

Thème 1 : algèbre linéaire (matrices et endomorphismes)

I. Séance 1 : produit matriciel

Exercice 1

1. Pour les exemples suivants, dire si les produits matriciels AB et BA sont bien définis ou non. S'ils sont définis, les calculer ; s'ils ne sont pas définis, expliquer pourquoi.

$$a) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 5 \\ 8 & -4 & 3 & 7 \end{pmatrix};$$

Démonstration.

Comme $A \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{3,4}(\mathbb{R})$, le produit $AB \in \mathcal{M}_{2,4}(\mathbb{R})$ est bien défini et :

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 5 \\ 8 & -4 & 3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 & 8 & -5 & 0 \\ -16 & 12 & -7 & 12 \end{pmatrix}.$$

Le produit BA n'est pas défini car le nombre de colonnes de B (4) est différent du nombre de lignes de A (2).

Commentaire

- Considérons m , n et p trois entiers naturels non nuls ainsi que $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ des matrices. Alors la matrice produit $C = AB \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{R})$ est bien définie. De plus, pour tout $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$ et pour tout $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, le coefficient $c_{i,j}$ de la matrice produit est obtenu en effectuant le produit matriciel de la $i^{\text{ème}}$ ligne de A et de la $j^{\text{ème}}$ colonne de B . Plus précisément :

$$\forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket, \forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket, c_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} \times b_{k,j}$$

Dans cette formule, k est un indice permettant de parcourir parallèlement les colonnes de A et les lignes de B . Pour que le produit AB soit bien défini, il faut donc que le nombre de colonnes de A soit égal au nombre de lignes de B .

- Il est classique de présenter un produit matriciel comme suit :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 5 \\ 8 & -4 & 3 & 7 \end{pmatrix} = C$$

Cette présentation permet de mettre en avant la taille de la matrice produit C obtenue ($C \in \mathcal{M}_{2,4}(\mathbb{R})$) où 2 est le nombre de lignes de A et 4 est le nombre de colonnes de B). À terme, il est préférable de présenter un produit en écrivant les matrices côte à côte (comme dans le corrigé). **Seules ces deux présentations sont acceptables.** □

$$b) A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, B = (2 \quad -1 \quad 0 \quad 1).$$

Démonstration.

Comme $A \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{1,4}(\mathbb{R})$, le produit $AB \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ est bien défini et :

$$AB = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} (2 \quad -1 \quad 0 \quad 1) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & 0 & 2 \\ 6 & -3 & 0 & 3 \\ 8 & -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Commentaire

- Comme mentionné précédemment, on peut présenter le produit sous la forme suivante :

$$(2 \quad -1 \quad 0 \quad 1) = B$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & 0 & 2 \\ 6 & -3 & 0 & 3 \\ 8 & -4 & 0 & 4 \end{pmatrix} = C$$

- La matrice produit obtenue a une forme particulière. En effet, chaque vecteur qui la compose est une copie, à multiplication près, de la matrice colonne A :

$$C = \left(2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad -1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right)$$

Cette forme apparaît naturellement lorsque l'on multiplie une matrice colonne A par une matrice ligne B .

Comme $B \in \mathcal{M}_{1,4}(\mathbb{R})$ et $A \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$, le produit $BA \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ est bien défini et :

$$BA = (2 \quad -1 \quad 0 \quad 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = (4).$$

(on obtient une matrice de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$, que l'on pourra considérer comme un réel)

Commentaire

Il faut faire particulièrement attention aux tailles des matrices que l'on souhaite multiplier. On peut résumer les situations rencontrées dans cet exercice dans un tableau.

Taille de A	Taille de B	Taille de $A \times B$
$m \times n$	$n \times p$	$m \times p$
2×3	3×4	2×4
3×4	2×3	NON !
4×1	1×4	4×4
1×4	4×1	1×1

□

2. On considère un vecteur $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ où a, b, c sont des réels non tous nuls.

Dans la suite, on note $M = X^t X$ et $m = {}^t X X$.

a) Calculer m .

Démonstration.

$$\text{On a : } {}^t X X = (a \ b \ c) \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = (a^2 + b^2 + c^2).$$

Commentaire

La matrice ${}^t X X \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ peut être traitée comme un réel.

L'écriture : ${}^t X X = a^2 + b^2 + c^2$, bien que non rigoureuse, sera donc acceptée. □

b) (i) Calculer M et en déduire qu'elle est symétrique.

Question réservée aux cubes : que peut-on en déduire ?

Démonstration.

$$\text{La matrice : } M = X^t X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} (a \ b \ c) = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ba & b^2 & bc \\ ca & cb & c^2 \end{pmatrix} \text{ est bien symétrique.}$$

Réponse cubes : On en déduit que M est diagonalisable.

Commentaire

On peut remarquer, comme dans la question précédente, que la matrice obtenue apparaît comme la concaténation de copies (à multiplication par un réel près) de X :

$$\left(a \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad b \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad c \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right)$$

(ii) Calculer $M X$.

Question réservée aux cubes : que peut-on en déduire ?

Démonstration.

$$\begin{aligned} M X &= \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ba & b^2 & bc \\ ca & cb & c^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^3 + ab^2 + ac^2 \\ ba^2 + b^3 + bc^2 \\ ca^2 + cb^2 + c^3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a(a^2 + b^2 + c^2) \\ b(a^2 + b^2 + c^2) \\ c(a^2 + b^2 + c^2) \end{pmatrix} = (a^2 + b^2 + c^2) \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = m X \end{aligned}$$

$$\text{On a : } M X = m X.$$

Réponse cubes : Comme X est un vecteur non nul, c'est un vecteur propre associé à la valeur propre $a^2 + b^2 + c^2$.

Commentaire

Il est précisé dans l'énoncé que les réels a , b et c sont non tous nuls (la négation de la propriété « tous nuls »). Cela exclut uniquement la situation $a = b = c = 0$. Ceci ne doit pas être confondu avec la propriété « tous non nuls » qui signifie que ni a , ni b , ni c ne peuvent être nuls. Cette deuxième propriété est plus forte car elle exclut toutes les situations où l'un des réels a , b ou c serait nul. Par exemple :

$$a = 3, \quad b = 0, \quad c = 2$$

définit un triplet de réels non tous nuls mais pas tous non nuls. □

3. On considère maintenant un entier n non nul et un vecteur $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nul. On note :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad M = X^t X \quad \text{et} \quad m = {}^t X X$$

a) Calculer m .

Démonstration.

$$\text{On a : } {}^t X X = (x_1 \quad \dots \quad x_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (x_1^2 + \dots + x_n^2).$$
□

b) (i) Démontrer que M est symétrique.

Question réservée aux cubes : que peut-on en déduire ?

Démonstration.

$$\begin{aligned} {}^t M &= {}^t (X^t X) = {}^t ({}^t X) {}^t (X) && \text{(par propriété de} \\ & && \text{l'application transposée)} \\ &= X^t X = M \end{aligned}$$

La matrice M est donc bien symétrique.

Réponse cubes : On en déduit qu'elle est diagonalisable.

Commentaire

- On aurait pu procéder de même en **2.b)(i)**.
- De manière générale, si la question consiste à démontrer qu'une matrice A est symétrique, le bon réflexe est de calculer ${}^t A$ et de démontrer que cette matrice n'est autre que A . □

(ii) Calculer $M X$.

Question réservée aux cubes : que peut-on en déduire ?

Démonstration.

$$\begin{aligned} M X &= (X^t X) X = X ({}^t X X) && \text{(par associativité du produit matriciel)} \\ &= X m = m \cdot X && \text{(car } m \text{ est un réel)} \end{aligned}$$

Commentaire

- La notation $X m$ est tout à fait correcte puisqu'il s'agit de la multiplication d'une matrice de taille $n \times 1$ et d'une matrice 1×1 . La notation $m X$, par contre, n'est pas correcte si $n \neq 1$ (on ne peut multiplier une matrice 1×1 et une matrice $n \times 1$).
- En revanche, la notation $m \cdot X$ est correcte, si l'on accepte le léger abus consistant à confondre $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ et \mathbb{R} . Il s'agit alors d'effectuer la multiplication du réel m et de la matrice X . □

Exercice 2. (**)

Pour toute matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on appelle trace de A et on note $\text{tr}(A)$ la somme des coefficients diagonaux de A , c'est-à-dire $\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{i,i}$.

1. Montrer que l'application $\text{tr} : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, est linéaire.
 $A \mapsto \text{tr}(A)$

Démonstration.

Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et soit $B = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- Tout d'abord, par définition de la somme de matrices : $\lambda A + \mu B = (\lambda a_{i,j} + \mu b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$.
- Par définition de la trace :

$$\begin{aligned} \text{tr}(\lambda A + \mu B) &= \sum_{i=1}^n (\lambda A + \mu B)_{i,i} \\ &= \sum_{i=1}^n (\lambda a_{i,i} + \mu b_{i,i}) \\ &= \lambda \sum_{i=1}^n a_{i,i} + \mu \sum_{i=1}^n b_{i,i} && \text{(par linéarité de la somme)} \\ &= \lambda \text{tr}(A) + \mu \text{tr}(B) \end{aligned}$$

Ainsi, l'application tr est bien linéaire. □

2. Montrer : $\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$, $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.

Démonstration.

On note $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ et soit $B = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$.

De plus, on note : $C = AB = (c_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ et $D = BA = (d_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$.

- Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et soit $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Par définition du produit matriciel :

$$c_{i,j} = (AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j} \quad \text{et} \quad d_{i,j} = (BA)_{i,j} = \sum_{k=1}^n b_{i,k} a_{k,j}$$

- On a alors :

$$\begin{aligned}
 \operatorname{tr}(AB) &= \operatorname{tr}(C) = \sum_{i=1}^n c_{i,i} \\
 &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,i} \right) \\
 &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^n b_{k,i} a_{i,k} \right) \\
 &= \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^n b_{k,i} a_{i,k} \right) \\
 &= \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^n d_{k,k} \right) = \operatorname{tr}(D) = \operatorname{tr}(BA)
 \end{aligned}$$

On a bien : $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.

Commentaire

On utilise ici la formule permettant d'obtenir les coefficients de la matrice produit AB . Cette formule ne revêt pas de difficulté. Elle exprime le fait que le coefficient en position (i, j) de la matrice AB est obtenu en réalisant le produit de la $i^{\text{ème}}$ ligne de la matrice A par la $j^{\text{ème}}$ colonne de la matrice B .

$$c_{i,j} = (AB)_{i,j} = (a_{i,1} \ \dots \ a_{i,n}) \begin{pmatrix} b_{1,j} \\ \vdots \\ b_{n,j} \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j}$$

□

3. Vérifier, pour tout $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: $\operatorname{tr}({}^tAA) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{j,i}^2$.

Démonstration.

Notons $B = {}^tA$. Rappelons : $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $b_{i,j} = a_{j,i}$.

En reprenant la démonstration précédente :

$$\begin{aligned}
 \operatorname{tr}({}^tAA) &= \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^n b_{k,i} a_{i,k} \right) \\
 &= \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^n a_{i,k} a_{i,k} \right) \quad (\text{car } B = {}^tA) \\
 &= \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^n a_{i,k}^2 \right)
 \end{aligned}$$

On a bien : $\operatorname{tr}({}^tAA) = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^n a_{i,k}^2 \right)$.

Commentaire

Les variables de sommation sont des variables muettes. On peut donc les renommer sans changer le résultat énoncé. Si on souhaite retrouver la même présentation que celle présente dans l'énoncé, on peut écrire :

$$\sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^n a_{i,k}^2 \right) = \sum_{\alpha=1}^n \left(\sum_{\beta=1}^n a_{\beta,\alpha}^2 \right) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{j,i}^2 \right)$$

□

II. Séance 2 : calcul d'inverse

II.1. Définition de l'inverse et utilisation d'une relation matricielle

Exercice 3

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Quelle propriété démontre que $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est l'inverse de A ?

Démonstration.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

La matrice B est l'inverse de A si $AB = BA = I_n$.
Si c'est le cas, B est notée A^{-1} .

Commentaire

- Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on utilise souvent le résultat suivant :

$$AB = I_n \Rightarrow A \text{ et } B \text{ sont inverses l'une de l'autre}$$

ou autrement dit :

$$AB = I_n \Rightarrow AB = BA = I_n$$

La propriété : $AB = I_n$ signifie que la matrice B est **l'inverse à droite** de la matrice A .
Ce résultat signifie que dans l'espace des matrices carrées d'ordre n , l'inverse à droite de A est l'inverse (tout court) de A .

- Le résultat suivant est évidemment lui aussi vérifié :

$$BA = I_n \Rightarrow A \text{ et } B \text{ sont inverses l'une de l'autre}$$

Si B est **l'inverse à gauche** de A alors B est l'inverse de A .

2. On considère la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Démontrez que P est inversible, d'inverse $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Démonstration.

Par calcul, on obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi, la matrice P est inversible d'inverse $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

□

3. On considère la matrice $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Trouver une relation entre J^2 , J et I .

Démonstration.

$$\begin{aligned} J^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -3 \\ -3 & 4 & -3 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ -3 & 6 & -3 \\ 3 & -3 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = 3J - 2I_3 \end{aligned}$$

$$\boxed{J^2 = 3J - 2I}$$

□

b) Montrer que J est inversible et donner son inverse en fonction de J et I .

Démonstration.

On déduit de ce qui précède : $J^2 - 3J = -2I$.

Ainsi, $J(J - 3I) = -2I$ ou encore :

$$J \times \left(-\frac{1}{2} (J - 3I) \right) = I$$

$$\boxed{J \text{ est inversible, d'inverse } J^{-1} = -\frac{1}{2} (J - 3I).}$$

□

4. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Calculer $A^2 - 4A$.

Démonstration.

• Tout d'abord : $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -4 & 4 \\ 8 & -4 & 8 \\ 4 & -4 & 8 \end{pmatrix}$.

• Ainsi : $A^2 - 4A = \begin{pmatrix} 8 & -4 & 4 \\ 8 & -4 & 8 \\ 4 & -4 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12 & -4 & 4 \\ 8 & 0 & 8 \\ 4 & -4 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} = -4I$.

$$\boxed{A^2 - 4A = -4I}$$

□

b) En déduire que A est inversible et donner son inverse en fonction de A et I .

Démonstration.

D'après la question précédente, $A^2 - 4A = -4I$.

On en déduit : $-\frac{1}{4} (A^2 - 4A) = I$. Et ainsi :

$$A \times \left(-\frac{1}{4} (A - 4I) \right) = I$$

$$\boxed{\text{On en conclut que } A \text{ est inversible, d'inverse : } A^{-1} = -\frac{1}{4} (A - 4I).}$$

□

5. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calculer les matrices $(A - I)^2$ et $(A - I)^3$.

Démonstration.

• Tout d'abord :

$$(A - I)^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 6 & 0 \\ -6 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

• Ensuite :

$$(A - I)^3 = (A - I)(A - I)^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 & 6 & 0 \\ -6 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi : $(A - I)^2 = \begin{pmatrix} -6 & 6 & 0 \\ -6 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $(A - I)^3 = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$.

□

b) En déduire que A est inversible et donner son inverse en fonction de A et I .

Démonstration.

• D'après ce qui précède : $(A - I)^3 = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$.

• Les matrices A et I commutent puisque I commute avec toute matrice carrée de même ordre. D'après la formule du binôme de Newton :

$$(A - I)^3 = A^3(-I)^0 + 3A^2(-I)^1 + 3A^1(-I)^2 + A^0(-I)^3 = A^3 - 3A^2 + 3A - I$$

et ainsi : $A^3 - 3A^2 + 3A = I$. On en déduit :

$$A \times (A^2 - 3A + 3I) = I$$

On en conclut que A est inversible, d'inverse $A^{-1} = A^2 - 3A + 3I$.

□

II.2. Reconnaître les matrices non inversibles

Commentaire

Pour démontrer qu'une matrice carrée M est non inversible, on peut utiliser l'une des propriétés suivantes :

M est trinagulaire et l'un (au moins) de ses coefficients diagonaux est nul $\Rightarrow M$ est non inversible

M possède deux colonnes (resp. lignes) égales $\Rightarrow M$ est non inversible

M possède deux colonnes (resp. lignes) colinéaires. $\Rightarrow M$ est non inversible

On utilisera à bon escient l'une ou l'autre de ces propriétés dans les exercices suivants. Ces propriétés seront détaillées dans l'année (notamment lors de la définition du rang d'une matrice).

Exercice 4

Sans faire de calcul, expliquez pourquoi les matrices suivantes sont non inversibles.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad O = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -4 \\ 3 & -2 & -6 \\ 1 & 7 & -2 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -6 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Démonstration.

- La matrice M est non inversible car elle possède une colonne constituée uniquement de 0.
- La matrice N est non inversible car ses deux colonnes sont égales.
- La matrice O est non inversible car c'est une matrice triangulaire (supérieure) qui possède un coefficient diagonal nul.

Commentaire

On peut aussi remarquer que les 2 premières colonnes de la matrice O sont colinéaires : $C_2 = \frac{3}{2} C_1$.

- La matrice P est non inversible car elle possède deux colonnes colinéaires : $C_3 = -2 C_1$.
- La matrice Q est non inversible car elle possède deux lignes colinéaires : $L_3 = 2 L_1$. □

II.3. Inverse d'une matrice carrée d'ordre 2**Commentaire**

Commençons par rappeler la formule d'inversion pour les matrices carrées d'ordre 2.

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

- 1) Si $ad - bc = 0$, la matrice A n'est pas inversible.
- 2) Si $ad - bc \neq 0$, la matrice A est inversible, d'inverse :

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Comment retenir cette formule :

- × on échange les éléments diagonaux,
- × on multiplie les autres par -1 ,
- × et on n'oublie pas de multiplier par l'inverse de $ad - bc$ (obtenu par « produit en croix »).

La quantité $q = ad - bc$ est appelé **déterminant de A** . On la note habituellement $\det(A)$. Cette notion de déterminant est aussi définie pour des matrices $n \times n$ (mais nous ne le ferons pas cette année). On pourra retenir :

$$A \text{ est inversible} \Leftrightarrow \det(A) \neq 0$$

Exercice 5

Les matrices suivantes sont-elles inversibles ? Si oui, donnez (sans faire de calcul) leur inverse.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad O = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -9 & 18 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Démonstration.

