Interrogation de rentrée

On traitera obligatoirement les exercices 1, 2 et 3, et on les traitera dans cet ordre. L'exercice 4 pourra être abordé dans un second temps.

Exercice 1. *Rayer la ou les mentions inutiles*

1. Dans l'écriture $f : x \mapsto 1 + x$, la variable x est : ~~libre~~ / liée

La variable x est muette car c'est la variable de définition de la fonction (une fonction est un mécanisme d'association : à chaque valeur de x est associée une image par la fonction).

2. Dans l'écriture $\big([X = i]\big)_{i\in[\![1,n]\!]}$, la variable i est : ~~libre~~ / liée

et la variable n est : libre / ~~liée~~

La variable i est muette (on considère ici, pour tout les entiers i de $[\![1, n]\!]$, les événements $[X = i]$). La variable n est libre (elle n'est sous la portée d'aucun quantificateur ni de symbole mathématique).

3. Le résultat de la quantité $\sum\limits_{i=1}^{k} i$ dépend de : $\cancel{i}$ / k / ~~ni i ni k~~

La variable i est muette car c'est la variable de sommation (elle est donc sous la portée d'un symbole de sommation $\sum$).

La variable k est libre (elle n'est sous la portée d'aucun quantificateur ni de symbole mathématique). Une fois le calcul effectué, le résultat dépendra seulement de la variable k.

4. Une variable muette est : ~~libre~~ / liée

5. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite admettant une limite (finie ou non), la quantité $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$: ~~dépend de n~~ / ne dépend par de n / ~~peut dépendre de n~~

Rappelons quelques définitions :

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \text{ (où } \ell \in \mathbb{R}) &\quad\Leftrightarrow\quad \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\quad (n \geqslant n_0 \ \Rightarrow\ |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon)\\
\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty &\quad\Leftrightarrow\quad \forall A \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\quad (n \geqslant n_0 \ \Rightarrow\ u_n \geqslant A)\\
\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty &\quad\Leftrightarrow\quad \forall A \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\quad (n \geqslant n_0 \ \Rightarrow\ u_n \leqslant A)
\end{aligned}$$

La variable n est donc muette car, dans tous les cas, elle est sous la portée d'un quantificateur.

6. Dans l'écriture $\displaystyle\int_0^x f(t)\ dt$, la variable t est : ~~libre~~ / liée

la variable x est : libre / ~~liée~~

La variable t est muette car c'est la variable d'intégration (elle est donc sous la portée d'un symbole d'intégration $\displaystyle\int$).

La variable x est libre (elle n'est sous la portée d'aucun quantificateur ni de symbole mathématiques).

7. Dans l'écriture $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0 \ \text{ et } \ y = 0\}$,
la variable x est : ~~libre~~ / liée
la variable y est : ~~libre~~ / liée
la variable z est : ~~libre~~ / liée
Les variables x, y et z sont muettes (on s'intéresse ici à tous les réels x, y et z vérifiant une condition donnée).

8. Dans l'écriture : $\forall x \in \mathbb{R}_+, \exists y \in \mathbb{R},\ x = y^2$,
la variable x est : ~~libre~~ / liée
la variable y est : ~~libre~~ / liée
Les variables x et y sont muettes car elles sont sous la portée d'un quantificateur.

9. Une variable libre : ~~doit toujours~~ / ~~ne doit jamais~~ / doit parfois être introduite par un « Soit »

Une variable libre doit parfois être introduite par un « Il existe ».

10. Une variable liée : ~~doit toujours~~ / ne doit jamais / ~~doit parfois~~ être introduite par un « Soit »

Une variable muette ne doit jamais être quantifiée.

Exercice 2 Pour chacune des expressions suivantes :

(i) déterminer si elle désigne une proposition ou un objet. Si c'est un objet, précisez de quel type d'objet il s'agit (réel, fonction, suite, série, ensemble).

(ii) indiquer, pour chaque variable en présence, si elle est libre ou liée.

Démonstration.

1. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n}\ dx$

(i) Il s'agit d'un réel.

(ii) La variable x est muette car c'est la variable d'intégration (elle est donc sous la portée d'un symbole d'intégration $\int$).
La variable n est libre (elles n'est sous la portée d'aucun quantificateur ni de symbole mathématique).

$$\boxed{\text{Une fois le calcul effectué, le résultat dépendra seulement de la variable } n.}$$

2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^x}{1+t}\,dt$

(i) Il s'agit d'un réel.

(ii) La variable t est muette car c'est la variable d'intégration (elle est donc sous la portée d'un symbole d'intégration $\int$).
La variable x est libre (elles n'est sous la portée d'aucun quantificateur ni de symbole mathématique).

Une fois le calcul effectué, le résultat dépendra seulement de la variable x.

3. $f : t \mapsto e^{-t}$

(i) Il s'agit d'une fonction réelle d'une variable réelle.

(ii) La variable t est muette car c'est la variable de définition de la fonction (une fonction est un mécanisme d'association : à chaque valeur de t est associée une image par la fonction).
La variable f est libre (elle n'est sous la portée d'aucun quantificateur ni symbole mathématique).

On a ici affaire à une fonction dont l'évaluation en un réel donné dépend seulement de l'expression de f.

4. $f(x)$

(i) Il s'agit d'un réel (et non pas d'une fonction !).

(ii) Les variables f et x sont libres (elles ne sont sous la portée d'aucun quantificateur ni de symbole mathématique).

On a ici affaire à l'évaluation d'une fonction en un point x.
Une fois le calcul effectué, le résultat dépendra de l'expression de f et de la variable x.

5. $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0\}$

(i) Il s'agit d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.

(ii) La variable x est muette (on s'intéresse ici à tous les réels x vérifiant une condition donnée).

On a ici affaire à un ensemble qui ne dépend d'aucune variable.

