Interrogation de rentrée

On traitera obligatoirement les exercices 1, 2 et 3, et on les traitera dans cet ordre. Les autres ne sont pas obligatoires et peuvent être traités dans n'importe quel ordre.

Exercice 1. *Rayer la ou les mentions inutiles*

1. Dans l'écriture $f : x \mapsto 1 + x$, la variable x est : ~~libre~~ / liée

La variable x est muette car c'est la variable de définition de la fonction (une fonction est un mécanisme d'association : à chaque valeur de x est associée une image par la fonction).

2. Dans l'écriture $\big([X = i]\big)_{i \in [\![1,n]\!]}$, la variable i est : ~~libre~~ / liée

et la variable n est : libre / ~~liée~~

La variable i est muette (on considère ici, pour tout les entiers i de $[\![1, n]\!]$, les événements $[X = i]$). La variable n est libre (elle n'est sous la portée d'aucun quantificateur ni de symbole mathématique).

3. Le résultat de la quantité $\sum\limits_{i=1}^{k} i$ dépend de : $\cancel{i}$ / k / ~~ni i ni k~~

La variable i est muette car c'est la variable de sommation (elle est donc sous la portée d'un symbole de sommation $\sum$).

La variable k est libre (elle n'est sous la portée d'aucun quantificateur ni de symbole mathématique). Une fois le calcul effectué, le résultat dépendra seulement de la variable k.

4. Une variable muette est : ~~libre~~ / liée

5. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite admettant une limite (finie ou non),
la quantité $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$: ~~dépend de n~~ / ne dépend par de n / ~~peut dépendre de n~~

Rappelons quelques définitions :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \text{ (où } \ell \in \mathbb{R}) \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad (n \geqslant n_0 \ \Rightarrow\ |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon)$$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall A \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad (n \geqslant n_0 \ \Rightarrow\ u_n \geqslant A)$$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall A \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad (n \geqslant n_0 \ \Rightarrow\ u_n \leqslant A)$$

La variable n est donc muette car, dans tous les cas, elle est sous la portée d'un quantificateur.

6. Dans l'écriture $\displaystyle\int_0^x f(t)\ dt$, la variable t est : ~~libre~~ / liée

la variable x est : libre / ~~liée~~

La variable t est muette car c'est la variable d'intégration (elle est donc sous la portée d'un symbole d'intégration $\displaystyle\int$).

La variable x est libre (elle n'est sous la portée d'aucun quantificateur ni de symbole mathématiques).

7. Dans l'écriture $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0 \ \text{ et } \ y = 0\}$,
la variable x est : ~~libre~~ / liée
la variable y est : ~~libre~~ / liée
la variable z est : ~~libre~~ / liée

Les variables x, y et z sont muettes (on s'intéresse ici à tous les réels x, y et z vérifiant une condition donnée).

8. Dans l'écriture : $\forall x \in \mathbb{R}_+, \exists y \in \mathbb{R},\ x = y^2$,
la variable x est : ~~libre~~ / liée
la variable y est : ~~libre~~ / liée

Les variables x et y sont muettes car elles sont sous la portée d'un quantificateur.

9. Une variable libre : ~~doit toujours~~ / ~~ne doit jamais~~ / doit parfois être introduite par un « Soit »

Une variable libre doit parfois être introduite par un « Il existe ».

10. Une variable liée : ~~doit toujours~~ / ne doit jamais / ~~doit parfois~~ être introduite par un « Soit »

Une variable muette ne doit jamais être quantifiée.

Exercice 2 Pour chacune des expressions suivantes :

(i) déterminer si elle désigne une proposition ou un objet. Si c'est un objet, précisez de quel type d'objet il s'agit (réel, fonction, suite, série, ensemble).

(ii) indiquer, pour chaque variable en présence, si elle est libre ou liée.

Démonstration.

1. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n}\ dx$

(i) Il s'agit d'un réel.

(ii) La variable x est muette car c'est la variable d'intégration (elle est donc sous la portée d'un symbole d'intégration $\int$).
La variable n est libre (elles n'est sous la portée d'aucun quantificateur ni de symbole mathématique).

Une fois le calcul effectué, le résultat dépendra seulement de la variable n.

2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^x}{1+t}\,dt$

(i) Il s'agit d'un réel.

(ii) La variable t est muette car c'est la variable d'intégration (elle est donc sous la portée d'un symbole d'intégration $\int$).
La variable x est libre (elles n'est sous la portée d'aucun quantificateur ni de symbole mathématique).