- La matrice M a pour déterminant $\det(M) = 0 - (1 \times (-1)) = 1 \neq 0$.
On en déduit que M est inversible d'inverse :

$$M^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

- La matrice N a pour déterminant $\det(N) = 1 \times 2 - 3 \times 1 = -1 \neq 0$.
On en déduit que N est inversible d'inverse :

$$N^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

- La matrice O a pour déterminant $\det(O) = 2 \times 0 - (1 \times 3) = -3 \neq 0$.
On en déduit que O est inversible d'inverse :

$$O^{-1} = \frac{1}{-3} \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

- La matrice P a pour déterminant $\det(P) = 2 \times 18 - ((-9) \times (-4)) = 36 - 36 = 0$.
On en déduit que P n'est pas inversible.

Commentaire

On pouvait aussi remarquer que les deux colonnes de P sont colinéaires.

- La matrice Q a pour déterminant $\det(Q) = 1 - 1 = 0$.
On en déduit que Q n'est pas inversible.

Commentaire

On pouvait aussi remarquer que les deux colonnes de Q sont égales.

□

II.4. Inverse par algorithme du pivot de Gauss

Exercice 6

À l'aide de l'algorithme du pivot de Gauss, montrer que chacune des matrices suivantes est inversible et déterminer son inverse. On optera pour la présentation matricielle.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Démonstration.

- On applique l'algorithme du pivot de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

On effectue les opérations $\begin{cases} L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1 \end{cases}$. On obtient :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

La réduite obtenue est triangulaire supérieure et ses coefficients diagonaux sont tous non nuls. Ainsi P est inversible.

Commentaire

La première étape de l'algorithme consiste à installer des 0 dans la première colonne sous le coefficient diagonal. Ici, à la fin de la première étape, on obtient une matrice diagonale. C'est un pur hasard. On verra dans l'exemple suivant qu'il faut généralement aussi traiter la 2^{ème} colonne et ainsi de suite (jusqu'à l'avant dernière colonne).

On effectue l'opération $\{ L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \}$. On obtient :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

On effectue l'opération $\{ L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2 \}$. On obtient :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Finalement, $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- On applique l'algorithme du pivot de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

On effectue les opérations $\begin{cases} L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{cases}$. On obtient :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & & & \\ 0 & 2 & -1 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \end{array} \right) \left| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \right.$$

On effectue l'opération $\{ L_3 \leftarrow 2L_3 - L_2 \}$. On obtient :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & & & \\ 0 & 2 & -1 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array} \right) \left| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{array} \right.$$

La réduite obtenue est triangulaire supérieure et ses coefficients diagonaux sont tous non nuls. Ainsi, Q est inversible.

On effectue les opérations $\begin{cases} L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \end{cases}$. On obtient :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 2 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array} \right) \left| \begin{array}{ccc} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{array} \right.$$

On effectue l'opération $\{ L_1 \leftarrow 2L_1 - L_2 \}$. On obtient :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 2 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array} \right) \left| \begin{array}{ccc} 2 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{array} \right.$$

On effectue enfin les opérations $\begin{cases} L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2 \end{cases}$. On obtient :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array} \right) \left| \begin{array}{ccc} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{array} \right.$$

Finalement, $Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

- On applique l'algorithme du pivot de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & & & \\ -1 & -2 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \end{array} \right) \left| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right.$$

On effectue l'opération $\{ L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \}$. On obtient :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & & & \\ 0 & -1 & 1 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \end{array} \right) \left| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right.$$

On effectue l'opération $\{ L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \}$. On obtient :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & & & \\ 0 & -1 & 1 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array} \right) \left| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right.$$

La réduite obtenue est triangulaire supérieure et ses coefficients diagonaux sont tous non nuls. Ainsi R est inversible.

On effectue les opérations $\begin{cases} L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \end{cases}$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue l'opération $\{ L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \}$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue l'opération $\{ L_2 \leftarrow -L_2 \}$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

Finalement : $R^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Commentaire

Par mesure de vérification, il est conseillé d'effectuer **au brouillon** (cela n'a pas à se retrouver sur votre copie) le calcul de la matrice de départ par la matrice inverse calculée. Si ce produit donne la matrice identité, c'est que le calcul est juste. Dans le cas contraire, c'est qu'une erreur s'est produite.

Ici, pour la matrice P , on a bien :

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

□

III. Séance 3 : résolution de systèmes

III.1. Savoir utiliser l'algorithme du pivot de Gauss pour résoudre un système linéaire homogène

Exercice 7

1. Résoudre le système linéaire (S_1) suivant :

$$\begin{cases} 3x - 6y + 2z = 0 \\ -x + 4y - 2z = 0 \\ 2x - 5y + z = 0 \end{cases}$$

Démonstration.

$$(S_1) \iff \begin{cases} 3x - 6y + 2z = 0 \\ -x + 4y - 2z = 0 \\ 2x - 5y + z = 0 \end{cases} \quad (0)$$

$$\begin{matrix} L_2 \leftarrow 3L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow 3L_3 - 2L_1 \\ \iff \end{matrix} \begin{cases} 3x - 6y + 2z = 0 \\ 6y - 4z = 0 \\ -3y - z = 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$L_3 \leftarrow 2L_3 + L_2 \iff \begin{cases} 3x - 6y + 2z = 0 \\ 6y - 4z = 0 \\ -6z = 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$L_3 \leftarrow -\frac{1}{6}L_3 \iff \begin{cases} 3x - 6y + 2z = 0 \\ 6y - 4z = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + 4L_3 \\ \iff \end{matrix} \begin{cases} 3x - 6y = 0 \\ 6y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad (4)$$

$$L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \iff \begin{cases} 3x = 0 \\ 6y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{matrix} L_1 \leftarrow \frac{1}{3}L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{6}L_2 \\ \iff \end{matrix} \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad (6)$$

□

Commentaire

- Ce système linéaire homogène possède le même nombre d'équations que d'inconnues. Son ensemble solution est $S = \{(0, 0, 0)\}$ (un unique triplet solution). Dans ce cas, le système est dit de Cramer.
- Ce système peut se présenter sous la forme : $AX = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$ avec :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 2 \\ -1 & 4 & -2 \\ 2 & -5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$$

On peut démontrer qu'un système homogène possédant le même nombre d'équations que d'inconnues est de Cramer si et seulement si la matrice A qui lui est associée est inversible.

- La notion de système de Cramer est employée essentiellement en première année. Ce vocabulaire n'apparaît pas aux concours.
- Il est impossible, physiquement, de ne pas savoir résoudre un système linéaire homogène. La méthode est connue et consiste en un algorithme. Il faut comprendre par là que, pour résoudre un système linéaire, il suffit d'appliquer, **dans l'ordre**, une série d'instructions. Les règles étant parfaitement établies et étant les mêmes pour tous, il n'y a pas lieu de résoudre un système en effectuant des opérations autres que celles présentes dans ce corrigé.
- En particulier, on veillera :
 - × à ne pas faire d'échange de lignes inutile. Un échange de lignes n'est nécessaire que lorsque l'on est en présence d'un pivot nul. Échanger 2 lignes pour obtenir un pivot « plus simple » n'apparaît pas pertinent : c'est source d'erreurs de recopie et cela augmente le nombre d'opérations nécessaires à la résolution.
 - × à ne pas faire apparaître de fractions dans le système. Il est bien plus simple de ne travailler qu'avec des nombres entiers. L'opération élémentaire $L_3 \leftarrow L_3 - \frac{2}{3} L_1$ (en lieu et place de $L_3 \leftarrow 3 L_3 - 2 L_1$ effectuée en (1)) est à proscrire.
- L'opération élémentaire $L_3 \leftarrow -\frac{1}{6} L_3$, s'exprime à l'aide d'une fraction mais n'en fait pas apparaître dans le système. Elle est autorisée car permet de simplifier la résolution du système. On aurait aussi pu, ajouter en (1') l'opération $L_2 \leftarrow \frac{1}{2} L_2$ pour simplifier la ligne L_2 .
- Les opérations présentes en (4), (5) et (6) ne sont pas réellement nécessaires. En effet, à la fin de (2), le système se présente sous forme triangulaire et ses coefficients diagonaux sont tous non nuls. La matrice associée à un tel système est inversible. On en conclut alors directement que ce système est de Cramer et que son ensemble solution est : $\{(0, 0, 0)\}$. Dans les exemples à suivre (ainsi qu'aux concours), on peut se permettre de conclure directement en évoquant des « remontées successives ». Il faut faire attention à cet argument : il ne peut être évoqué que dans le cas présenté ici, à savoir un système homogène linéaire qui possède le même nombre d'équations que d'inconnues et qui se présente sous forme triangulaire avec coefficients diagonaux tous non nuls.
- Toute résolution différente de celle présente dans ce corrigé démontre une non assimilation de la méthode de résolution. Il convient alors de se référer au [cours de première année sur la résolution de systèmes linéaires](#).
- On profite de cet exercice pour rappeler que, de manière générale en mathématiques, ce qui importe le plus c'est le voyage (série d'arguments, méthode employée) qui importe bien plus que la destination (résultat obtenu). La majeure partie des points alloués à une question est distribuée pour les arguments et non pour le résultat. Ainsi, la méthode de résolution d'un système compte plus que la résultat en lui-même.