Commentaire

Notons que cette conclusion est bien rassurante puisque l'ensemble $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0\}$ n'est autre que l'ensemble $\mathbb{R}_+$ (ou $[0, +\infty[$), notations qui ne font pas apparaître de dépendance en une variable x.

6. $\displaystyle\sum_{i=j}^{n} (i+j)^3$

(i) Il s'agit d'un réel.

(ii) La variable i est muette car c'est la variable de sommation (elle est donc sous la portée d'un symbole d'intégration $\sum$).

Les variables n et j sont libres (elles ne sont sous la portée d'aucun quantificateur ni de symbole mathématique).

Une fois le calcul effectué, le résultat dépendra seulement des variables n et j.

7. $\sum_{j=0}^{n} \sum_{i=j}^{n} (i+j)^3$

(i) Il s'agit d'un réel.

(ii) Dans la somme $\sum_{i=j}^{n} (i+j)^3$, seule la variable i est muette car c'est la variable de sommation. Les variables n et j sont libres. Ainsi, le résultat de cette somme ne dépendra que de n et j. On peut donc noter $R(n, j) = \sum_{i=j}^{n} (i+j)^3$.

Dans la somme $\sum_{j=0}^{n} R(n, j) = \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=j}^{n} (i+j)^3$, la variable j est muette car c'est la variable de sommation et la variable n est libre.

Finalement, une fois le calcul effectué, le résultat dépendra seulement de la variable n.

8. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

(i) Il s'agit d'une suite.

(ii) La variable n est muette (on considère ici la valeur de la suite u à tous les rangs n entiers).

La suite u (autre notation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$) ne dépend d'aucune variable.

9. $\sum_{n=3}^{+\infty} u_n$

(i) Si la série $\sum_{n\geqslant 3} u_n$ est convergente (dans le cas contraire, l'objet considéré dans cette question n'est pas défini), la notation $\sum_{n=3}^{+\infty} u_n$ désigne la somme de cette série. Il s'agit alors d'un réel.

(ii) La variable n est muette car c'est la variable de sommation (elle est donc sous la portée d'un symbole d'intégration $\sum$).

Cette somme ne dépend d'aucune variable.

10. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \geqslant \ln(2)$

(i) Il s'agit d'une proposition mathématique quantifiée universellement.

(ii) La variable n est muette car elle est sous la portée d'un quantificateur.

La valeur de vérité de cette proposition mathématique ne dépend d'aucune variable.

11. $\mathcal{P}(n)$

(i) Il s'agit d'une proposition mathématique qui n'est pas quantifiée.

(ii) Les variables $\mathcal{P}$ et n sont libres (elles ne sont sous la portée d'aucun quantificateur ni de symbole mathématique).

La valeur de vérité de cette proposition mathématique dépend de la proposition $\mathcal{P}$ ainsi que du rang n où elle est évaluée.

12. $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)$

(i) Il s'agit d'une proposition mathématique quantifiée universellement.

(ii) La variable n est muette car elle est sous la portée d'un quantificateur.
La variable $\mathcal{P}$ est libre (elle n'est sous la portée d'aucun quantificateur ni de symbole mathématique).

$$\boxed{\text{La valeur de vérité de cette proposition mathématique dépend seulement de la proposition } \mathcal{P} \text{ considérée.}}$$

□

Exercice 3

1. a) Résoudre le système suivant : $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2\,y & + & z & = & 0 \\ 2\,x & + & 4\,y & + & 2\,z & = & 0 \\ -x & - & 2\,y & - & z & = & 0 \end{array}\right.$.

Démonstration.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2\,y & + & z & = & 0 \\ 2\,x & + & 4\,y & + & 2\,z & = & 0 \\ -x & - & 2\,y & - & z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\overset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2\,L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1}}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2\,y & + & z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \quad \left\{\ x + 2\,y + z = 0\right.$$

$$\Longleftrightarrow \quad \left\{\ x = -2\,y - z\right.$$

□

b) On note : $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$. Déterminer $E_{-1}(A) = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = -X\}$.

Démonstration.

- Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On a alors :

$$\begin{array}{rcl} X \in E_{-1}(A) & \Leftrightarrow & AX = -X \\ & \Leftrightarrow & (A+I)\,X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\ & \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & \Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2\,y & + & z & = & 0 \\ 2\,x & + & 4\,y & + & 2\,z & = & 0 \\ -x & - & 2\,y & - & z & = & 0 \end{array}\right. \\ & \Leftrightarrow & \left\{\ x = -2\,y - z\right. \qquad \textit{(d'après la question précédente)} \end{array}$$

- On en déduit :

$$\begin{array}{rcl}
E_{-1}(A) & = & \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = -2\,y - z \right\} \\[1em]
& = & \left\{ \begin{pmatrix} -2\,y - z \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid (y,z) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\[1em]
& = & \left\{ y \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid (y,z) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\[1em]
& = & \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)
\end{array}$$

$$\boxed{E_{-1}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)}$$

□

2. a) Résoudre le système suivant : $\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & 2\,z & = & 0 \\ 2\,x & - & y & + & 3\,z & = & 0 \\ 5\,x & - & 3\,y & + & 8\,z & = & 0 \end{array} \right.$.

Démonstration.

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & 2\,z & = & 0 \\ 2\,x & - & y & + & 3\,z & = & 0 \\ 5\,x & - & 3\,y & + & 8\,z & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - 5\,L_1}{\overset{L_2 \leftarrow L_2 - 2\,L_1}{\iff}} \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & 2\,z & = & 0 \\ & & y & - & z & = & 0 \\ & & 2\,y & - & 2\,z & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\overset{L_3 \leftarrow L_3 - 2\,L_2}{\iff} \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & 2\,z & = & 0 \\ & & y & - & z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & 2\,z & = & 0 \\ & & y & - & z & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcrcr} x & - & y & = & -2\,z \\ & & y & = & z \end{array} \right.$$

$$\overset{L_1 \leftarrow L_1 + L_2}{\iff} \left\{ \begin{array}{rcrcr} x & & & = & -z \\ & & y & = & z \end{array} \right.$$

□

b) On note : $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & -3 & 10 \end{pmatrix}$. Déterminer $E_2(A) = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = 2 \cdot X\}$.