Une fois le calcul effectué, le résultat dépendra seulement de la variable x.

3. $f : t \mapsto e^{-t}$

(i) Il s'agit d'une fonction réelle d'une variable réelle.

(ii) La variable t est muette car c'est la variable de définition de la fonction (une fonction est un mécanisme d'association : à chaque valeur de t est associée une image par la fonction).
La variable f est libre (elle n'est sous la portée d'aucun quantificateur ni symbole mathématique).

On a ici affaire à une fonction dont l'évaluation en un réel donné dépend seulement de l'expression de f.

4. $f(x)$

(i) Il s'agit d'un réel (et non pas d'une fonction !).

(ii) Les variables f et x sont libres (elles ne sont sous la portée d'aucun quantificateur ni de symbole mathématique).

On a ici affaire à l'évaluation d'une fonction en un point x.
Une fois le calcul effectué, le résultat dépendra de l'expression de f et de la variable x.

5. $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0\}$

(i) Il s'agit d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.

(ii) La variable x est muette (on s'intéresse ici à tous les réels x vérifiant une condition donnée).

On a ici affaire à un ensemble qui ne dépend d'aucune variable.

Commentaire

Notons que cette conclusion est bien rassurante puisque l'ensemble $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0\}$ n'est autre que l'ensemble $\mathbb{R}_+$ (ou $[0, +\infty[$), notations qui ne font pas apparaître de dépendance en une variable x.

6. $\displaystyle\sum_{i=j}^{n} (i+j)^3$

(i) Il s'agit d'un réel.

(ii) La variable i est muette car c'est la variable de sommation (elle est donc sous la portée d'un symbole d'intégration $\sum$).

Les variables n et j sont libres (elles ne sont sous la portée d'aucun quantificateur ni de symbole mathématique).

Une fois le calcul effectué, le résultat dépendra seulement des variables n et j.

7. $\sum\limits_{j=0}^{n} \sum\limits_{i=j}^{n} (i+j)^3$

(i) Il s'agit d'un réel.

(ii) Dans la somme $\sum\limits_{i=j}^{n} (i+j)^3$, seule la variable i est muette car c'est la variable de sommation. Les variables n et j sont libres. Ainsi, le résultat de cette somme ne dépendra que de n et j. On peut donc noter $R(n,j) = \sum\limits_{i=j}^{n} (i+j)^3$.

Dans la somme $\sum\limits_{j=0}^{n} R(n,j) = \sum\limits_{j=0}^{n} \sum\limits_{i=j}^{n} (i+j)^3$, la variable j est muette car c'est la variable de sommation et la variable n est libre.

Finalement, une fois le calcul effectué, le résultat dépendra seulement de la variable n.

8. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

(i) Il s'agit d'une suite.

(ii) La variable n est muette (on considère ici la valeur de la suite u à tous les rangs n entiers).

La suite u (autre notation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$) ne dépend d'aucune variable.

9. $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} u_n$

(i) Si la série $\sum\limits_{n\geqslant 3} u_n$ est convergente (dans le cas contraire, l'objet considéré dans cette question n'est pas défini), la notation $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} u_n$ désigne la somme de cette série. Il s'agit alors d'un réel.

(ii) La variable n est muette car c'est la variable de sommation (elle est donc sous la portée d'un symbole d'intégration $\sum$).

Cette somme ne dépend d'aucune variable.

10. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \geqslant \ln(2)$

(i) Il s'agit d'une proposition mathématique quantifiée universellement.

(ii) La variable n est muette car elle est sous la portée d'un quantificateur.

La valeur de vérité de cette proposition mathématique ne dépend d'aucune variable.

11. $\mathcal{P}(n)$

(i) Il s'agit d'une proposition mathématique qui n'est pas quantifiée.

(ii) Les variables $\mathcal{P}$ et n sont libres (elles ne sont sous la portée d'aucun quantificateur ni de symbole mathématique).

La valeur de vérité de cette proposition mathématique dépend de la proposition $\mathcal{P}$ ainsi que du rang n où elle est évaluée.

12. $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)$

(i) Il s'agit d'une proposition mathématique quantifiée universellement.

