule du binôme de Newton, exprimer A^n en fonction de I et de H.

Exercice 13

On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on note $E_\lambda(A) = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = \lambda X\}$.

1. Démontrer que la matrice $A - 2I$ est non inversible. Déterminer $E_2(A)$.

2. Démontrer que P est inversible et déterminer son inverse P^{-1}.

3. Démontrer que la matrice $\Delta = P^{-1}AP$ est triangulaire supérieure et trouver $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\Delta = \alpha I + J$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}$.

a) Calculer J^2, puis J^k pour tout entier $k \geqslant 2$.

b) À l'aide de la formule du binôme de Newton, exprimer Δ^n en fonction de I et J.

c) En déduire l'expression matricielle de A^n.

Exercice 14

1. On considère les matrices suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Déterminer A^2. Démontrer alors : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $A^k = 3^{k-1}A$.

b) Déterminer B^2 et B^3. En déduire B^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

c) Déterminer C^2. Conjecturer une formule pour C^k et la démontrer.

2. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On considère la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

a) Écrire la matrice M en fonction des matrices $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

b) À l'aide de la formule du binôme de Newton, déterminer M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

V. Séance 5 : algèbre théorique

Exercice 15

Soit E un espace vectoriel et soit f un endomorphisme de E ($f \in \mathscr{L}(E)$).

1) Démontrer : $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f) \ \Rightarrow \ f \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

2) Démontrer : $f \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)} \ \Rightarrow \ \mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$.

3) Conclure.