Démonstration.

- Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On a alors :

$$\begin{array}{rcl} X \in E_2(A) & \Leftrightarrow & AX = 2 \cdot X \\ & \Leftrightarrow & (A - 2 \cdot I)\, X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\ & \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 5 & -3 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & 2\,z & = & 0 \\ 2\,x & - & y & + & 3\,z & = & 0 \\ 5\,x & - & 3\,y & + & 8\,z & = & 0 \end{array} \right. \\ & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcr} x & & & = & -z \\ & & y & = & z \end{array} \right. \qquad \textit{(d'après la question précédente)} \end{array}$$

- On en déduit :

$$\begin{array}{rcl} E_2(A) & = & \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = -z \ \texttt{ ET } \ y = z \} \\ & = & \{ \begin{pmatrix} -z \\ z \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid z \in \mathbb{R} \} \\ & = & \{ z \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \} \\ & = & \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \end{array}$$

$$\boxed{E_2(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)}$$

□

3. Résoudre le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2\,x & - & 2\,y & + & z & = & 0 \\ -x & - & y & + & z & = & 0 \\ x & + & 2\,y & - & 3\,z & = & 0 \end{array}\right.$$

Démonstration.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2\,x & - & 2\,y & + & z & = & 0 \\ -x & - & y & + & z & = & 0 \\ x & + & 2\,y & - & 3\,z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\underset{L_3 \leftarrow 2\,L_3 - L_1}{\overset{L_2 \leftarrow 2\,L_2 + L_1}{\iff}} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2\,x & - & 2\,y & + & z & = & 0 \\ & - & 4\,y & + & 3\,z & = & 0 \\ & & 6\,y & - & 7\,z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\overset{L_3 \leftarrow 2\,L_3 + 3\,L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2\,x & - & 2\,y & + & z & = & 0 \\ & - & 4\,y & + & 3\,z & = & 0 \\ & & & - & 5\,z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ccccl} x & & & = & 0 \\ & y & & = & 0 \\ & & z & = & 0 \end{array}\right.$$

(par remontées successives)

□

Exercice 4
Dans tout l'exercice, p désigne un réel de $]0,1[$ et on pose : $q = 1 - p$.
Toutes les variables aléatoires considérées dans cet exercice sont supposées définies sur un même espace probabilisé noté $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.
On considère en particulier une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$, dont la loi est donnée par :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}\big([X = k]\big) \; = \; q^k \, p \; = \; (1-p)^k \, p$$

PARTIE A

1. Montrer que la variable aléatoire $Y = X + 1$ suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre.

Démonstration.

- Tout d'abord, d'après l'énoncé : $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$. D'où : $Y(\Omega) = (X+1)(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$.
- Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$$\mathbb{P}\big([Y = k]\big) \; = \; \mathbb{P}\big([X + 1 = k]\big) \; = \; \mathbb{P}\big([X = k - 1]\big) \; = \; q^{k-1} \, p$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } Y \hookrightarrow \mathcal{G}(p).}$$

□

2. En déduire que X admet une espérance et une variance, et préciser $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

Démonstration.

- D'après la question précédente : $Y \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$. La v.a.r. Y admet donc une variance (et donc une espérance).
  On en déduit que la v.a.r. $X = Y - 1$ admet une variance (et donc une espérance) en tant que transformée affine d'une v.a.r. qui en admet une.

$$\boxed{\text{La v.a.r. } X \text{ admet une espérance et une variance.}}$$

- De plus :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \mathbb{E}(Y - 1) \\ &= \mathbb{E}(Y) - 1 && \textit{(par linéarité de l'espérance)} \\ &= \frac{1}{p} - 1 && \textit{(car } Y \hookrightarrow \mathcal{G}(p)\textit{)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathbb{E}(Y) = \frac{1-p}{p} = \frac{q}{p}}$$

- Enfin :

$$\mathbb{V}(X) \; = \; \mathbb{V}(Y - 1) \; = \; \mathbb{V}(Y) \; = \; \frac{q}{p^2} \qquad \textit{(car } Y \hookrightarrow \mathcal{G}(p)\textit{)}$$

$$\boxed{\mathbb{V}(X) = \frac{q}{p^2}}$$

□

3. Compléter la fonction **Scilab** suivante afin que, prenant en entrée le réel p, elle renvoie une simulation de la variable aléatoire X.

```
1 function X = simule_X(p)
2     Y = ......
3     while ......
4         Y = Y + 1
5     end
6     X = Y - 1
7 endfunction
```

Démonstration.
On propose de compléter la fonction de la manière suivante :

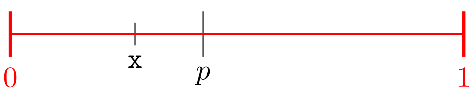
```
1 function X = simule_X(p)
2     Y = 1
3     while rand() > p
4         Y = Y + 1
5     end
6     X = Y - 1
7 endfunction
```

Détaillons les éléments de ce script.

