Interrogation de rentrée

On traitera obligatoirement les exercices 1, 2 et 3, et on les traitera dans cet ordre. Les autres ne sont pas obligatoires et peuvent être traités dans n'importe quel ordre.

Exercice 1. *Rayer la ou les mentions inutiles (aucune justification n'est attendue)*

1.	Dans l'écriture $f : x \mapsto 1 + x$, la variable x est	: libre / liée
2.	Dans l'écriture $\big([X = i]\big)_{i \in [\![1,n]\!]}$, la variable i est	: libre / liée
	et la variable n est	: libre / liée
3.	Le résultat de la quantité $\sum\limits_{i=1}^{k} i$ dépend de	: i / k / ni i ni k
4.	Une variable muette est	: libre / liée
5.	Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite admettant une limite (finie ou non), la quantité $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$	: dépend de n / ne dépend par de n / peut dépendre de n
6.	Dans l'écriture $\displaystyle\int_0^x f(t)\, dt$, la variable t est	: libre / liée
	la variable x est	: libre / liée
7.	Dans l'écriture $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0 \ \text{ et } \ y = 0\}$,	
	la variable x est	: libre / liée
	la variable y est	: libre / liée
	la variable z est	: libre / liée
8.	Dans l'écriture : $\forall x \in \mathbb{R}_+, \exists y \in \mathbb{R},\ x = y^2$,	
	la variable x est	: libre / liée
	la variable y est	: libre / liée
9.	Une variable libre	: doit toujours / ne doit jamais / doit parfois — être introduite par un « Soit »
10.	Une variable liée	: doit toujours / ne doit jamais / doit parfois — être introduite par un « Soit »

- **10 pts : on attribue 1 pt par question juste, pas de point négatif en cas de question fausse.**

Exercice 2

Pour chacune des expressions suivantes :

(i) déterminer si elle désigne une proposition ou un objet. Si c'est un objet, précisez de quel type d'objet il s'agit (réel, fonction, suite, série, ensemble).

- **12 pts : on attribue 1 pt si le bon terme (proposition, réel, fonction, suite, série, ensemble) apparaît et 0 sinon.**

(ii) indiquer, pour chaque variable en présence, si elle est libre ou liée.

- **12 pts : on attribue 1 pt par réponse juste.**

Aucune justification n'est attendue pour ces questions.

1. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n}\, dx$

2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^x}{1+t}\, dt$,

3. $f : t \mapsto \mathrm{e}^{-t}$,

4. $f(x)$,

5. $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0\}$,

6. $\displaystyle\sum_{i=j}^{n} (i+j)^3$,

7. $\displaystyle\sum_{j=0}^{n}\sum_{i=j}^{n} (i+j)^3$,

8. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$,

9. $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} u_n$,

10. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\, u_n \geqslant \ln(2)$

11. $\mathcal{P}(n)$,

12. $\forall n \in \mathbb{N},\, \mathcal{P}(n)$.

Exercice 3

1. a) Résoudre le système suivant : $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2\,y & + & z & = & 0 \\ 2\,x & + & 4\,y & + & 2\,z & = & 0 \\ -x & - & 2\,y & - & z & = & 0 \end{array}\right.$.

- **3 pts : $x = -2y - z$. Précisions :**
  - × **on attribue les 3 pts seulement si tout apparaît comme dans le corrigé.**
  - × **on peut attribuer jusque 2 pts en cas d'erreur de calcul.**
  - × **on peut attribuer jusque 2 pts en cas de gestion non correcte des variables auxiliaires mais bon résultat.**

b) On note : $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$. Déterminer $E_{-1}(A) = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = -X\}$.

- **1 pt : résultat** $E_{-1}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$
- **2 pts : rédaction. Plus précisément, on attribue :**
  - × **0 pt : si utilisation du symbole $\Rightarrow$ à une étape ou incompréhension totale des objets manipulés.**
  - × **1 pt : une confusion d'objet ou une présentation ne correspondant pas au corrigé (notamment le fait d'écrire : $X = y \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$)**
  - × **2 pts : tout parfait. Est accepté aussi une légère maladresse d'introduction du système (lien avec la question précédente).**

2. a) Résoudre le système suivant : $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & 2\,z & = & 0 \\ 2\,x & - & y & + & 3\,z & = & 0 \\ 5\,x & - & 3\,y & + & 8\,z & = & 0 \end{array}\right.$.

- **3 pts : $x = -z$ et $y = z$. Selon les modalités précédentes.**

b) On note : $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & -3 & 10 \end{pmatrix}$. Déterminer $E_2(A) = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = 2 \cdot X\}$.