2. Résoudre le système linéaire (S_2) suivant :

$$\begin{cases} 3x + y + z = 0 \\ x + 3y + z = 0 \\ x + y + 3z = 0 \end{cases}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} (S_2) &\iff \begin{cases} 3x + y + z = 0 \\ x + 3y + z = 0 \\ x + y + 3z = 0 \end{cases} \\ &\stackrel{\substack{L_2 \leftarrow 3L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow 3L_3 - L_1}}{\iff} \begin{cases} 3x + y + z = 0 \\ 8y + 2z = 0 \\ 2y + 8z = 0 \end{cases} \\ &\stackrel{L_3 \leftarrow 4L_3 - L_2}{\iff} \begin{cases} 3x + y + z = 0 \\ 8y + 2z = 0 \\ 30z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \\ &\quad \text{(par remontées successives)} \end{aligned}$$

□

3. Résoudre le système linéaire (S_3) suivant :

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \\ 3x + 4y - z = 0 \end{cases}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} (S_3) &\iff \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \\ 3x + 4y - z = 0 \end{cases} \\ &\stackrel{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1}}{\iff} \begin{cases} x + y + z = 0 \\ -3y - z = 0 \\ y - 4z = 0 \end{cases} \\ &\stackrel{L_3 \leftarrow 3L_3 + L_2}{\iff} \begin{cases} x + y + z = 0 \\ -3y - z = 0 \\ -13z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \\ &\quad \text{(par remontées successives)} \end{aligned}$$

□

Exercice 8

1. Résoudre le système linéaire (S_1) suivant :

$$\begin{cases} 3x + y - z = 0 \\ 2x + 2y - 2z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

Démonstration.

$$(S_1) \iff \begin{cases} 3x + y - z = 0 \\ 2x + 2y - 2z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \quad (0)$$

$$\begin{matrix} L_2 \leftarrow 3L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow 3L_3 - L_1 \\ \iff \end{matrix} \begin{cases} 3x + y - z = 0 \\ 4y - 4z = 0 \\ -4y + 4z = 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{matrix} L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\ \iff \end{matrix} \begin{cases} 3x + y - z = 0 \\ 4y - 4z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$\iff \begin{cases} 3x + y = z \\ 4y = 4z \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{matrix} L_1 \leftarrow 4L_1 - L_2 \\ \iff \end{matrix} \begin{cases} 12x = 0 \\ 4y = 4z \end{cases} \begin{matrix} L_1 \leftarrow \frac{1}{12}L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{4}L_2 \\ \iff \end{matrix} \begin{cases} x = 0 \\ y = z \end{cases} \quad (4)$$

Commentaire

Cet exercice illustre les différentes étapes de résolution d'un système linéaire homogène :

1) mise sous forme échelonnée (sans élément sous-diagonaux stricts).

Par une suite d'opérations élémentaires sur les lignes du système, on élimine les coefficients sous-diagonaux stricts (ceux se trouvant strictement sous la diagonale), en traitant d'abord ceux de la 1^{ère} colonne (en (1)), puis ceux de la 2^{ème} (en (2)) et ainsi de suite (en fonction de la taille initiale du système).

En fin de (2), on obtient la forme échelonnée attendue : c'est une forme triangulaire à ceci près que le système possède un coefficient diagonal nul.

2) mise sous forme triangulaire.

Afin de donner au système une forme triangulaire, on choisit la colonne dans laquelle on a fait apparaître un 0 en élément diagonal et on la transfère entièrement de l'autre côté du symbole d'égalité. Dans l'exemple précédent, on transfère la colonne qui porte la variable z . Cette variable est appelée **variable auxiliaire** car les autres variables vont s'exprimer en fonction de celle-ci. De manière générale, il peut y avoir plusieurs variables auxiliaires et donc plusieurs colonnes à transférer de l'autre côté du symbole d'égalité.

Il est à noter que dans l'exercice 7, il n'y a pas besoin d'utiliser de variables auxiliaires. La raison est simple. La première étape (mise sous forme échelonnée) fait apparaître un système déjà triangulaire (absence de 0 dans les coefficients diagonaux).

3) mise sous forme diagonale (fin de la résolution).

Par une suite d'opérations élémentaires sur les lignes du système, on élimine les coefficients sur-diagonaux stricts (ceux se trouvant strictement au-dessus de la diagonale), en traitant d'abord ceux de la dernière colonne (en (4)), puis ceux de l'avant dernière (en fonction de la taille du système) et ainsi de suite.

En fin de (4), on obtient la forme diagonale attendue ce qui résout le système. \square

2. Résoudre le système linéaire (S_2) suivant :

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x \quad \quad - 2z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} (S_2) &\iff \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x \quad \quad - 2z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases} \\ &\stackrel{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\iff} \begin{cases} x + y - z = 0 \\ -2y \quad \quad = 0 \\ -2y \quad \quad = 0 \end{cases} \\ &\stackrel{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\iff} \begin{cases} x + y - z = 0 \\ -2y \quad \quad = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x + y = z \\ -2y = 0 \end{cases} \\ &\stackrel{L_1 \leftarrow 2L_1 + L_2}{\iff} \begin{cases} 2x \quad \quad = 2z \\ y = 0 \end{cases} \stackrel{L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1}{\iff} \begin{cases} x \quad \quad = z \\ y = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

□

3. Résoudre le système linéaire (S_3) suivant :

$$\begin{cases} -x + y - z = 0 \\ 2x - 2y - 2z = 0 \\ x - y - 3z = 0 \end{cases}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} (S_3) &\iff \begin{cases} -x + y - z = 0 \\ 2x - 2y - 2z = 0 \\ x - y - 3z = 0 \end{cases} \\ &\stackrel{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1}}{\iff} \begin{cases} -x + y - z = 0 \\ -4z = 0 \\ -4z = 0 \end{cases} \\ &\stackrel{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\iff} \begin{cases} -x + y - z = 0 \\ -4z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} -x - z = -y \\ -4z = 0 \end{cases} \\ &\stackrel{L_1 \leftarrow 4L_1 - L_2}{\iff} \begin{cases} -4x \quad \quad = -4y \\ -4z = 0 \end{cases} \stackrel{\substack{L_1 \leftarrow -\frac{1}{4}L_1 \\ L_2 \leftarrow -\frac{1}{4}L_2}}{\iff} \begin{cases} x \quad \quad = y \\ z = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

□

Exercice 9

1. Résoudre le système linéaire (S_1) suivant :

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ -x - y - z = 0 \\ -2x - 2y - 2z = 0 \end{cases}$$

Démonstration.

$$(S_3) \iff \begin{cases} x + y + z = 0 \\ -x - y - z = 0 \\ -2x - 2y - 2z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1 \end{matrix} \iff \begin{cases} -x + y - z = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -x = -y + z \end{cases}$$

□

2. Résoudre le système linéaire (S_2) suivant :

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 0 \\ 6x - 3y + 9z = 0 \\ 2x - y + 3z = 0 \end{cases}$$

Démonstration.

$$(S_3) \iff \begin{cases} 2x - y + 3z = 0 \\ 6x - 3y + 9z = 0 \\ 2x - y + 3z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} L_2 \leftarrow 3L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{matrix} \iff \begin{cases} 2x - y + 3z = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2x = y - 3z \end{cases}$$

□

Commentaire

- On a maintenant un aperçu complet de la résolution de système linéaire homogène à 3 équations et 3 inconnues :

- × l'exercice 7 traite le cas des systèmes de Cramer.

Ce cas ne nécessite pas l'utilisation de variable auxiliaire.

- × l'exercice 8 traite le cas des systèmes qui nécessitent l'utilisation d'une unique variable auxiliaire. Les deux autres variables s'expriment en fonction de cette variable auxiliaire.

- × l'exercice 9 traite le cas des systèmes qui nécessitent l'utilisation de deux variables auxiliaires. La variable restante s'exprime en fonction des 2 autres.

Il n'y a pas d'autres cas pour les systèmes linéaires homogènes à 3 équations et 3 inconnues. Évidemment, les systèmes plus grands peuvent nécessiter l'utilisation de variables auxiliaires supplémentaires.

- Aux concours, on rencontre principalement le cas des systèmes linéaires homogènes à 3 équations et 3 inconnues (plus rarement, ceux des des systèmes linéaires homogènes à 4 équations et 4 inconnues). Il est impensable de ne pas savoir résoudre de tels systèmes. Encore une fois, il suffit d'appliquer à la lettre l'algorithme de résolution afin d'obtenir la résolution attendue.

III.2. Savoir utiliser l'algorithme du pivot de Gauss pour déterminer une base d'un « sous-espace propre »

Exercice 10

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on note : $E_\lambda(A) = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = \lambda \cdot X\}$.

Commentaire

- On peut démontrer que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $E_\lambda(A)$ est un espace vectoriel. Pour ce faire, on démontre que $E_\lambda(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Rappelons ci-dessous la manière de procéder.

(i) $E_\lambda(A) \subseteq \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ par définition.

(ii) $E_\lambda(A)$ est non vide.

En effet le vecteur nul $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ est tel que : $A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

On en conclut : $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in E_\lambda(A)$.

(iii) Soit $(\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et soit $(X_1, X_2) \in E_\lambda(A) \times E_\lambda(A)$.

Démontrons : $\mu_1 \cdot X_1 + \mu_2 \cdot X_2 \in E_\lambda(A)$.

Autrement dit, il s'agit de démontrer : $A(\mu_1 \cdot X_1 + \mu_2 \cdot X_2) = \lambda \cdot (\mu_1 \cdot X_1 + \mu_2 \cdot X_2)$.

Remarquons tout d'abord :

× Comme $X_1 \in E_\lambda(A)$ alors : $AX_1 = \lambda \cdot X_1$.