- **Début de la fonction**
  On commence par préciser la structure de la fonction :
  × cette fonction se nomme `simule_X`,
  × elle prend en entrée le paramètre `p`,
  × elle admet pour variable de sortie la variable `X`.

```
1 function X = simule_X(p)
```

- **Contenu de la fonction**
  Les lignes 2 à 5 consistent à simuler la v.a.r. Y de loi $\mathcal{G}(p)$, et de stocker ce résultat dans la variable `Y`. Ceci peut se faire à l'aide de `rand()`, instruction qui sert à simuler une v.a.r. U qui suit la loi $\mathcal{U}(]0,1[)$. Détaillons la manière de procéder.
  On commence par choisir aléatoirement un réel (notons-le `x`) dans $]0,1[$:



Cette valeur `x` obtenue est plus petite que p avec probabilité : $\mathbb{P}\big([U \leqslant p]\big) = p$.
Cette valeur `x` est strictement plus grande que p avec probabilité :

$$\mathbb{P}\big([U > p]\big) = 1 - \mathbb{P}\big([U \leqslant p]\big) = 1 - p$$

On peut ainsi simuler une épreuve de Bernoulli de paramètre de succès p : si $rand() \leqslant$ `p` alors il y a succès (ce qui se produit avec probabilité `p`) et si $rand() >$ `p` alors il y a échec (ce qui se produit avec probabilité $1-$ `p`).

Cela permet de simuler la v.a.r. Y :

(i) on initialise tout d'abord à 1 un compteur permettant de mémoriser le numéro de l'épreuve de Bernoulli à venir.

```
    Y = 1
```

(ii) on teste si l'épreuve résulte en un échec. Tant que c'est le cas, on doit réitérer l'expérience.

```
    while rand() > p
```

À chaque nouvelle expérience, on doit mettre à jour le compteur `Y` qui stocke le numéro de l'épreuve à venir.

```
    while rand() > p
        Y = Y + 1
    end
```

On sort de la boucle en cas de réussite de l'épreuve de Bernoulli. Les mises à jour successives du compteur `Y` assurent que cette variable contient le rang du premier succès dans la succesion d'épreuves de Bernoulli effectuées. Autrement dit, `Y` contient une simulation de la v.a.r. Y

- **Fin de la fonction**
  Pour simuler la v.a.r. X, il reste alors à utiliser la relation entre les v.a.r. X et Y : $X = Y - 1$.

```
    X = Y - 1
```

Commentaire

Afin de permettre une bonne compréhension des mécanismes en jeu, on a détaillé la réponse à cette question. Cependant, compléter correctement le script **Scilab** démontre la bonne compréhension de la simulation demandée et permet certainement d'obtenir la majorité des points alloués à cette question.
On procèdera de même dans les autres questions **Scilab**.

PARTIE B

Un casino a conçu une nouvelle machine à sous dont le fonctionnement est le suivant :

- le joueur introduit un nombre k de jetons de son choix ($k \in \mathbb{N}$), puis il appuie sur un bouton pour activer la machine ;
- si k est égal à 0, alors la machine ne reverse aucun jeton au joueur ;
- si k est un entier supérieur ou égal à 1, alors la machine définit k variables aléatoires $X_1, \ldots, X_k$, toutes indépendantes et de même loi que la variable aléatoire X étudiée dans la partie A, et reverse au joueur $(X_1 + \cdots + X_k)$ jetons ;
- les fonctionnements de la machine à chaque activation sont indépendants les uns des autres et ne dépendent que du nombre de jetons introduits.

Le casino s'interroge sur la valeur à donner à p pour que la machine soit attractive pour le joueur, tout en étant rentable.
Le casino imagine alors le cas d'un joueur invétéré qui, avant chaque activation, place l'intégralité de ses jetons dans la machine, et continue de jouer encore et encore.

On note, pour tout n de $\mathbb{N}$, Z_n la variable aléatoire égale au nombre de jetons dont dispose le joueur après n activations de la machine.
On suppose que le joueur commence avec un seul jeton ; ainsi : $Z_0 = 1$.
On remarque en particulier que Z_1 suit la même loi que X.

4. Compléter la fonction **Scilab** suivante afin que, prenant en entrée un entier n de $\mathbb{N}$ et le réel p, elle simule l'expérience aléatoire et renvoie la valeur de Z_n.
Cette fonction devra utiliser la fonction `simule_X`.

```
1  function Z = simule_Z(n, p)
2      Z = 1
3      for i = 1 : n
4          s = 0
5          for j = 1 : Z
6              ......
7          end
8          Z = ......
9      end
10 endfunction
```

Démonstration.
On propose de compléter la fonction de la manière suivante :

```
1  function Z = simule_Z(n, p)
2      Z = 1
3      for i = 1 : n
4          s = 0
5          for j = 1 : Z
6              s = s + simule_X(p)
7          end
8          Z = s
9      end
10 endfunction
```

Détaillons les éléments de ce script.

- **Début de la fonction**
  On commence par préciser la structure de la fonction :
  × cette fonction se nomme `simule_Z`,
  × elle prend en entrée les paramètres `n` et `p`,
  × elle admet pour variable de sortie `Z`.

```
1  function Z = simule_Z(n, p)
```

En ligne 2, la variable `Z`, qui contiendra une simulation de la v.a.r. Z_n, est initialisée à 1 : la valeur prise par la v.a.r. Z_0.

```
2      Z = 1
```

- **Structure itérative**
  Les lignes 3 à 9 consistent, au fur et à mesure des activations de la machine, à mettre à jour la variable `Z` pour qu'elle contienne successivement une réalisation de Z_1, Z_2, ..., Z_n. Pour cela on met en place une structure itérative (boucle `for`) :

```
3      for i = 1 : n
```

× Si la variable Z contient la valeur k à l'issue du $i^{\text{ème}}$ tour de boucle, alors c'est que la v.a.r. Z_i prend la valeur k. Autrement dit, avant la $(i+1)^{\text{ème}}$ activation de la machine, le joueur possède k jetons.
D'après l'énoncé, le joueur les insère alors tous dans la machine. Toujours d'après l'énoncé, la machine simule alors k v.a.r. $X_1, \dots, X_k$ indépendantes et de même loi que X. Et dans ce cas, le nombre de jetons obtenus par le joueur à l'issue de la $(i+1)^{\text{ème}}$ activation de la machine est une simulation de la v.a.r. $X_1 + \cdots + X_k$. Autrement dit Z_{i+1} prend la même valeur que $X_1 + \cdots + X_k$.
Pour mettre à jour la variable Z, il faut donc :

1) simuler la v.a.r. $X_1 + \cdots + X_k$. On stockera la valeur de cette simulation dans la variable s.

