# Interrogation de rentrée

**On traitera obligatoirement les exercices 1, 2 et 3, et on les traitera dans cet ordre. L'exercice 4 pourra être abordé dans un second temps.**

**Exercice 1.** *Rayer la ou les mentions inutiles (aucune justification n'est attendue)*

| | | |
|---|---|---|
| ***1.*** | Dans l'écriture $f : x \mapsto 1 + x$, la variable $x$ est | : libre / liée |
| ***2.*** | Dans l'écriture $\big([X = i]\big)_{i \in [\![1,n]\!]}$, la variable $i$ est | : libre / liée |
| | et la variable $n$ est | : libre / liée |
| ***3.*** | Le résultat de la quantité $\sum\limits_{i=1}^{k} i$ dépend de | : $i$ / $k$ / ni $i$ ni $k$ |
| ***4.*** | Une variable muette est | : libre / liée |
| ***5.*** | Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite admettant une limite (finie ou non), la quantité $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ | : dépend de $n$ / ne dépend par de $n$ / peut dépendre de $n$ |
| ***6.*** | Dans l'écriture $\displaystyle\int_0^x f(t)\ dt$, la variable $t$ est | : libre / liée |
| | la variable $x$ est | : libre / liée |
| ***7.*** | Dans l'écriture $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0 \ \text{ et } \ y = 0\}$, | |
| | la variable $x$ est | : libre / liée |
| | la variable $y$ est | : libre / liée |
| | la variable $z$ est | : libre / liée |
| ***8.*** | Dans l'écriture : $\forall x \in \mathbb{R}_+, \exists y \in \mathbb{R},\ x = y^2$, | |
| | la variable $x$ est | : libre / liée |
| | la variable $y$ est | : libre / liée |
| ***9.*** | Une variable libre | : doit toujours / ne doit jamais / doit parfois — être introduite par un « Soit » |
| ***10.*** | Une variable liée | : doit toujours / ne doit jamais / doit parfois — être introduite par un « Soit » |

**Exercice 2**
Pour chacune des expressions suivantes :

***(i)*** déterminer si elle désigne une proposition ou un objet. Si c'est un objet, précisez de quel type d'objet il s'agit (réel, fonction, suite, série, ensemble).

***(ii)*** indiquer, pour chaque variable en présence, si elle est libre ou liée.

*Aucune justification n'est attendue pour ces questions.*

***1.*** $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n}\, dx$

***2.*** $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^x}{1+t}\, dt$,

***3.*** $f : t \mapsto e^{-t}$,

***4.*** $f(x)$,

***5.*** $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0\}$,

***6.*** $\displaystyle\sum_{i=j}^{n} (i+j)^3$,

***7.*** $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} \sum_{i=j}^{n} (i+j)^3$,

***8.*** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$,

***9.*** $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} u_n$,

***10.*** $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \geqslant \ln(2)$

***11.*** $\mathcal{P}(n)$,

***12.*** $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)$.

**Exercice 3**

***1.*** ***a)*** Résoudre le système suivant : $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2\,y & + & z & = & 0 \\ 2\,x & + & 4\,y & + & 2\,z & = & 0 \\ -x & - & 2\,y & - & z & = & 0 \end{array}\right.$.

***b)*** On note : $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$. Déterminer $E_{-1}(A) = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = -X\}$.

***2.*** ***a)*** Résoudre le système suivant : $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & 2\,z & = & 0 \\ 2\,x & - & y & + & 3\,z & = & 0 \\ 5\,x & - & 3\,y & + & 8\,z & = & 0 \end{array}\right.$.

***b)*** On note : $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & -3 & 10 \end{pmatrix}$. Déterminer $E_2(A) = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = 2 \cdot X\}$.