× Comme $X_2 \in E_\lambda(A)$ alors : $AX_2 = \lambda \cdot X_2$.

On a alors :

$$\begin{aligned}
 A(\mu_1 \cdot X_1 + \mu_2 \cdot X_2) &= A(\mu_1 \cdot X_1) + A(\mu_2 \cdot X_2) \\
 &= \mu_1 \cdot (AX_1) + \mu_2 \cdot (AX_2) \\
 &= \mu_1 \cdot (\lambda \cdot X_1) + \mu_2 \cdot (\lambda \cdot X_2) && \text{(car } X_1 \in E_\lambda(A) \\
 & && \text{et } X_2 \in E_\lambda(A)) \\
 &= (\mu_1 \times \lambda) \cdot X_1 + (\mu_2 \times \lambda) \cdot X_2 \\
 &= (\lambda \times \mu_1) \cdot X_1 + (\lambda \times \mu_2) \cdot X_2 \\
 &= \lambda \cdot (\mu_1 \cdot X_1) + \lambda \cdot (\mu_2 \cdot X_2) \\
 &= \lambda \cdot (\mu_1 \cdot X_1 + \mu_2 \cdot X_2)
 \end{aligned}$$

Ainsi, on a bien : $\mu_1 \cdot X_1 + \mu_2 \cdot X_2 \in E_\lambda(A)$.

(on a démontré que l'ensemble $E_\lambda(A)$ est stable par combinaisons linéaires)

- La démonstration précédente est donnée ici simplement pour illustrer la méthode consistant à démontrer qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel de référence. Elle ne sera demandée dans les épreuves.
- Par contre, savoir déterminer une base de $E_\lambda(A)$ constitue un exercice incontournable en 2^{ème} année. Cette question est présente dans TOUTES les épreuves de mathématiques. C'est d'ailleurs une excellente nouvelle car cette question se résout très facilement : il s'agit simplement de savoir résoudre un système linéaire homogène ! En effet :

$$\begin{aligned}
 X \in E_\lambda(A) &\Leftrightarrow AX = \lambda \cdot X \\
 &\Leftrightarrow AX - \lambda \cdot X = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\
 &\Leftrightarrow (A - \lambda \cdot I_3) \cdot X = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})}
 \end{aligned}$$

1. Dans la suite de l'exercice, on note $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Déterminer $E_1(A)$.

Démonstration.

Rappelons : $E_1(A) = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = X\}$.

• Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On a alors :

$$\begin{aligned}
 X \in E_1(A) &\iff AX = X \\
 &\iff (A - I)X = 0 \\
 &\iff \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &\iff \begin{cases} 2z = 0 \\ -3y + z = 0 \\ 2z = 0 \end{cases} \\
 &\stackrel{L_1 \leftrightarrow L_2}{\iff} \begin{cases} -3y + z = 0 \\ 2z = 0 \\ 2z = 0 \end{cases} \\
 &\stackrel{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\iff} \begin{cases} -3y + z = 0 \\ 2z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \\
 &\hspace{10em} (\text{par remontées successives})
 \end{aligned}$$

• On en déduit :

$$\begin{aligned}
 E_1(A) &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid y = 0 \text{ et } z = 0 \right\} \\
 &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x \in \mathbb{R} \right\} \\
 &= \left\{ x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x \in \mathbb{R} \right\} \\
 &= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)
 \end{aligned}$$

$$E_1(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

Commentaire

On démontre dans cette question que $E_1(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$.

Cela démontre au passage que $E_1(A)$ est un espace vectoriel. C'est d'ailleurs la manière à privilégier aux concours pour montrer que $E_1(A)$ est un espace vectoriel. \square

b) Déterminer $E_{-2}(A)$.

Démonstration.

- Rappelons : $E_{-2}(A) = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = -2X\}$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On a alors :

$$\begin{aligned}
 X \in E_{-2}(A) &\iff AX = -2X \\
 &\iff (A + 2I)X = 0 \\
 &\iff \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &\iff \begin{cases} 3x & + & 2z & = & 0 \\ & & z & = & 0 \\ & & 5z & = & 0 \end{cases} \\
 &\stackrel{L_3 \leftarrow L_3 - 5L_2}{\iff} \begin{cases} 3x & + & 2z & = & 0 \\ & & z & = & 0 \\ & & 0 & = & 0 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} x & = & 0 \\ & & z & = & 0 \end{cases} \\
 &\hspace{10em} (\text{par remontées successives})
 \end{aligned}$$

- On en déduit :

$$\begin{aligned}
 E_{-2}(A) &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = 0 \text{ et } z = 0 \right\} \\
 &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid y \in \mathbb{R} \right\} \\
 &= \left\{ y \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid y \in \mathbb{R} \right\} \\
 &= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)
 \end{aligned}$$

$$E_{-2}(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

\square

c) Déterminer $E_3(A)$.

Démonstration.

- Rappelons : $E_3(A) = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = 3X\}$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On a alors :

$$\begin{aligned} X \in E_3(A) &\iff AX = 3X \\ &\iff (A - 3I)X = 0 \\ &\iff \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} -2x & + & 2z & = & 0 \\ & - & 5y & + & z & = & 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} -2x & = & -2z \\ & - & 5y & = & -z \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\stackrel{L_1 \leftarrow -\frac{1}{2}L_1}{L_2 \leftarrow -L_2}{\iff} \begin{cases} x & = & z \\ & 5y & = & z \end{cases} \end{aligned}$$

- On en déduit :

$$\begin{aligned} E_3(A) &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = z \text{ et } 5y = z \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} z \\ \frac{1}{5}z \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid z \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ z \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{5} \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid z \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{5} \\ 1 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

$$E_3(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{5} \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

□

2. On considère la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Démontrer que P est inversible et déterminer P^{-1} .

Démonstration.

- Remarquons tout d'abord que la matrice P est **triangulaire** (supérieure) et tous ses coefficients diagonaux sont non nuls. Elle est donc inversible.
- On applique l'algorithme du pivot de Gauss.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue les opérations $\begin{cases} L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{5}L_3 \end{cases}$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

Ainsi P est inversible et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

□

b) Démontrer que la matrice définie par $D = P^{-1}AP$ est diagonale.

Déduire de cette écriture une écriture de la matrice A en fonction des matrices P et D .

Démonstration.

- La matrice D est définie par :

$$\begin{aligned} D = P^{-1}AP &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La matrice $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ obtenue est bien diagonale.

- Comme $D = P^{-1}AP$, alors $PD = AP$ et finalement $PDP^{-1} = A$.

$$A = PDP^{-1}$$

Commentaire

- La matrice P est obtenue comme concaténation des vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{5} \\ 1 \end{pmatrix}$.

- Ce n'est pas un hasard (on pourrait en dire autant des coefficients diagonaux de D) mais c'est un peu tôt pour en parler. Ceci sera détaillé dans le chapitre « Réduction ». □

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^n P^{-1}$.

Démonstration.

Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$

où $\mathcal{P}(n) : A^n = PD^n P^{-1}$.

► **Initialisation** :

- D'une part : $A^0 = I$.
- D'autre part : $PD^0 P^{-1} = PIP^{-1} = PP^{-1} = I$.

D'où $\mathcal{P}(0)$.

► **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.

Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* : $A^{n+1} = PD^{n+1} P^{-1}$).

Alors :

$$\begin{aligned}
 A^{n+1} &= A \times A^n \\
 &= A \times PD^n P^{-1} && \text{(par hypothèse de récurrence)} \\
 &= PDP^{-1} \times PD^n P^{-1} && \text{(d'après la question 3.b)} \\
 &= PD(P^{-1}P)D^n P^{-1} \\
 &= PDID^n P^{-1} \\
 &= PDD^n P^{-1} = PD^{n+1} P^{-1}
 \end{aligned}$$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

Par principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^n P^{-1}$.

□

3. La formule de la question 2.c) est-elle vérifiée pour $n = -1$?

Démonstration.

D'après la question 3.b) : $A = PDP^{-1}$.

La matrice A est le produit de 3 matrices inversibles (la matrice D est inversible car diagonale et à coefficients diagonaux tous non nuls). On peut donc écrire :

$$\begin{aligned}
 A^{-1} &= (PDP^{-1})^{-1} \\
 &= ((PD)P^{-1})^{-1} \\
 &= (P^{-1})^{-1} (PD)^{-1} = P D^{-1} P^{-1}
 \end{aligned}$$

La formule de la question 3.c) est donc vérifiée pour $n = -1$.

□

Commentaire

- La forme : $A = PDP^{-1}$ permet d'obtenir facilement la formule de l'élevation à la puissance n de la matrice A demandée ici, à savoir :

$$A^n = PD^nP^{-1}$$

- Si on souhaite déterminer A^n il faut que D^n soit facile à calculer. C'est le cas ici puisque D est une matrice diagonale (encore une fois, ce n'est pas un hasard et ce sera détaillé dans le chapitre « Réduction »). Plus précisément, on a ici :

$$D^n = \begin{pmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$$

et ainsi :

$$\begin{aligned} A^n &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & (-2)^n & -\frac{(-2)^n}{5} \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3^n - 1 \\ 0 & (-2)^n & \frac{3^n - (-2)^n}{5} \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- Cette première récurrence est l'occasion de faire un point sur la notion de variable muette. Dans une proposition mathématique, on dit qu'une variable est **muette** (on parle aussi de variable **liée**) si elle est portée par un quantificateur. Ainsi, dans les propositions :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n) \qquad \exists n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$$

la variable n est muette. Cela signifie qu'on peut renommer la variable n sans que cela ne change le sens de la proposition mathématique. Ainsi, les propositions :

$$\forall m \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(m) \qquad \exists k \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(k)$$

ont même sens que les propositions précédentes.