- **1 pt : résultat** $E_2(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$
- **2 pts : rédaction. Plus précisément, on attribue :**
  - × **0 pt : si utilisation du symbole ⇒ à une étape ou incompréhension totale des objets manipulés.**
  - × **1 pt : une confusion d'objet ou une présentation ne correspondant pas au corrigé (notamment le fait d'écrire :** $X = z \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$**)**
  - × **2 pts : tout parfait. Est accepté aussi une légère maladresse d'introduction du système (lien avec la question précédente).**

3. a) Résoudre le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x & - & 2y & + & z & = & 0 \\ -x & - & y & + & z & = & 0 \\ x & + & 2y & - & 3z & = & 0 \end{array}\right.$$

- **3 pts :** $x = 0$ **et** $y = 0$ **et** $z = 0$**. Selon les modalités précédentes.**

Exercice 4
Dans tout l'exercice, p désigne un réel de $]0,1[$ et on pose : $q = 1 - p$.
Toutes les variables aléatoires considérées dans cet exercice sont supposées définies sur un même espace probabilisé noté $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.
On considère en particulier une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$, dont la loi est donnée par :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}\big([X = k]\big) \; = \; q^k \, p \; = \; (1-p)^k \, p$$

PARTIE A

1. Montrer que la variable aléatoire $Y = X + 1$ suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre.

- **1 pt :** $Y(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$
- **1 pt :** $\mathbb{P}\big([Y = k]\big) = q^{k-1} \, p$

2. En déduire que X admet une espérance et une variance, et préciser $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

- **1 pt :** $X = Y - 1$ **admet une variance (et donc une espérance) en tant que transformée affine d'une v.a.r. qui en admet une.**
- **2 pts :** $\mathbb{E}(X) = \dfrac{q}{p}$
  - × **1 pt : linéarité de l'espérance**
  - × **1 pt :** $\mathbb{E}(Y) = \dfrac{1}{p}$ **et résultat**
- **1 pt :** $\mathbb{V}(X) = \dfrac{q}{p^2}$

3. Compléter la fonction **Scilab** suivante afin que, prenant en entrée le réel p, elle renvoie une simulation de la variable aléatoire X.

```
function X = simule_X(p)
    Y = ......
    while ......
        Y = Y + 1
    end
    X = Y - 1
endfunction
```

- **2 pts : 1 pt par ligne à compléter**

```
function X = simule_X(p)
    Y = 1
    while rand() > p
        Y = Y + 1
    end
    X = Y - 1
endfunction
```

PARTIE B

Un casino a conçu une nouvelle machine à sous dont le fonctionnement est le suivant :

- le joueur introduit un nombre k de jetons de son choix ($k \in \mathbb{N}$), puis il appuie sur un bouton pour activer la machine ;
- si k est égal à 0, alors la machine ne reverse aucun jeton au joueur ;
- si k est un entier supérieur ou égal à 1, alors la machine définit k variables aléatoires X_1, ..., X_k, toutes indépendantes et de même loi que la variable aléatoire X étudiée dans la partie A, et reverse au joueur $(X_1 + \cdots + X_k)$ jetons ;
- les fonctionnements de la machine à chaque activation sont indépendants les uns des autres et ne dépendent que du nombre de jetons introduits.

Le casino s'interroge sur la valeur à donner à p pour que la machine soit attractive pour le joueur, tout en étant rentable.
Le casino imagine alors le cas d'un joueur invétéré qui, avant chaque activation, place l'intégralité de ses jetons dans la machine, et continue de jouer encore et encore.

On note, pour tout n de $\mathbb{N}$, Z_n la variable aléatoire égale au nombre de jetons dont dispose le joueur après n activations de la machine.
On suppose que le joueur commence avec un seul jeton ; ainsi : $Z_0 = 1$.
On remarque en particulier que Z_1 suit la même loi que X.

4. Compléter la fonction **Scilab** suivante afin que, prenant en entrée un entier n de $\mathbb{N}$ et le réel p, elle simule l'expérience aléatoire et renvoie la valeur de Z_n.
Cette fonction devra utiliser la fonction `simule_X`.

```
1  function Z = simule_Z(n, p)
2      Z = 1
3      for i = 1 : n
4          s = 0
5          for j = 1 : Z
6              ......
7          end
8          Z = ......
9      end
10 endfunction
```

- **3 pts : 2 pts pour la ligne 6 et 1 pt pour la ligne 8**

```
1  function Z = simule_Z(n, p)
2      Z = 1
3      for i = 1 : n
4          s = 0
5          for j = 1 : Z
6              s = s + simule_X(p)
7          end
8          Z = s
9      end
10 endfunction
```

On définit, pour tout n de $\mathbb{N}$, u_n la probabilité que le joueur n'ait plus de jeton après n activations de la machine ; ainsi : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \mathbb{P}\big([Z_n = 0]\big)$.
On note également R l'événement : « le joueur finit par ne plus avoir de jeton ».

5. a) Préciser les valeurs de u_0 et de u_1.

- **1 pt :** $u_0 = 0$
- **1 pt :** $u_1 = p$

b) Comparer, pour tout n de $\mathbb{N}$, les événements $[Z_n = 0]$ et $[Z_{n+1} = 0]$.
En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone et convergente.