(ii) La variable n est muette car elle est sous la portée d'un quantificateur.
La variable $\mathcal{P}$ est libre (elle n'est sous la portée d'aucun quantificateur ni de symbole mathématique).

$$\boxed{\text{La valeur de vérité de cette proposition mathématique dépend seulement de la proposition } \mathcal{P} \text{ considérée.}}$$

□

Exercice 3

1. a) Résoudre le système suivant : $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2\,y & + & z & = & 0 \\ 2\,x & + & 4\,y & + & 2\,z & = & 0 \\ -x & - & 2\,y & - & z & = & 0 \end{array}\right.$.

Démonstration.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2\,y & + & z & = & 0 \\ 2\,x & + & 4\,y & + & 2\,z & = & 0 \\ -x & - & 2\,y & - & z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2\,L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1}}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2\,y & + & z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\ x + 2\,y + z = 0\right.$$

$$\iff \left\{\ x = -2\,y - z\right.$$

□

b) On note : $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$. Déterminer $E_{-1}(A) = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = -X\}$.

Démonstration.

- Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On a alors :

$$\begin{array}{rcl} X \in E_{-1}(A) & \Leftrightarrow & AX = -X \\ & \Leftrightarrow & (A + I)\,X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\ & \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & \Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2\,y & + & z & = & 0 \\ 2\,x & + & 4\,y & + & 2\,z & = & 0 \\ -x & - & 2\,y & - & z & = & 0 \end{array}\right. \\ & \Leftrightarrow & \left\{\ x = -2\,y - z\right. \qquad \textit{(d'après la question précédente)} \end{array}$$

- On en déduit :

$$\begin{aligned} E_{-1}(A) &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = -2\,y - z \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} -2\,y - z \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid (y,z) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \left\{ y \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid (y,z) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

$$\boxed{E_{-1}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)}$$

□

2. ***a)*** Résoudre le système suivant : $\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & 2\,z & = & 0 \\ 2\,x & - & y & + & 3\,z & = & 0 \\ 5\,x & - & 3\,y & + & 8\,z & = & 0 \end{array} \right.$.

Démonstration.

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & 2\,z & = & 0 \\ 2\,x & - & y & + & 3\,z & = & 0 \\ 5\,x & - & 3\,y & + & 8\,z & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - 5\,L_1}{\overset{L_2 \leftarrow L_2 - 2\,L_1}{\Longleftrightarrow}} \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & 2\,z & = & 0 \\ & & y & - & z & = & 0 \\ & & 2\,y & - & 2\,z & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\overset{L_3 \leftarrow L_3 - 2\,L_2}{\Longleftrightarrow} \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & 2\,z & = & 0 \\ & & y & - & z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & 2\,z & = & 0 \\ & & y & - & z & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcl} x & - & y & = & -2\,z \\ & & y & = & z \end{array} \right.$$

$$\overset{L_1 \leftarrow L_1 + L_2}{\Longleftrightarrow} \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -z \\ y & = & z \end{array} \right.$$

□

b) On note : $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & -3 & 10 \end{pmatrix}$. Déterminer $E_2(A) = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = 2 \cdot X\}$.

Démonstration.

- Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On a alors :

$$\begin{array}{rcl} X \in E_2(A) & \Leftrightarrow & AX = 2 \cdot X \\ & \Leftrightarrow & (A - 2 \cdot I)\, X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\ & \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 5 & -3 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & 2\,z & = & 0 \\ 2\,x & - & y & + & 3\,z & = & 0 \\ 5\,x & - & 3\,y & + & 8\,z & = & 0 \end{array} \right. \\ & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcl} x & & & = & -z \\ & & y & = & z \end{array} \right. \qquad \textit{(d'après la question précédente)} \end{array}$$

- On en déduit :

$$\begin{array}{rcl} E_2(A) & = & \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = -z \ \texttt{ET} \ y = z \right\} \\ & = & \left\{ \begin{pmatrix} -z \\ z \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid z \in \mathbb{R} \right\} \\ & = & \left\{ z \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\} \\ & = & \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \end{array}$$

$$\boxed{E_2(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)}$$

□

3. Résoudre le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2\,x & - & 2\,y & + & z & = & 0 \\ -x & - & y & + & z & = & 0 \\ x & + & 2\,y & - & 3\,z & = & 0 \end{array}\right.$$