***3.*** ***a)*** Résoudre le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2\,x & - & 2\,y & + & z & = & 0 \\ -x & - & y & + & z & = & 0 \\ x & + & 2\,y & - & 3\,z & = & 0 \end{array}\right.$$

**Exercice 4**
Dans tout l'exercice, $p$ désigne un réel de $]0,1[$ et on pose : $q = 1-p$.
Toutes les variables aléatoires considérées dans cet exercice sont supposées définies sur un même espace probabilisé noté $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.
On considère en particulier une variable aléatoire $X$ à valeurs dans $\mathbb{N}$, dont la loi est donnée par :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}\big([X=k]\big) \ = \ q^k\, p \ = \ (1-p)^k\, p$$

## PARTIE A

***1.*** Montrer que la variable aléatoire $Y = X+1$ suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre.

***2.*** En déduire que $X$ admet une espérance et une variance, et préciser $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

*3.* Compléter la fonction **Scilab** suivante afin que, prenant en entrée le réel $p$, elle renvoie une simulation de la variable aléatoire $X$.

```
function X = simule_X(p)
    Y = ......
    while ......
        Y = Y + 1
    end
    X = Y - 1
endfunction
```

## PARTIE B

Un casino a conçu une nouvelle machine à sous dont le fonctionnement est le suivant :

- le joueur introduit un nombre $k$ de jetons de son choix ($k \in \mathbb{N}$), puis il appuie sur un bouton pour activer la machine ;
- si $k$ est égal à 0, alors la machine ne reverse aucun jeton au joueur ;
- si $k$ est un entier supérieur ou égal à 1, alors la machine définit $k$ variables aléatoires $X_1, \ldots, X_k$, toutes indépendantes et de même loi que la variable aléatoire $X$ étudiée dans la partie A, et reverse au joueur $(X_1 + \cdots + X_k)$ jetons ;
- les fonctionnements de la machine à chaque activation sont indépendants les uns des autres et ne dépendent que du nombre de jetons introduits.

Le casino s'interroge sur la valeur à donner à $p$ pour que la machine soit attractive pour le joueur, tout en étant rentable.
Le casino imagine alors le cas d'un joueur invétéré qui, avant chaque activation, place l'intégralité de ses jetons dans la machine, et continue de jouer encore et encore.

On note, pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, $Z_n$ la variable aléatoire égale au nombre de jetons dont dispose le joueur après $n$ activations de la machine.
On suppose que le joueur commence avec un seul jeton ; ainsi : $Z_0 = 1$.
On remarque en particulier que $Z_1$ suit la même loi que $X$.

*4.* Compléter la fonction **Scilab** suivante afin que, prenant en entrée un entier $n$ de $\mathbb{N}$ et le réel $p$, elle simule l'expérience aléatoire et renvoie la valeur de $Z_n$.
Cette fonction devra utiliser la fonction `simule_X`.

```
function Z = simule_Z(n, p)
    Z = 1
    for i = 1 : n
        s = 0
        for j = 1 : Z
            ......
        end
        Z = ......
    end
endfunction
```

On définit, pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, $u_n$ la probabilité que le joueur n'ait plus de jeton après $n$ activations de la machine ; ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \mathbb{P}\big([Z_n = 0]\big)$.
On note également $R$ l'événement : « le joueur finit par ne plus avoir de jeton ».

*5.* *a)* Préciser les valeurs de $u_0$ et de $u_1$.

***b)*** Comparer, pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, les événements $[Z_n = 0]$ et $[Z_{n+1} = 0]$.
En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone et convergente.

Dans la suite de l'exercice, on note : $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

***6.*** Justifier : $\mathbb{P}(R) = \ell$.

***7. a)*** Montrer que, pour tout $k$ de $\mathbb{N}$, on a : $\mathbb{P}_{[Z_1=k]}\big([Z_2 = 0]\big) = (u_1)^k$.
On **admet** que, pour tout $n$ de $\mathbb{N}$ et pour tout $k$ de $\mathbb{N}$, on a : $\mathbb{P}_{[Z_1=k]}\big([Z_{n+1} = 0]\big) = (u_n)^k$.

***b)*** En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big([Z_1 = k]\big)\,(u_n)^k = \dfrac{p}{1 - q\,u_n}$.

***8. a)*** Montrer que $\ell$ vérifie : $(\ell - 1)(q\,\ell - p) = 0$.

***b)*** On suppose : $p \geqslant \dfrac{1}{2}$. Démontrer : $\mathbb{P}(R) = 1$.

***c)*** On suppose : $p < \dfrac{1}{2}$. Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \left[0, \dfrac{p}{q}\right]$. En déduire : $\mathbb{P}(R) < 1$.

***d)*** Expliquer pourquoi le casino préfèrera choisir $p$ dans l'intervalle $\left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$.