2) mettre à jour la variable Z pour qu'elle contienne la même valeur que la variable s.

Détaillons la manière de procéder.

1) (i) En ligne 4, on commence par initialiser la variable s à 0 (choix naturel d'initialisation lorsqu'on souhaite coder une somme puisque 0 est l'élément neutre de l'opérateur de sommation).

```
4        s = 0
```

(ii) Les lignes 5 à 7 permettent de mettre à jour la variable s pour qu'elle contienne une simulation de la somme $X_1 + \cdots + X_k$, où k est la valeur stockée dans la variable Z. Pour cela on met en place une structure itérative (boucle for) et on utilise la fonction simule_X définie en question précédente pour obtenir des simulations de $X_1, \dots, X_k$ qui sont indépendantes et de même loi que X.

```
5        for j = 1 : Z
6            s = s + simule_X(p)
7        end
```

2) On met enfin à jour la variable Z pour qu'elle contienne la même valeur que la variable s.

```
8        Z = s
```

- **Fin de la fonction**
À l'issue de la $1^{\text{ère}}$ boucle (sur i), la variable Z contient une simulation de la v.a.r. Z_n.

□

On définit, pour tout n de $\mathbb{N}$, u_n la probabilité que le joueur n'ait plus de jeton après n activations de la machine ; ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \mathbb{P}\big([Z_n = 0]\big)$.
On note également R l'événement : « le joueur finit par ne plus avoir de jeton ».

5. a) Préciser les valeurs de u_0 et de u_1.

Démonstration.

- Tout d'abord, comme Z_0 est la variable aléatoire constante égale à 1, alors :

$$u_0 \;=\; \mathbb{P}\big([Z_0 = 0]\big) \;=\; \mathbb{P}(\varnothing) \;=\; 0$$

$$\boxed{u_0 = 0}$$

- D'après l'énoncé, la v.a.r. Z_1 suit la même loi que la v.a.r. X. Ainsi :

$$u_1 \;=\; \mathbb{P}\big([Z_1 = 0]\big) \;=\; \mathbb{P}\big([X = 0]\big) \;=\; q^0\,p \;=\; p$$

$$\boxed{u_1 = p}$$

□

b) Comparer, pour tout n de $\mathbb{N}$, les événements $[Z_n = 0]$ et $[Z_{n+1} = 0]$.
En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone et convergente.

Démonstration.

- Soit $n \in \mathbb{N}$.
Si l'événement $[Z_n = 0]$ est réalisé, c'est que le joueur n'a plus de jetons après n activations de la machine. Si c'est le cas, il n'aura pas non plus de jetons après $(n+1)$ activations. En effet, la machine ne verse aucun jeton au joueur s'il n'en insère pas. On en déduit que l'événement $[Z_{n+1} = 0]$ est réalisé.

$$\boxed{\text{On obtient : } \forall n \in \mathbb{N},\ [Z_n = 0] \subset [Z_{n+1} = 0].}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{array}{rccll} & [Z_n = 0] & \subset & [Z_{n+1} = 0] & \\ \text{donc} & \mathbb{P}\big([Z_n = 0]\big) & \leqslant & \mathbb{P}\big([Z_{n+1} = 0]\big) & \textit{(par croissance de } \mathbb{P}\textit{)} \\ \text{d'où} & u_n & \leqslant & u_{n+1} & \end{array}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que la suite } (u_n) \text{ est croissante.}}$$

- La suite (u_n) est donc :
  - $\times$ croissante,
  - $\times$ majorée par 1. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = \mathbb{P}\big([Z_n = 0]\big) \leqslant 1$.

$$\boxed{\text{On en déduit que la suite } (u_n) \text{ est convergente.}}$$

□

Dans la suite de l'exercice, on note : $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

6. Justifier : $\mathbb{P}(R) = \ell$.

Démonstration.

- Remarquons :

L'événement R est réalisé

$\Leftrightarrow$ Le joueur finit par ne plus avoir de jetons

$\Leftrightarrow$ Il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que le joueur n'a plus de jetons après la $n^{\text{ème}}$ activation

$\Leftrightarrow$ $\exists n \in \mathbb{N}^*$, $[Z_n = 0]$ est réalisé

$\Leftrightarrow$ Après la $1^{\text{ère}}$ activation, le joueur n'a plus de jetons
`OU` après la $2^{\text{ème}}$ activation, le joueur n'a plus de jetons
`OU` après la $3^{\text{ème}}$ activation, le joueur n'a plus de jetons
... ...
`OU` après la $n^{\text{ème}}$ activation, le joueur n'a plus de jetons
... ...

$\Leftrightarrow$ L'événement $\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} [Z_n = 0]$ est réalisé

$$\boxed{\text{On en déduit : } R = \bigcup_{n=1}^{+\infty} [Z_n = 0].}$$

- On en déduit :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(R) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} [Z_n = 0]\right) \\ &= \lim_{N\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{N} [Z_n = 0]\right) \quad \textit{(d'après le théorème de la limite monotone)} \end{aligned}$$

Or, d'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$[Z_n = 0] \subset [Z_{n+1} = 0]$$

On en conclut :

$$\bigcup_{n=1}^{N} [Z_n = 0] = [Z_N = 0] \quad \textit{(la suite } \big([Z_n = 0]\big)_{n\in\mathbb{N}} \textit{ est une suite croissante d'événements)}$$

- Finalement :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(R) &= \lim_{N\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{N} [Z_n = 0]\right) \\ &= \lim_{N\to+\infty} \mathbb{P}\big([Z_N = 0]\big) \\ &= \lim_{N\to+\infty} u_N \quad \textit{(par définition de } u_N\textit{)} \\ &= \ell \quad \textit{(d'après la question précédente)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \mathbb{P}(R) = \ell.}$$

Commentaire

- Afin de résoudre un exercice de calcul de probabilités, il faudra penser au schéma suivant.