Démonstration.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2\,x & - & 2\,y & + & z & = & 0 \\ -x & - & y & + & z & = & 0 \\ x & + & 2\,y & - & 3\,z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow 2\,L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow 2\,L_3 - L_1}}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2\,x & - & 2\,y & + & z & = & 0 \\ & - & 4\,y & + & 3\,z & = & 0 \\ & & 6\,y & - & 7\,z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\underset{L_3 \leftarrow 2\,L_3 + 3\,L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2\,x & - & 2\,y & + & z & = & 0 \\ & - & 4\,y & + & 3\,z & = & 0 \\ & & & - & 5\,z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ccccl} x & & & = & 0 \\ & y & & = & 0 \\ & & z & = & 0 \end{array}\right.$$

(par remontées successives)

□

Exercice 4

Toutes les variables aléatoires sont supposées définies sur un même espace probabilisé noté $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

On considère une urne contenant initialement une boule bleue et une boule rouge. On procède à des tirages successifs d'une boule au hasard selon le protocole suivant :

× si on obtient une boule bleue, on la remet dans l'urne et on ajoute une boule bleue supplémentaire ;

× si on obtient une boule rouge, on la remet dans l'urne et on arrête l'expérience.

On suppose que toutes les boules sont indiscernables au toucher et on admet que l'expérience s'arrête avec une probabilité égale à 1. On note N la variable aléatoire égale au nombre de boules présentes dans l'urne à la fin de l'expérience.

1. a) Montrer soigneusement : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}, \mathbb{P}\big([N = n]\big) = \dfrac{1}{n\,(n-1)}$.

Démonstration.

- Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note :

$$B_k \ : \ \text{« on obtient une boule bleue au } k^{\text{ème}} \text{ tirage »}$$

$$R_k \ : \ \text{« on obtient une boule rouge au } k^{\text{ème}} \text{ tirage »}$$

- Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$.
L'événement $[N = n]$ est réalisé si et seulement si lorsque l'expérience s'arrête, l'urne contient n boules, c'est-à-dire $n-1$ boules bleues et 1 boules rouges. Autrement dit, $[N = n]$ est réalisé si et seulement si, lorsque l'expérience s'arrête on a ajouté $n-1-1 = n-2$ boules bleues dans l'urne, c'est-à-dire si et seulement si on a pioché $n-2$ boules bleues puis la boule rouge.
Ainsi :

$$[N = n] \ = \ B_1 \cap \ldots \cap B_{n-2} \cap R_{n-1}$$

On en déduit par la formule des probabilités composées :

$$\begin{array}{cl} & \mathbb{P}\big(\,[N=n]\,\big) \\ = & \mathbb{P}\big(B_1 \cap \ldots \cap B_{n-2} \cap R_{n-1}\big) \\ = & \mathbb{P}(B_1) \times \mathbb{P}_{B_1}(B_2) \times \mathbb{P}_{B_1 \cap B_2}(B_3) \times \cdots \times \mathbb{P}_{B_1 \cap \cdots \cap B_{n-3}}(B_{n-2}) \times \mathbb{P}_{B_1 \cap \cdots \cap B_{n-2}}(R_{n-1}) \\ = & \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2}{3} \times \dfrac{3}{4} \times \cdots \times \dfrac{n-2}{n-1} \times \dfrac{1}{n} \end{array}$$

Précisons cette dernière égalité :

$\times$ $\mathbb{P}(B_1) = \dfrac{1}{2}$.

$\times$ $\mathbb{P}_{B_1 \cap \cdots \cap B_{n-2}}(R_{n-1}) = \dfrac{1}{n}$ car chaque boule a même probabilité d'être tirée.

Plus précisément, si l'événement $B_1 \cap \cdots \cap B_{n-2}$ est réalisé, c'est que les $n-2$ permiers tirages ont donné une boule bleue.

Dans ce cas, l'événement R_{n-1} est réalisé si et seulement si lors du $(n-1)^{\text{ème}}$ tirage la boule rouge est tirée dans l'urne contenant n boules.

Finalement, en procédant à des simplifications successives, on obtient :

$$\mathbb{P}\big(\,[N=n]\,\big) \;=\; \frac{1}{(n-1)\,n}$$

$$\boxed{\text{Finalement, pour tout } n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\},\ \mathbb{P}\big(\,[N=n]\,\big) \;=\; \dfrac{1}{n\,(n-1)}.}$$

□

b) La variable aléatoire N admet-elle une espérance ?

Démonstration.