Par contre, si on considère seulement la proposition $\mathcal{P}(n)$ (sans faire apparaître de quantificateur devant), on obtient un objet mathématique qui dépend de ce n particulier. Le manque de compréhension de la notion de variable muette a pour conséquence trois erreurs classiques :

1) Montrons par récurrence : ~~$\mathcal{P}(n)$~~ .

→ par récurrence, on démontre qu'une propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, pas seulement à un rang n donné.

2) ... où $\mathcal{P}(n) : \forall n \in \mathbb{N}, \dots$

→ nous avons déjà discuté de ce point au-dessus : une propriété commençant par $\forall n \in \mathbb{N}$ est indépendante de n (c'est alors une variable muette).

3) Supposons : ~~$\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$~~ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$.

→ ceci n'a pas de sens ! On ne peut supposer la propriété vraie pour tout n : c'est précisément ce que l'on souhaite démontrer.

Si l'une ou l'autre de ces erreurs est présente dans la rédaction, la récurrence ne sera pas lue et aucun point ne sera attribué sur la question.

Pour plus de détails sur la notion de quantificateurs, on renvoie au [cours de logique](#) de première année. On y trouve notamment les principaux schémas de rédaction. Pour plus de détails sur les récurrences, on renvoie au [cours sur les récurrences, calculs de sommes et produits](#).

Exercice 11

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -1 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on note $E_\lambda(A) = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = \lambda X\}$.

1. a) Déterminer $E_1(A)$.

Démonstration.

• Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On a alors :

$$\begin{aligned}
 X \in E_1(A) &\iff AX = X \\
 &\iff (A - 1 \cdot I_3) X = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\
 &\iff \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &\iff \begin{cases} 2x - 2y + 2z = 0 \\ -x + 3y - 2z = 0 \\ 4y - 2z = 0 \end{cases} \\
 \stackrel{L_2 \leftarrow 2L_2 + L_1}{\iff} &\begin{cases} 2x - 2y + 2z = 0 \\ 4y - 2z = 0 \\ 4y - 2z = 0 \end{cases} \\
 \stackrel{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\iff} &\begin{cases} 2x - 2y + 2z = 0 \\ 4y - 2z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} 2x - 2y = -2z \\ 4y = 2z \end{cases} \\
 \stackrel{L_1 \leftarrow 2L_1 + L_2}{\iff} &\begin{cases} 4x = -2z \\ 4y = 2z \end{cases} \iff \begin{cases} x = -\frac{1}{2}z \\ y = \frac{1}{2}z \end{cases}
 \end{aligned}$$

• On en déduit :

$$\begin{aligned}
 E_1(A) &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = -\frac{1}{2}z \text{ et } y = \frac{1}{2}z \right\} \\
 &= \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}z \\ \frac{1}{2}z \\ z \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ z \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\} \\
 &= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)
 \end{aligned}$$

$$\boxed{E_1(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)}$$

□

b) Déterminer $E_2(A)$.

Démonstration.

- Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} X \in E_2(A) &\iff AX = 2X \\ &\iff (A - 2 \cdot I_3) X = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\ &\iff \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\iff \begin{cases} x - 2y + 2z = 0 \\ -x + 2y - 2z = 0 \\ 4y - 3z = 0 \end{cases}$$

$$\stackrel{L_2 \leftarrow L_2 + L_1}{\iff} \begin{cases} x - 2y + 2z = 0 \\ 0 = 0 \\ 4y - 3z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x - 2y = -2z \\ 4y = 3z \end{cases}$$

$$\stackrel{L_1 \leftarrow 2L_1 + L_2}{\iff} \begin{cases} 2x & = & -z \\ 4y & = & 3z \end{cases} \iff \begin{cases} x = -\frac{1}{2}z \\ y = \frac{3}{4}z \end{cases}$$

- On en déduit :

$$\begin{aligned} E_2(A) &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = -\frac{1}{2}z \text{ et } y = \frac{3}{4}z \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}z \\ \frac{3}{4}z \\ z \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ z \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} \\ 1 \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

$$E_2(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right)$$

□

c) Déterminer $E_3(A)$.

Démonstration.

- Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}
 X \in E_3(A) &\iff AX = 3X \\
 &\iff (A - 3 \cdot I_3) X = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\
 &\iff \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &\iff \begin{cases} -2y + 2z = 0 \\ -x + y - 2z = 0 \\ 4y - 4z = 0 \end{cases} \\
 &\stackrel{L_1 \leftrightarrow L_2}{\iff} \begin{cases} -x + y - 2z = 0 \\ -2y + 2z = 0 \\ 4y - 4z = 0 \end{cases} \\
 &\stackrel{L_3 \leftrightarrow L_3 + 2L_2}{\iff} \begin{cases} -x + y - 2z = 0 \\ -2y + 2z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} -x + y = 2z \\ -2y = -2z \end{cases} \\
 &\stackrel{L_1 \leftrightarrow 2L_1 + L_2}{\iff} \begin{cases} -2x = 2z \\ -2y = -2z \end{cases} \\
 &\stackrel{\substack{L_1 \leftrightarrow -\frac{1}{2}L_1 \\ L_2 \leftrightarrow -\frac{1}{2}L_2}}{\iff} \begin{cases} x = -z \\ y = z \end{cases}
 \end{aligned}$$

- On en déduit :

$$\begin{aligned}
 E_3(A) &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = -z \text{ et } y = z \right\} \\
 &= \left\{ \begin{pmatrix} -z \\ z \\ z \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\} \\
 &= \left\{ z \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)
 \end{aligned}$$

$$\boxed{E_3(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)}$$

□

2. On considère la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Démontrer que P est inversible d'inverse $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Démonstration.

On remarque :

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On en déduit que P est inversible, d'inverse $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

□

b) Démontrer que la matrice définie par $D = P^{-1}AP$ est diagonale.
Déduire de cette écriture une écriture de la matrice A en fonction des matrices P et D .

Démonstration.

• La matrice D est définie par :

$$\begin{aligned} D = P^{-1}AP &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -1 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 6 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La matrice $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ obtenue est bien diagonale.

• Comme $D = P^{-1}AP$, alors $PD = AP$ et finalement $PDP^{-1} = A$.

$$A = PDP^{-1}$$

Commentaire

- La matrice P est obtenue comme concaténation des vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
- Ce n'est pas un hasard (on pourrait en dire autant des coefficients diagonaux de D) mais c'est un peu tôt pour en parler. Ceci sera détaillé dans le chapitre « Réduction ».

□

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^n P^{-1}$.

Démonstration.

Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$

où $\mathcal{P}(n) : A^n = PD^n P^{-1}$.

► **Initialisation :**

- D'une part : $A^0 = I$.
- D'autre part : $PD^0 P^{-1} = PIP^{-1} = PP^{-1} = I$.

D'où $\mathcal{P}(0)$.

► **Hérédité :** soit $n \in \mathbb{N}$.

Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* : $A^{n+1} = PD^{n+1} P^{-1}$).

Alors :

$$\begin{aligned}
 A^{n+1} &= A \times A^n \\
 &= A \times PD^n P^{-1} && \text{(par hypothèse de récurrence)} \\
 &= PDP^{-1} \times PD^n P^{-1} && \text{(d'après la question 2.b)} \\
 &= PD(P^{-1}P)D^n P^{-1} \\
 &= PDID^n P^{-1} \\
 &= PDD^n P^{-1} = PD^{n+1} P^{-1}
 \end{aligned}$$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

Par principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^n P^{-1}$.

Commentaire

On retrouve la même question que dans l'Exercice 10.
C'est une question classique qu'il faut savoir résoudre.

□

IV. Séance 4 : puissances d'une matrice via le binôme de Newton

Exercice 12

On note I la matrice identité d'ordre 3 et on considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer qu'il existe une unique matrice $H \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que : $A = I + 2H$.

Démonstration.

$$A = I + 2H \Leftrightarrow 2H = A - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice recherchée est $H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

□

2. Calculer H^2 , puis H^k pour tout $k \geq 2$.

Démonstration.

- Notons tout d'abord que : $H^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$H^2 = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$

- On en déduit, par une récurrence immédiate, que pour tout $k \geq 2$: $H^k = 0$.
(on peut aussi remarquer que, pour tout $k \geq 2$: $H^k = H^2 \times H^{k-2} = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})} \times H^{k-2} = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$)

Pour tout $k \geq 2$, $H^k = 0$.

□

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. À l'aide de la formule du binôme de Newton, exprimer A^n en fonction de I et de H .

Démonstration.

- Les matrices I et $2H$ commutent car I commute avec toute matrice carrée de même ordre.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned} (I + 2H)^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (2H)^k I^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k H^k && \text{(car on a : } \forall j \in \mathbb{N}, I^j = I) \\ &= \sum_{k=0}^1 \binom{n}{k} 2^k H^k + \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} 2^k H^k && \text{(ce découpage est valable car } n \geq 1) \\ &= \sum_{k=0}^1 \binom{n}{k} 2^k H^k && \text{(car pour tout } k \geq 2 : H^k = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}) \\ &= \binom{n}{0} 2^0 H^0 + \binom{n}{1} 2^1 H^1 \\ &= I + 2nH = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2n & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- Enfin : $(I + 2H)^0 = I$ et la formule précédente est donc aussi valable au rang $n = 0$.