1) Introduire des événements simples (« tirer une boule blanche au $i^{\text{ème}}$ tirage », « obtenir Pile au $i^{\text{ème}}$ lancer ...) liés à l'expérience considérée.
Nommer l'événement A dont on cherche à déterminer la probabilité.
(ces deux étapes sont parfois directement données dans l'énoncé)

2) Décomposer l'événement A à l'aide d'événements simples.

3) Deux cas se présentent alors :

(i) si cette décomposition fait apparaître une union, il faut retenir le triptyque :

$$\boxed{\text{union / incompatibilité / somme}}$$

Dans le cas d'une union finie d'événements

- Si cela est possible, on simplifie cette union (cas d'une union d'une suite croissante d'événements par exemple).
- Sinon, on vérifie si les événements sont 2 à 2 incompatibles.
  - × si c'est le cas, on utilise l'additivité de $\mathbb{P}$.
  - × si ce n'est pas le cas, on peut penser à utiliser la formule du crible.

Commentaire

Dans le cas d'une union infinie d'événements

- On vérifie si les événements sont 2 à 2 incompatibles :

  × si c'est le cas, on utilise la σ-additivité de $\mathbb{P}$.

  × si ce n'est pas le cas, on se ramène au cas d'une union finie d'événements en utilisant le corollaire du théorème de la limite monotone.

Si toutes ces tentatives échouent, on peut se ramener au cas d'une intersection d'événements en considérant l'événements contraire.

(ii) si cette décomposition fait apparaître une intersection, il faut retenir le triptyque :

$$\boxed{\text{intersection / indépendance / produit}}$$

Dans le cas d'une intersection finie d'événements

- Si cela est possible, on simplifie cette intersection (cas d'une intersection d'une suite décroissante d'événements par exemple).
- Sinon, on vérifie si les événements sont mutuellement indépendants.

  × si c'est le cas, on utilise la formule associée.

  × si ce n'est pas le cas, on peut penser à utiliser la formule des probabilités composées.

- Dans un exercice de probabilités discrètes, il est assez fréquent de considérer des expériences qui font intervenir un nombre infini d'étapes. Dès lors, il est assez naturel de s'interroger sur la probabilité qu'une propriété puisse se réaliser une infinité (successive) de fois ou qu'une propriété soit réalisé au moins une fois au cours de l'expérience. Cela revient à considérer des événements qui s'écrivent à l'aide d'une union et / ou d'une intersection infinie d'événements. Pour déterminer la probabilité de tels événements, la méthode usuelle consiste à utiliser le théorème de la limite monotone. Il stipule, si $(A_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une suite d'événements :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} A_k\right) &= \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right)\\ \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k\right) &= \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)\end{aligned}$$

  Il est à noter qu'aucune hypothèse n'est faite sur la suite (A_k) d'événements. Elle peut être une suite croissante ou décroissante d'événements ou n'être ni décroissante, ni croissante. Cette question de la monotonie de la suite ne se pose pas lors de l'utilisation du théorème de la limite monotone. Elle n'apparaît que dans l'étape suivante où l'on cherche à déterminer la probabilité d'une intersection / union **finie** d'événements.

- On a vu dans le point précédent que certaines propriétés s'expriment naturellement à l'aide d'une union / intersection infinie d'événements. En conséquence, l'utilisation du théorème de la limite monotone est assez fréquente aux concours. Lors de la session `2021`, les sujets `ECRICOME`, `EDHEC`, `ESSEC-I`, `ESSEC-II` contenaient tous une question qui nécissitait l'utilisation de ce théorème. □

7. a) Montrer que, pour tout k de $\mathbb{N}$, on a : $\mathbb{P}_{[Z_1=k]}\big([Z_2=0]\big) = (u_1)^k$.

Démonstration.
Soit $k \in \mathbb{N}$.

- Si l'événement $[Z_1 = k]$ est réalisé, c'est que le joueur possède k jeton après la 1ère activation de la machine. Il en possède donc k juste avant la 2ème activation.
  Dans ce cas :

$$\begin{array}{cll}
 & \text{l'événement } [Z_2 = 0] \text{ est réalisé} & \\
\Leftrightarrow & \text{Le joueur ne reçoit aucun jeton à la } 2^{\text{ème}} \text{ activation} & \\
\Leftrightarrow & \text{La v.a.r. } X_1 + \cdots + X_k \text{ prend la valeur } 0 & \\
\Leftrightarrow & \text{Pour tout } i \in [\![1,k]\!], \text{ la v.a.r. } X_i \text{ prend la valeur } 0 & \textit{(car } X_1, \ldots, X_k \textit{ sont à valeurs positives)} \\
\Leftrightarrow & \forall i \in [\![1,k]\!], [X_i = 0] \text{ est réalisé} & \\
\Leftrightarrow & \qquad \text{L'événement } [X_1 = 0] \text{ est réalisé} & \\
 & \texttt{ET} \quad \text{L'événement } [X_2 = 0] \text{ est réalisé} & \\
 & \ldots \quad \ldots & \\
 & \texttt{ET} \quad \text{L'événement } [X_k = 0] \text{ est réalisé} & \\
\Leftrightarrow & \text{L'événement } \bigcap\limits_{i=1}^{k} [X_i = 0] \text{ est réalisé} &
\end{array}$$