- La v.a.r. N admet une espérance si et seulement si la série $\sum\limits_{n \geqslant 2} n\,\mathbb{P}([N=n])$ est absolument convergente. Cette série étant à termes positifs, cela revient à démontrer qu'elle est convergente.
- Soit $N \geqslant 2$.

$$\begin{array}{rcll} \sum\limits_{n=2}^{N} n\,\mathbb{P}([N=n]) & = & \sum\limits_{n=2}^{N} \cancel{n}\, \dfrac{1}{\cancel{n}(n-1)} & \textit{(d'après la question précédente)} \\ & = & \sum\limits_{n=1}^{N-1} \dfrac{1}{n} & \textit{(par décalage d'indice)} \end{array}$$

- Or la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{1}{n}$ est une série de Riemann d'exposant 1 ($1 \not> 2$). Elle est donc divergente.

  Ainsi, la série $\sum\limits_{n \geqslant 2} n\,\mathbb{P}([N=n])$ est divergente.

$$\boxed{\text{On en déduit que la v.a.r. } N \text{ n'admet pas d'espérance.}}$$

□

2. Recopier et compléter les lignes incomplètes de la fonction **Python** suivante de façon à ce qu'elle renvoie une simulation de la variable aléatoire N.

```
import random as rd

def simuleN() :
    b = 1 # b désigne le nombre de boules bleues dans l'urne
    while rd.random() < ..........
        b = b + 1
    N = ..........
    return N
```

Démonstration.
On propose la fonction **Python** suivante.

```
1 def simuleN() :
2     b = 1 # b désigne le nombre de boules bleues dans l'urne
3     while rd.random() < b/(b+1)
4         b = b + 1
5     N = b + 1
6     return N
```

Détaillons les éléments de ce script.

- **Début de la fonction**
  On commence par préciser la structure de la fonction :
  × cette fonction se nomme `simuleN`,
  × elle ne prend pas de paramètre en entrée,
  × elle renvoie la valeur stockée dans la variable `N`.

```
1 def simuleN() :
```

```
6     return N
```

  En ligne 2, la variable `b`, qui contient le nombre de boules bleues dans l'urne à chaque tirage, est initialisée à 1 (initialement l'urne contient une seule boule bleue).

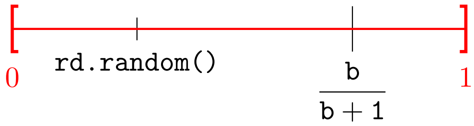
```
2     b = 1
```

- **Structure itérative**
  × Les lignes 3 à 4 consistent, au fur et à mesure des tirages, à mettre à jour la variable `b` (désignant le nombre de boules bleues dans l'urne) jusqu'à l'obtention d'une boule rouge. Autrement dit, on doit effectuer une mise à jour de `b` tant que l'on pioche une boule bleue.
  Pour cela on met en place une structure itérative (boucle while) :

```
3     while random.random() < b/(b+1)
```

  × Détaillons l'obtention de la ligne 3.
  On utilise ici la commande `rd.random`. Cette instruction renvoie un réel choisi aléatoirement dans $[0, 1]$.
  Plus formellement, il s'agit de simuler une v.a.r. U telle que $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1])$.

× Cette valeur choisie aléatoirement dans $[0, 1]$ permet d'obtenir une simulation d'un tirage dans l'urne.



Deux cas se présentent.

– Si `rd.random()` $< \dfrac{\mathtt{b}}{\mathtt{b+1}}$: alors, on considère qu'on a obtenu une boule bleue.
Ce cas se produit avec la probabilité :

$$\mathbb{P}\left(\left[0 \leqslant U \leqslant \frac{\mathtt{b}}{\mathtt{b+1}}\right]\right) = \mathbb{P}\left(\left[U \leqslant \frac{\mathtt{b}}{\mathtt{b+1}}\right]\right) = \frac{\mathtt{b}}{\mathtt{b+1}}$$

ce qui correspond bien à la probabilité d'obtenir une boule bleue dans une urne contenant `b` boule bleues et 1 boule rouge.
Dans ce cas, on met à jour la variable `b` en l'incrémentant de 1.

```
            b = b + 1
```

– Si `rd.random()` $\geqslant \dfrac{\mathtt{b}}{\mathtt{b+1}}$: alors, on considère qu'on a obtenu la boule rouge.
Ce cas se produit avec la probabilité :

$$\mathbb{P}\left(\left[\frac{\mathtt{b}}{\mathtt{b+1}} \leqslant U \leqslant 1\right]\right) = \mathbb{P}\left(\left[\frac{\mathtt{b}}{\mathtt{b+1}} \leqslant U\right]\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\left[U < \frac{\mathtt{b}}{\mathtt{b+1}}\right]\right) = 1 - \frac{\mathtt{b}}{\mathtt{b+1}} = \frac{1}{\mathtt{b+1}}$$

ce qui correspond bien à la probabilité d'obtenir la boule rouge dans une urne contenant `b` boule bleues et 1 boule rouge.
Dans ce cas, on ne met pas à jour la variable `b` et on arrête les tirages dans l'urne.