On en déduit : $\forall n \in \mathbb{N}, (I + 2H)^n = I + 2n H$.

Commentaire

- La relation de Chasles stipule que pour tout $(m, p, n) \in \mathbb{N}^3$ tel que $m \leq p \leq n$:

$$\sum_{k=m}^n u_k = \sum_{k=m}^p u_k + \sum_{k=p+1}^n u_k$$

(la deuxième somme est nulle si $p = n$)

où (u_n) est une suite quelconque de réels ou de matrices de même taille.

- Dans cette question, on est dans le cas où $m = 0$ et $p = 1$.
L'argument $n \geq 1$ est donc nécessaire pour découper la somme.
Le cas $n = 0$ doit alors être traité à part.
- Ici, la matrice N vérifie : $\forall k \geq 2, H^k = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$. Elle est dite nilpotente d'indice 2 (ce terme n'est pas au programme et il est préférable de ne pas l'utiliser dans une copie). Si elle avait été nilpotente d'indice 3, il aurait fallu traiter à part les cas $n = 0$ mais aussi le cas $n = 1$. \square

Exercice 13

On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on note $E_\lambda(A) = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = \lambda X\}$.

1. Démontrer que la matrice $A - 2I$ est non inversible. Déterminer $E_2(A)$.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

La matrice $A - 2I$ possède deux colonnes égales : $C_1 = C_2$.

La matrice $A - 2I$ n'est donc pas inversible.

- Notons $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} X \in E_2(A) &\iff AX = 2X \\ &\iff (A - 2 \cdot I_3) X = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\ &\iff \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} 0 = 0 \\ x + y - z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases} \\ &\stackrel{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\iff} \begin{cases} x + y - z = 0 \\ x = -y + z \end{cases} \end{aligned}$$

- On en déduit :

$$\begin{aligned}
 E_2(A) &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = -y + z \right\} \\
 &= \left\{ \begin{pmatrix} -y + z \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid (y, z) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\
 &= \left\{ y \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid (y, z) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)
 \end{aligned}$$

$$E_2(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

□

2. Démontrer que P est inversible et déterminer son inverse P^{-1} .

Démonstration.

On applique l'algorithme du pivot de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

On effectue l'opération $\{ L_1 \leftrightarrow L_2 \}$. On obtient :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

On effectue l'opération $\{ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \}$. On obtient :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

On effectue l'opération $\{ L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \}$. On obtient :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

On effectue les opérations $\left\{ \begin{array}{l} L_1 \leftarrow 2L_1 + L_3 \\ L_2 \leftarrow 2L_2 + L_3 \end{array} \right.$. On obtient :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

On effectue les opérations $\begin{cases} L_1 \leftarrow \frac{1}{2} L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{2} L_2 \\ L_3 \leftarrow -\frac{1}{2} L_3 \end{cases}$. On obtient :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array} \right)$$

Ainsi P est inversible et $P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Commentaire

La première opération a consisté à échanger les lignes L_1 et L_2 . Grâce à cette opération, on place le réel 1 (utilisé ensuite comme pivot non nul) en haut à gauche de la matrice. □

3. Démontrer que la matrice $\Delta = P^{-1}AP$ est triangulaire supérieure et trouver $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\Delta = \alpha I + J$$

Démonstration.

• La matrice Δ est définie par :

$$\begin{aligned} \Delta = P^{-1}AP &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La matrice $\Delta = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ obtenue est bien triangulaire supérieure.

• On remarque alors :

$$\Delta - J = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I$$

La valeur $\alpha = 2$ permet d'écrire la matrice Δ sous la forme : $\Delta = \alpha I + J$. □

4. Soit $n \in \mathbb{N}$.

a) Calculer J^2 , puis J^k pour tout entier $k \geq 2$.

Démonstration.

• Tout d'abord :

$$J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- On en déduit, par une récurrence immédiate, que pour tout $k \geq 2 : J^k = 0$.
(on peut remarquer que, pour tout $k \geq 2 : J^k = J^2 \times J^{k-2} = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})} \times J^{k-2} = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$)

Pour tout $k \geq 2, J^k = 0$.

□

b) À l'aide de la formule du binôme de Newton, exprimer Δ^n en fonction de I et J .

Démonstration.

- Les matrices $2I$ et J commutent car I commute avec toute matrice carrée de même ordre.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned}
 (2I + J)^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (2I)^{n-k} J^k \\
 &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^{n-k} I^{n-k} J^k \\
 &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^{n-k} J^k && \text{(car on a : } \forall j \in \mathbb{N}, I^j = I) \\
 &= \sum_{k=0}^1 \binom{n}{k} 2^{n-k} J^k + \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} 2^{n-k} J^k && \text{(ce découpage est valable car } n \geq 1) \\
 &= \sum_{k=0}^1 \binom{n}{k} 2^{n-k} J^k && \text{(car pour tout } k \geq 2 : J^k = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}) \\
 &= \binom{n}{0} 2^n J^0 + \binom{n}{1} 2^{n-1} J^1 \\
 &= 2^n I + 2^{n-1} nJ = 2^{n-1} (2I + nJ) \\
 &= 2^{n-1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2n \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2^n \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

- Enfin : $(2I + J)^0 = I$ et la formule précédente est donc aussi valable au rang $n = 0$.

On en déduit : $\forall n \in \mathbb{N}, \Delta^n = (2I + J)^n = 2^n I + n2^{n-1} J$.

Commentaire

- La relation de Chasles stipule que pour tout $(m, p, n) \in \mathbb{N}^3$ tel que $m \leq p \leq n$:

$$\sum_{k=m}^n u_k = \sum_{k=m}^p u_k + \sum_{k=p+1}^n u_k$$

(la deuxième somme est nulle si $p = n$)

où (u_n) est une suite quelconque de réels ou de matrices de même taille.

- Dans cette question, on est dans le cas où $m = 0$ et $p = 1$.
L'argument $n \geq 1$ est donc nécessaire pour découper la somme.
Le cas $n = 0$ doit alors être traité à part.
- Ici, la matrice N vérifie : $\forall k \geq 2, J^k = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$. Elle est dite nilpotente d'indice 2 (ce terme n'est pas au programme et il est préférable de ne pas l'utiliser dans une copie). Si elle avait été nilpotente d'indice 3, il aurait fallu traiter à part les cas $n = 0$ mais aussi le cas $n = 1$. □

c) En déduire l'expression matricielle de A^n .

Démonstration.

- Par récurrence immédiate, on obtient que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$A^n = (P\Delta P^{-1})^n = P\Delta^n P^{-1}$$

Commentaire

On retrouve ici le résultat dont on s'est notamment servi dans l'Exercice 10. Ici, démontrer le résultat n'est pas l'objectif de la question mais un résultat intermédiaire qui n'est pas cité dans l'énoncé. On peut donc utiliser ce résultat directement, en précisant simplement qu'il se montre par récurrence.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente, on a :

$$\begin{aligned} A^n &= P\Delta^n P^{-1} = P(2^n I + n2^{n-1}J)P^{-1} \\ &= 2^n PIP^{-1} + n2^{n-1}PJP^{-1} \\ &= 2^n PP^{-1} + n2^{n-1}PJP^{-1} \\ &= 2^n I + n2^{n-1}PJP^{-1} \end{aligned}$$

- Enfin :

$$\begin{aligned} PJP^{-1} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = A - 2I \end{aligned}$$

Commentaire

On peut aussi faire ce calcul en revenant à l'écriture : $\Delta = 2I + J$. Ainsi, $J = \Delta - 2I$ et :

$$PJP^{-1} = P(\Delta - 2I)P^{-1} = P\Delta P^{-1} - 2PIP^{-1} = A - 2I$$

- En conclusion :

$$\begin{aligned} A^n &= 2^n I + n2^{n-1} (A - 2I) = (2^n - n2^n)I + n2^{n-1}A = (1 - n)2^n I + n2^{n-1}A \\ &= 2^{n-1} ((2 - 2n)I + nA) \\ &= 2^{n-1} \left(\begin{pmatrix} 2-2n & 0 & 0 \\ 0 & 2-2n & 0 \\ 0 & 0 & 2-2n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2n & 0 & 0 \\ n & 3n & -n \\ n & n & n \end{pmatrix} \right) \\ &= 2^{n-1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ n & 2+n & -n \\ n & n & 2-n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N} : A^n = 2^{n-1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ n & 2+n & -n \\ n & n & 2-n \end{pmatrix}.$$

□

Exercice 14

1. On considère les matrices suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Déterminer A^2 . Démontrer alors : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $A^k = 3^{k-1}A$.

Démonstration.

Tout d'abord :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Démontrons alors par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$

où $\mathcal{P}(n)$: $A^n = 3^{n-1}A$.

► **Initialisation** :

- D'une part : $A^1 = A$.
- D'autre part : $3^{1-1}A = 3^0A = A$.

D'où $\mathcal{P}(1)$.

► **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (i.e. : $A^{n+1} = 3^nA$).

Par hypothèse de récurrence : $A^n = 3^{n-1}A$.

Ainsi :

$$A^{n+1} = A \times A^n = 3^{n-1}A \times A = 3^{n-1}3A = 3^nA$$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

Par principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = 3^{n-1}A$.