- On en déduit :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{P}_{[Z_1=k]}\big([Z_2=0]\big) & = & \mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{i=1}^{k} [X_i=0]\right) & \\
 & = & \prod\limits_{i=1}^{k} \mathbb{P}\big([X_i=0]\big) & \textit{(car } X_1, \ldots, X_k \textit{ sont mutuellement indépendantes)} \\
 & = & \prod\limits_{i=1}^{k} \mathbb{P}\big([X=0]\big) & \textit{(car } X_1, \ldots, X_k \textit{ suivent la même loi que } X\textit{)} \\
 & = & \Big(\mathbb{P}\big([X=0]\big)\Big)^k &
\end{array}$$

  Par ailleurs :

$$\begin{array}{rcll}
(u_1)^k & = & \Big(\mathbb{P}\big([Z_1=0]\big)\Big)^k & \\
 & = & \Big(\mathbb{P}\big([X=0]\big)\Big)^k & \textit{(car } Z_1 \textit{ suit la même loi que } X\textit{)}
\end{array}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \mathbb{P}_{[Z_1=k]}\big([Z_2=0]\big) = \Big(\mathbb{P}\big([X=0]\big)\Big)^k = (u_1)^k.}$$

$\square$

On **admet** que, pour tout n de $\mathbb{N}$ et pour tout k de $\mathbb{N}$, on a : $\mathbb{P}_{[Z_1=k]}\big([Z_{n+1}=0]\big) = (u_n)^k$.

b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big([Z_1=k]\big)\,(u_n)^k = \dfrac{p}{1-q\,u_n}$.

Démonstration.

- Soit $n \in \mathbb{N}$.
  La famille $\big([Z_1=k]\big)_{k\in\mathbb{N}}$ forme un système complet d'événements.
  Ainsi, par formule des probabilités totales :

$$\begin{array}{rcll} u_{n+1} & = & \mathbb{P}\big([Z_{n+1}=0]\big) & \\ & = & \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big([Z_1=k]\cap[Z_{n+1}=0]\big) & \\ & = & \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big([Z_1=k]\big)\,\mathbb{P}_{[Z_1=k]}\big([Z_{n+1}=0]\big) & \textit{(car : } \forall k\in\mathbb{N}, \\ & & & \mathbb{P}\big([Z_1=k]\big)=\mathbb{P}\big([X=k]\big)\neq 0\textit{)} \\ & = & \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big([Z_1=k]\big)\,(u_n)^k & \textit{(d'après l'énoncé)} \end{array}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big([Z_1=k]\big)\,(u_n)^k}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme Z_1 et X suivent la même loi :

$$\begin{array}{rcl} u_{n+1} & = & \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big([Z_1=k]\big)\,(u_n)^k \\ & = & \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big([X=k]\big)\,(u_n)^k \\ & = & \sum\limits_{k=0}^{+\infty} q^k\,p\,(u_n)^k \\ & = & p\sum\limits_{k=0}^{+\infty} (q\,u_n)^k \\ & = & p\times\dfrac{1}{1-q\,u_n} \end{array}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{p}{1-q\,u_n}.}$$

□

8. a) Montrer que ℓ vérifie : $(\ell-1)(q\,\ell-p)=0$.

Démonstration.

- D'après la question précédente, pour tout $n\in\mathbb{N}$: $u_{n+1} = \dfrac{p}{1-q\,u_n}$. Donc :

$$(1-q\,u_n)\,u_{n+1} \ = \ p$$

- Par passage à la limite dans cette égalité, on obtient :

$$(1-q\,\ell)\,\ell \ = \ p \quad \text{donc} \quad \ell - q\,\ell^2 = p$$

- Par ailleurs :

$$\begin{aligned}(\ell-1)(q\,\ell-p)=0 \quad &\Leftrightarrow \quad q\,\ell^2-p\,\ell-q\,\ell+p=0\\ &\Leftrightarrow \quad q\,\ell^2-(p+q)\,\ell+p=0\\ &\Leftrightarrow \quad q\,\ell^2-\ell+p=0 \qquad \textit{(car : } p+q=1\textit{)}\\ &\Leftrightarrow \quad p=\ell-q\,\ell^2\end{aligned}$$

  Cette dernière assertion est vraie d'après le point précédent. Grâce au raisonnement par équivalence, la 1ère assertion l'est aussi.

  $$\boxed{\text{Ainsi : } (\ell-1)(q\,\ell-p)=0.}$$

□

b) On suppose : $p \geqslant \dfrac{1}{2}$. Démontrer : $\mathbb{P}(R)=1$.

Démonstration.

- Tout d'abord, d'après la question ***6.*** : $\mathbb{P}(R)=\ell$. Il faut donc démontrer dans cette question : $\ell=1$.
- D'après la question ***5.b)***, on sait que la suite (u_n) est majorée par 1, *i.e.* : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant 1$. Ainsi, par passage à la limite : $\ell \leqslant 1$.
- De plus, d'après la question précédente :

$$\begin{array}{lccc} & & (\ell-1)(q\,\ell-p) \ = \ 0 & \\ \text{donc} & \ell-1=0 & \texttt{OU} & q\,\ell-p=0\\ \text{d'où} & \ell=1 & \texttt{OU} & \ell=\dfrac{p}{q}\end{array}$$

- Cherchons à quel intervalle appartient le réel $\dfrac{p}{q}$.

$$\begin{array}{lccl} & p & \geqslant & \dfrac{1}{2}\\ \text{donc} & -p & \leqslant & -\dfrac{1}{2}\\ \text{d'où} & 1-p & \leqslant & \dfrac{1}{2}\\ \text{ainsi} & q & \leqslant & \dfrac{1}{2}\\ \text{alors} & \dfrac{1}{q} & \geqslant & 2 \qquad \textit{(par stricte décroissance de la fonction inverse sur } \mathbb{R}_+^*\textit{)}\end{array}$$

  On sait alors :

$$p \ \geqslant \ \frac{1}{2} \ \geqslant \ 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{q} \ \geqslant \ 2 \ \geqslant \ 0$$

  On en déduit :

$$\frac{p}{q} \ \geqslant \ \frac{1}{2}\times 2=1$$

  $$\boxed{\text{Si on suppose } p\geqslant \frac{1}{2}\text{, alors : } \frac{p}{q}\geqslant 1.}$$

- Deux cas se présentent alors :
  × si $\frac{p}{q} = 1$, c'est-à-dire :

$$p = q \Leftrightarrow p = 1 - p \Leftrightarrow 2\,p = 1 \Leftrightarrow p = \frac{1}{2}$$

  Alors :

$$\begin{aligned} \Big(\ell = 1 \quad \texttt{OU} \quad \ell = \frac{p}{q}\Big) &\Leftrightarrow \Big(\ell = 1 \quad \texttt{OU} \quad \ell = 1\Big) \\ &\Leftrightarrow \ell = 1 \end{aligned}$$

  On en déduit : $\mathbb{P}(R) = \ell = 1$.