- **Fin de la fonction**
À l'issue de la boucle while, la variable `b` contient le nombre de boules bleues à la fin de l'expérience.
Il faut donc lui ajouter 1 pour obtenir le nombre total de boules dans l'urne à la fin de l'expérience.
Il ne reste qu'à stocker cette valeur `b + 1` dans la variable de sortie `N`.

```
        N = b + 1
```

□

Exercice 5
Déterminer les solutions des équations différentielles suivantes d'inconnues $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$:

1. (E_2) $y' - 5y = x^2$

2. (E_6) $y' + y = t^k \, \mathrm{e}^{-t}$

Démonstration.

1. Résolvons (E_2).

- On commence par résoudre son équation homogène associée (H_2) $y' - 5y = 0$.
C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants. L'ensemble de ses solutions est donc :

$$\{x \mapsto \lambda \, \mathrm{e}^{5x} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

- On cherche ensuite une solution particulière de (E_2).
  Comme le second membre de (E_2) est une fonction polynomiale de degré 2, on cherche une fonction polynomiale de degré 2 solution de (E_2).
  Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. On note alors $g : x \mapsto a\,x^2 + b\,x + c$. La fonction g est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcl}
g \text{ est solution de } (E_2) & \Longleftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) - 5\,g(x) = x^2 \\
& \Longleftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R},\ 2a\,x + b - 5\,(a\,x^2 + b\,x + c) = x^2 \\
& \Longleftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R},\ -5a\,x^2 + (2a - 5b)\,x + (b - 5c) = x^2 \\
& \Longleftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -5a & & & & & = & 1 \\ 2a & - & 5b & & & = & 0 \\ & & b & - & 5c & = & 0 \end{array}\right. \\
& \overset{L_2 \leftarrow 5\,L_2 + 2\,L_1}{\Longleftrightarrow} & \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -5a & & & & & = & 1 \\ & - & 25b & & & = & 2 \\ & & b & - & 5c & = & 0 \end{array}\right. \\
& \overset{L_3 \leftarrow 25\,L_3 + L_2}{\Longleftrightarrow} & \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -5a & & & & & = & 1 \\ & - & 25b & & & = & 2 \\ & & & - & 125c & = & 2 \end{array}\right. \\
& \Longleftrightarrow & \left\{\begin{array}{lcl} a & = & -\frac{1}{5} \\ b & = & -\frac{2}{25} \\ c & = & -\frac{2}{125} \end{array}\right.
\end{array}$$

  Ainsi, la fonction $g : x \mapsto -\dfrac{1}{5}\left(x^2 + \dfrac{2}{5}\,x + \dfrac{2}{25}\right)$ est une solution particulière de (E_2).

$$\boxed{\text{On en déduit que l'ensemble des solutions de } (E_2) \text{ est : } \left\{x \mapsto \lambda\,\mathrm{e}^{5x} - \dfrac{1}{5}\left(x^2 + \dfrac{2}{5}\,x + \dfrac{2}{25}\right) \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\}.}$$

2. Résolvons (E_6).

- On commence par résoudre son équation homogène associée (H_6) $y' + y = 0$.
  C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants. L'ensemble de ses solutions est donc :
$$\{t \mapsto \lambda\,\mathrm{e}^{-t} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

- On cherche ensuite une solution particulière de (E_1).
  Comme le second membre de (E_6) semble complexe (et que (E_6) est une EDL d'ordre 1), on applique la méthode de variation de la constante. Autrement dit, on cherche une solution particulière de (E_6) sous la forme $t \mapsto \lambda(t)\,\mathrm{e}^{-t}$.
  Soit $\lambda \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On note alors $g : t \mapsto \lambda(t)\,\mathrm{e}^{-t}$. La fonction g est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcl}
g \text{ est solution de } (E_6) & \Leftrightarrow & \forall t \in \mathbb{R},\ g'(t) + g(t) = t^k\,\mathrm{e}^{-t} \\
& \Leftrightarrow & \forall t \in \mathbb{R},\ \big(\lambda'(t)\,\mathrm{e}^{-t} + \cancel{\lambda(t) \times (-\mathrm{e}^{-t})}\big) + \cancel{\lambda(t)\,\mathrm{e}^{-t}} = t^k\,\mathrm{e}^{-t} \\
& \Leftrightarrow & \forall t \in \mathbb{R},\ \lambda'(t) = t^k
\end{array}$$