□

b) Déterminer B^2 et B^3 . En déduire B^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Démonstration.

Tout d'abord :

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Puis :

$$B^3 = B^2 B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On en déduit, par une récurrence immédiate : $\forall k \geq 3$, $B^k = 0$.

□

c) Déterminer C^2 . Conjecturer une formule pour C^k et la démontrer.

Démonstration.

Tout d'abord :

$$C^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2C$$

Par mesure de sûreté, déterminons C^3 avant d'émettre une conjecture.

$$C^3 = C^2 C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Démontrons alors par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$

où $\mathcal{P}(n)$: $C^n = 2^{n-1} C$.

► **Initialisation** :

- D'une part : $C^1 = C$.
- D'autre part : $2^{1-1} C = 2^0 C = C$.

D'où $\mathcal{P}(1)$.

► **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (i.e. : $C^{n+1} = 2^n C$).

Par hypothèse de récurrence : $C^n = 2^{n-1} C$.

Ainsi :

$$C^{n+1} = C \times C^n = 2^{n-1} C \times C = 2^{n-1} 2C = 2^n C$$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

Par principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $C^n = 2^{n-1} C$.

□

2. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On considère la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

a) Écrire la matrice M en fonction des matrices $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Démonstration.

$$M = aI + bJ$$

□

b) À l'aide de la formule du binôme de Newton, déterminer M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration.

- Les matrices I et J commutent car I commute avec toute matrice carrée de même ordre.
- Soit $n \geq 2$. D'après la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned}
 M^n &= (aI + bJ)^n \\
 &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (aI)^{n-k} (bJ)^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} I^{n-k} \times b^k J^k \\
 &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} I \times b^k J^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k J^k && \text{(car on a : } \forall j \in \mathbb{N}, I^j = I) \\
 &= \sum_{k=0}^2 \binom{n}{k} a^{n-k} b^k J^k + \sum_{k=3}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k J^k && \text{(ce découpage est valable car } n \geq 2) \\
 &= \sum_{k=0}^2 \binom{n}{k} a^{n-k} b^k J^k && \text{(car on a montré : } \forall k \geq 3, J^k = 0) \\
 &= \binom{n}{0} a^n b^0 J^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 J + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 J^2 \\
 &= a^n I + n a^{n-1} b J + \frac{n(n-1)}{2} a^{n-2} b^2 J^2 \\
 &= \frac{a^{n-2}}{2} (2a^2 I + 2n ab J + n(n-1) b^2 J^2)
 \end{aligned}$$

- On calcule alors :

$$\begin{aligned}
 &2a^2 I + 2n ab J + n(n-1) b^2 J^2 \\
 &= 2a^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 2n ab \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + n(n-1) b^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 2a^2 & 2n ab & n(n-1) b^2 \\ 0 & 2a^2 & 2n ab \\ 0 & 0 & 2a^2 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

- Enfin :

× si $n = 0$, $T^0 = I$.

× si $n = 1$, $T^1 = T$.

Ainsi : $M^0 = I$, $M^1 = M$ et pour tout $n \geq 2$, $M^n = \frac{a^{n-2}}{2} \begin{pmatrix} 2a^2 & 2n ab & n(n-1) b^2 \\ 0 & 2a^2 & 2n ab \\ 0 & 0 & 2a^2 \end{pmatrix}$.

Commentaire

- La relation de Chasles stipule que pour tout $(m, p, n) \in \mathbb{N}^3$ tel que $m \leq p \leq n$:

$$\sum_{k=m}^n u_k = \sum_{k=m}^p u_k + \sum_{k=p+1}^n u_k$$

(la deuxième somme est nulle si $p = n$)

où (u_n) est une suite quelconque de réels ou de matrices de même taille.

- Dans cette question, on est dans le cas où $m = 0$ et $p = 2$.
L'argument $n \geq 2$ est donc nécessaire pour découper la somme.
Les cas $n = 0$ et $n = 1$ doivent alors être traités à part.
- Cette question sur le binôme de Newton matriciel est extrêmement classique aux concours et il faut donc savoir parfaitement la traiter. Généralement a et b sont des valeurs données ($a = 2$ et $b = 1$ à l'ESSEC III - 2007).

□

V. Séance 5 : algèbre théorique

Exercice 15

Soit E un espace vectoriel et soit f un endomorphisme de E ($f \in \mathcal{L}(E)$).

1) Démontrer : $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f) \Rightarrow f \circ f = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Démonstration.

Supposons $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f)$.

Il s'agit de démontrer : $f^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$ ce qui signifie : $\forall x \in E, f^2(x) = 0_E$.

Soit $x \in E$. Alors :

$$\begin{aligned} (f \circ f)(x) &= f(f(x)) \\ &= 0_E \quad (\text{car } f(x) \in \text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f)) \end{aligned}$$

Ainsi : $f \circ f = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

On a bien démontré : $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f) \Rightarrow f \circ f = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Commentaire

- Cet exercice est plus théorique que les précédents. L'endomorphisme f n'est pas connu. On connaît simplement des propriétés sur f et on cherche à en démontrer de nouvelles. Ce type d'exercice d'algèbre théorique peut donc paraître un peu abrupte. Pourtant, on se rend compte, à la lecture de cette démonstration, que de tels exercices peuvent donner lieu à des questions très simples. L'idée est ici de vérifier que les définitions de base (comme celles du noyau et de l'image d'une application linéaire) sont bien connues. En déroulant ces définitions, on obtient le résultat.
- Plus précisément, une telle question commence par la mise en place d'une structure de démonstration. Il faut savoir démontrer :
 - × une propriété quantifiée universellement : $\forall x \in E, p(x)$
Soit $x \in E \dots$
 - × une propriété quantifiée existentiellement : $\exists x \in E, p(x)$
(il s'agit alors d'exhiber un élément $x \in E$ qui vérifie la propriété p)
 - × une inclusion d'ensemble : $A \subset B$
Soit $x \in A \dots$ alors $x \in B$
 - × une égalité d'ensemble : $A = B$
(on procède par double inclusion à l'aide de la structure de démonstration précédente)
 - × une implication : $p \Rightarrow q$
Supposons p et démontrons q .
 - × une équivalence : $p \Leftrightarrow q$
(on procède par double implication à l'aide de la structure de démonstration précédente)
 Ce n'est qu'une fois la structure de démonstration en place que l'on déroule les définitions.
- On peut en profiter pour remarquer que l'étape d'hérédité d'une récurrence n'est qu'une illustration de ces structures de démonstration. Il s'agit de démontrer la proposition :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$$

En terme de rédaction, il n'y a donc guère le choix :

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$

2) Démontrer : $f \circ f = 0_{\mathcal{L}(E)} \Rightarrow \text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f)$.

Démonstration.

Supposons $f \circ f = 0_{\mathcal{L}(E)}$ (c'est-à-dire : $\forall x \in E, (f \circ f)(x) = 0_E$). Démontrons $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f)$.

Soit $y \in \text{Im}(f)$. Il existe donc $x \in E$ tel que : $y = f(x)$.

Il s'agit de démontrer $y \in \text{Ker}(f)$. Or :

$$\begin{aligned} f(y) &= f(f(x)) \\ &= (f \circ f)(x) = 0_E \quad (\text{car } f \circ f = 0_{\mathcal{L}(E)}) \end{aligned}$$

Ainsi, $y \in \text{Ker}(f)$.

On en conclut : $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f)$.

On a bien démontré : $f \circ f = 0_{\mathcal{L}(E)} \Rightarrow \text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f)$.

Commentaire

- Insistons sur la facilité de cette démonstration. Comme expliqué dans la remarque précédente, il s'agit essentiellement de mettre en place la structure de démonstration et de dérouler les définitions.
- Précisons la manière d'agir.

1 Soit $y \in \text{Im}(f)$.
2 Il existe donc $x \in E$ tel que : $y = f(x)$. Alors :
3 $f(y) = \dots$
4 $\quad \quad \quad = \dots$
5 $\quad \quad \quad = 0_E$
6 Ainsi, $y \in \text{Ker}(f)$.

- × Les lignes 1 et 6 correspondent à la mise en place de la structure de démonstration : il s'agit de démontrer une inclusion. On choisit donc un élément dans $\text{Im}(f)$ et on démontre qu'il est dans $\text{Ker}(f)$.
- × La ligne 2 correspond au déroulé de la définition de l'image d'une application. Dire : $y \in \text{Im}(f)$ c'est exactement dire que y s'écrit sous la forme $f(x)$ pour un $x \in E$.
- × La ligne 3 correspond au déroulé de la définition du noyau d'une application linéaire. Dire : $y \in \text{Ker}(f)$ c'est exactement dire : $f(y) = 0_E$. Cela permet d'écrire le début de la ligne 3 ainsi que le résultat en ligne 5.

C'est seulement à ce moment que l'on rentre dans la phase de démonstration à proprement parler et que l'on s'intéresse aux hypothèses (ici, le fait que l'on ait : $f^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$).

- Le message est clair : sur les 6 lignes de rédaction, 4 proviennent de la présentation et seules 2 correspondent à la démonstration. Il n'est donc pas acceptable de ne pas savoir **commencer** ce type de questions, car cela démontre un défaut de connaissance du cours (définitions du chapitre et / ou structures de démonstration). □

3) Conclure.

Démonstration.

On a démontré, par double implication :
 $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f) \Leftrightarrow f \circ f = 0_{\mathcal{L}(E)}$

□