  × si $\frac{p}{q} > 1$, alors :

$$\Big(\ell = 1 \quad \texttt{OU} \quad \ell = \frac{p}{q}\Big) \Leftrightarrow \ell = 1 \qquad \textit{(car : } \ell \leqslant 1 \textit{ et } \frac{p}{q} > 1\textit{)}$$

  On en déduit : $\mathbb{P}(R) = \ell = 1$.

$$\boxed{\text{Dans tous les cas, si } p \geqslant \frac{1}{2}\text{, on obtient : } \mathbb{P}(R) = 1.}$$

□

c) On suppose : $p < \frac{1}{2}$. Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in \left[0, \frac{p}{q}\right]$. En déduire : $\mathbb{P}(R) < 1$.

Démonstration.

- Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n)$: $u_n \in \left[0, \frac{p}{q}\right]$.
  - ▶ **Initialisation** : D'après la question ***5.a)*** : $u_0 = 0 \in \left[0, \frac{p}{q}\right]$.
    D'où $\mathcal{P}(0)$.
  - ▶ **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
    Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $u_{n+1} \in \left[0, \frac{p}{q}\right]$).
    × Tout d'abord : $u_{n+1} = \mathbb{P}\big([Z_{n+1} = 0]\big) \geqslant 0$.
    × Ensuite, par hypothèse de récurrence :

$$\begin{array}{lccll} & u_n & \leqslant & \frac{p}{q} & \\ \text{donc} & -q\,u_n & \geqslant & -p & \textit{(car : } -q < 0\textit{)} \\ \text{d'où} & 1 - q\,u_n & \geqslant & 1 - p & \\ \text{ainsi} & 1 - q\,u_n & \geqslant & q & \\ \text{alors} & \frac{1}{1 - q\,u_n} & \leqslant & \frac{1}{q} & \textit{(par stricte décroissance de la fonction inverse sur } \mathbb{R}_+^*\textit{)} \\ \text{puis} & \frac{p}{1 - q\,u_n} & \leqslant & \frac{p}{q} & \textit{(car : } p > 0\textit{)} \\ \text{enfin} & u_{n+1} & \leqslant & \frac{p}{q} & \textit{(d'après \textbf{7.b)})} \end{array}$$

    Finalement : $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant \frac{p}{q}$.
    D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in \left[0, \frac{p}{q}\right].}$$

- D'après le point précédent : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{p}{q}$.
  Par passage à la limite dans cet encadrement :
  $$0 \ \leqslant\ \ell \ \leqslant\ \frac{p}{q}$$
- Cherchons à quel intervalle appartient le réel $\dfrac{p}{q}$.
  $$\begin{array}{lccl} & p & < & \dfrac{1}{2} \\[2mm] \text{d'où} & 1-p & > & \dfrac{1}{2} \\[2mm] \text{ainsi} & q & > & \dfrac{1}{2} \\[2mm] \text{alors} & \dfrac{1}{q} & < & 2 \quad \textit{(par stricte décroissance de la fonction inverse sur } \mathbb{R}_+^*\textit{)} \end{array}$$
  On sait alors :
  $$0 \ \leqslant\ p \ <\ \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad 0 \ \leqslant\ \frac{1}{q} \ <\ 2$$
  On en déduit :
  $$\frac{p}{q} \ <\ \frac{1}{2} \times 2 = 1$$
  Si on suppose $p < \dfrac{1}{2}$, alors : $\dfrac{p}{q} < 1$. En particulier : $\ell \leqslant \dfrac{p}{q} < 1$.
  $$\boxed{\text{D'où : } \mathbb{P}(R) = \ell < 1.}$$

Commentaire

Plus précisément, on peut démontrer, grâce à la question ***8.a)*** que, dans le cas où $p < \dfrac{1}{2}$, alors : $\mathbb{P}(R) = \dfrac{p}{q}$. En effet :
$$\begin{array}{lll} & (\ell - 1)\,(q\,\ell - p) = 0 & \\[2mm] \text{donc} & \ell = 1 \quad \texttt{OU} \quad \ell = \dfrac{p}{q} & \\[2mm] \text{d'où} & \qquad\qquad \ell = \dfrac{p}{q} & \textit{(car : } \ell < 1\textit{)} \end{array}$$

□

d) Expliquer pourquoi le casino préfèrera choisir p dans l'intervalle $\left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$.

Démonstration.
Deux cas se présentent pour le casino.

- si $p \geqslant \dfrac{1}{2}$, alors : $\mathbb{P}(R) = 1$.
  L'événement R est donc presque sûrement réalisé. Ainsi, presque sûrement, le joueur finit par ne plus avoir de jetons. Autrement dit, le joueur finit par perdre presque sûrement.
- si $p < \dfrac{1}{2}$, alors : $\mathbb{P}(R) < 1$.
  L'événement R n'est donc pas presque sûrement réalisé. Autrement dit, le joueur ne finit pas par perdre presque sûrement.

$$\boxed{\text{Le casino préfèrera donc par choisir } p \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \text{ pour s'assurer d'être rentable.}}$$

□