La fonction λ cherchée peut donc être choisie parmi les primitives de $t \mapsto t^k$.
La fonction $\lambda : t \mapsto \dfrac{1}{k+1}\, t^{k+1}$ convient.
Ainsi, la fonction $g_5 : x \mapsto \dfrac{1}{k+1}\, t^{k+1}\, \mathrm{e}^{-t}$ est une solution particulière de (E_6).

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{On en déduit que l'ensemble des solutions de } (E_6) \text{ est :} \\ \{t \mapsto \lambda\, \mathrm{e}^{-t} + \dfrac{1}{k+1}\, t^{k+1}\, \mathrm{e}^{-t} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.\end{array}}$$

$\square$

Exercice 6
Déterminer les solutions des équations différentielles suivantes d'inconnues $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$:

1. (E_1) $y'' - 3\sqrt{2}\, y' + 4\, y = 8$

2. (E_4) $2y'' - 3y' + y = x\, \mathrm{e}^{-x}$

Démonstration.

1) Résolvons (E_1).

- On commence par résoudre son équation homogène associée (H_1) $y'' - 3\sqrt{2}\, y' + 4\, y = 0$.
  C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants. On détermine donc les racines de son polynôme caractéristique $Q(X) = X^2 - 3\sqrt{2}\, X + 4$. On note Δ son discriminant.
  $$\Delta \;=\; (-3\sqrt{2})^2 - 4 \times 1 \times 4 \;=\; 18 - 16 \;=\; 2$$
  Les racines de Q sont donc :
  $$x_1 \;=\; \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{2}}{2} \;=\; \sqrt{2} \qquad \text{et} \qquad x_2 \;=\; \frac{3\sqrt{2} + \sqrt{2}}{2} \;=\; 2\sqrt{2}$$
  Comme $x_1 \neq x_2$, l'ensemble des solutions de (H_1) est :
  $$\{x \mapsto \lambda\, \mathrm{e}^{\sqrt{2}\, x} + \mu\, \mathrm{e}^{2\sqrt{2}\, x} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$$
- On cherche ensuite une solution particulière de (E_1).
  Comme le second membre de (E_1) est une constante, on cherche une fonction constante solution de (E_1).
  Soit $c \in \mathbb{R}$. On note alors $g : x \mapsto c$. La fonction g est bien de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.
  $$\begin{array}{rcl} g \text{ est solution de } (E_1) & \Leftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R},\ g''(x) - 3\sqrt{2}\, g'(x) + 4\, g(x) = 8 \\ & \Leftrightarrow & 4\, c = 8 \\ & \Leftrightarrow & c = 2 \end{array}$$
  Ainsi, la fonction $g_1 : x \mapsto 2$ est une solution particulière de (E_1).

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{On en déduit que l'ensemble des solutions de } (E_1) \text{ est :} \\ \{x \mapsto \lambda\, \mathrm{e}^{\sqrt{2}\, x} + \mu\, \mathrm{e}^{2\sqrt{2}\, x} + 2 \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}.\end{array}}$$

2) Résolvons (E_4).

- On commence par résoudre son équation homogène associée (H_4) $2\,y'' - 3\,y' + y = 0$.
  C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants. On détermine donc les racines de son polynôme caractéristique $Q(X) = 2\,X^2 - 3\,X + 1 = 2\,(X-1)\left(X - \dfrac{1}{2}\right)$. Les racines de Q sont donc :
  $$x_1 \;=\; 1 \qquad \text{et} \qquad x_2 \;=\; \frac{1}{2}$$
  Comme $x_1 \neq x_2$, l'ensemble des solutions de (H_4) est :
  $$\{x \mapsto \lambda\,\mathrm{e}^{x} + \mu\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\,x} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$$