- **1 pt : L'événement $[Z_n = 0]$ est réalisé si et seulement si...**
- **1 pt :** $[Z_n = 0] \subset [Z_{n+1} = 0]$
- **1 pt : croissance de $\mathbb{P}$**
- **1 pt : (u_n) est majorée par 1**
- **1 pt : théorème de convergence monotone**

Dans la suite de l'exercice, on note : $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

6. Justifier : $\mathbb{P}(R) = \ell$.

- **1 pt :** $R = \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} [Z_n = 0]$
- **1 pt : théorème de la limite monotone**
- **1 pt :** $\bigcup\limits_{n=1}^{N} [Z_n = 0] = [Z_N = 0]$ **car** $\big([Z_n = 0]\big)$ **est une suite croissante d'événements**
- **1 pt :** $\mathbb{P}(R) = \lim\limits_{N\to+\infty} \mathbb{P}\big([Z_N = 0]\big) = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$

7. ***a)*** Montrer que, pour tout k de $\mathbb{N}$, on a : $\mathbb{P}_{[Z_1=k]}\big([Z_2=0]\big) = (u_1)^k$.

- **1 pt : Si l'événement $[Z_1=k]$ est réalisé, c'est que...**
- **1 pt : Dans ce cas, $[Z_2=0]$ est réalisé si et seulement si $\bigcap\limits_{i=1}^{k} [X_i=0]$ est réalisé**
- **1 pt : $X_1, \ldots, X_k$ mutuellement indépendants**
- **1 pt : $X_1, \ldots, X_k$ suivent la même loi que X**
- **1 pt : $\mathbb{P}_{[Z_1=k]}\big([Z_2=0]\big) = \Big(\mathbb{P}\big([X=0]\big)\Big)^k$**
- **1 pt : $(u_1)^k = \Big(\mathbb{P}\big([Z_1=0]\big)\Big)^k = \Big(\mathbb{P}\big([X=0]\big)\Big)^k$ car Z_1 suit la même loi que X**

On **admet** que, pour tout n de $\mathbb{N}$ et pour tout k de $\mathbb{N}$, on a : $\mathbb{P}_{[Z_1=k]}\big([Z_{n+1}=0]\big) = (u_n)^k$.

b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big([Z_1=k]\big)\,(u_n)^k = \dfrac{p}{1-q\,u_n}$.

- **1 pt : la famille $\big([Z_1=k]\big)_{k\in\mathbb{N}}$ forme un système complet d'événements**
- **1 pt : FPT**
- **1 pt : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}\big([Z_1=k]\big) = \mathbb{P}\big([X=k]\big) \neq 0$**
- **1 pt : fin du calcul**

8. ***a)*** Montrer que ℓ vérifie : $(\ell-1)(q\,\ell-p)=0$.

- **1 pt : $(1-q\ell)\,\ell = p$ par passage à la limite dans l'égalit de la question précédente**
- **1 pt : $(\ell-1)\,(q\,\ell-p)=0 \ \Leftrightarrow\ p = \ell - q\,\ell^2$**

b) On suppose : $p \geqslant \dfrac{1}{2}$. Démontrer : $\mathbb{P}(R)=1$.

- **1 pt : (u_n) est majorée par 1 donc $\ell \leqslant 1$**
- **1 pt : d'après la question précédente $\ell = 1$ ou $\ell = \dfrac{p}{q}$**
- **2 pts : $\frac{p}{q} \geqslant 1$**
  - × **1 pt : stricte décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$**
  - × **1 pt : $\dfrac{p}{q} \geqslant \dfrac{1}{2} \times 2$**
- **1 pt : cas $\dfrac{p}{q} = 1$**
- **1 pt : cas $\dfrac{p}{q} > 1$**

c) On suppose : $p < \dfrac{1}{2}$. Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in \left[0, \dfrac{p}{q}\right]$. En déduire : $\mathbb{P}(R) < 1$.

- **4 pts : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \left[0, \frac{p}{q}\right]$**
  - × **1 pt : initialisation**
  - × **3 pts : hérédité**
    - **- 1 pt : $-q<0$ et $p>0$**
    - **- 1 pt : stricte décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$**
    - **- 1 pt : utilisation de *7.b)***

- **1 pt : par passage à la limite** $0 \leqslant \ell \leqslant \dfrac{p}{q}$
- **1 pt :** $\dfrac{p}{q} < 1$
- **1 pt :** $\mathbb{P}(R) = \ell < 1$

d) Expliquer pourquoi le casino préfèrera choisir p dans l'intervalle $\left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$.

- **1 pt : cas** $p \geqslant \dfrac{1}{2}$ **(le joueur finit par ne plus avoir de jetons presque sûrement. Il perd donc presque sûrement)**
- **1 pt : cas** $p < \dfrac{1}{2}$ **(le joueur ne finit pas par perdre presque sûrement)**
- **1 pt : le casino préfèrera donc choisir** $p \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ **pour s'assurer d'être rentable**