- On cherche ensuite une solution particulière de (E_4).
  Comme le second membre de (E_4) est $x \mapsto x\,\mathrm{e}^{(-1)\times x}$ et que $x_1 \neq -1$ et $x_2 \neq -1$, on cherche une solution de (E_4) sous la forme $x \mapsto (a\,x+b)\,\mathrm{e}^{-x}$.
  (le degré de la fonction polynomiale $x \mapsto a\,x+b$ est égal au degré de $x \mapsto x$ (fonction polynomiale précédant e^{-x} dans le second membre de (E_4)) auquel on ajoute 0 (l'ordre de multiplicité de la racine -1 pour le polynôme Q))
  Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. On note alors $g : x \mapsto (a\,x+b)\,\mathrm{e}^{-x}$. La fonction g est bien de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:
  $$\begin{aligned} g'(x) &= a\,\mathrm{e}^{-x} + (ax+b)\times(-\mathrm{e}^{-x}) \;=\; (-ax+a-b)\,\mathrm{e}^{-x} \\ g''(x) &= -a\,\mathrm{e}^{-x} + (-ax+a-b)\times(-\mathrm{e}^{-x}) \;=\; (ax+b-2a)\,\mathrm{e}^{-x} \end{aligned}$$
  On obtient :
  $$\begin{array}{cl} & g \text{ est solution de } (E_4) \\ \Longleftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R},\; 2\,g''(x) - 3\,g'(x) + g(x) = x\,\mathrm{e}^{-x} \\ \Longleftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R},\; 2\,(ax+b-2a)\,\mathrm{e}^{-x} - 3\,(-ax+a-b)\,\mathrm{e}^{-x} + (ax+b)\,\mathrm{e}^{-x} = x\,\mathrm{e}^{-x} \\ \Longleftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R},\; (6a\,x + 6b - 7a)\,\mathrm{e}^{-x} = x\,\mathrm{e}^{-x} \\ \Longleftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R},\; 6a\,x + 6b - 7a = x \qquad\qquad \textit{(car } \forall x \in \mathbb{R},\; \mathrm{e}^{-x} \neq 0\textit{)} \\ \Longleftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcrcl} 6a & & & = & 1 \\ -7a & + & 6b & = & 0 \end{array}\right. \\ \underset{}{\overset{L_2 \leftarrow 6\,L_2 + 7\,L_1}{\Longleftrightarrow}} & \left\{\begin{array}{rcl} 6a & = & 1 \\ 36b & = & 7 \end{array}\right. \\ \Longleftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcl} a & = & \frac{1}{6} \\ b & = & \frac{7}{36} \end{array}\right. \end{array}$$
  Ainsi, la fonction $g_4 : x \mapsto \left(\dfrac{1}{6}\,x + \dfrac{7}{36}\right)\mathrm{e}^{-x}$ est une solution particulière de (E_4).

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{On en déduit que l'ensemble des solutions de } (E_4) \text{ est :} \\ \{x \mapsto \lambda\,\mathrm{e}^{x} + \mu\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\,x} + \dfrac{1}{6}\left(x + \dfrac{7}{6}\right)\mathrm{e}^{-x} \mid (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\}.\end{array}}$$

$\square$

Exercice 7

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^x}{e^{2x}+1}$.

1. a) Démontrer que f est paire sur $\mathbb{R}$.

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$f(-x) \;=\; \frac{e^{-x}}{e^{-2x}+1} \;=\; \frac{e^{2x}}{e^{2x}}\,\frac{e^{-x}}{e^{-2x}+1} \;=\; \frac{e^x}{1+e^{2x}} \;=\; f(x)$$

$$\boxed{\text{Ainsi, la fonction est paire sur } \mathbb{R}.}$$

□

b) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et étudier ses variations.

Démonstration.

- La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ car est le quotient de :
  - × la fonction $x \mapsto e^x$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$,
  - × la fonction $x \mapsto e^{2x}+1$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et **qui ne s'annule pas sur** $\mathbb{R}$.

  (en fait, on peut démontrer par une argumentation similaire que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$)
- Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$f'(x) \;=\; \frac{e^x\ (e^{2x}+1) - e^x\ (2\ e^{2x})}{(e^{2x}+1)^2} \;=\; \frac{e^{3x}+e^x-2\ e^{3x}}{(e^{2x}+1)^2} \;=\; \frac{e^x - e^{3x}}{(e^{2x}+1)^2}$$

  Comme $(e^{2x}+1)^2 > 0$, $f'(x)$ est du signe de $e^x - e^{3x}$.
- Si $x > 0$, $3x > x$ et donc $e^{3x} > e^x$ par stricte croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$.
  Dans ce cas, $f'(x) < 0$.
  L'autre cas se déduit par parité de la fonction f.
- On en déduit le tableau de variations de f.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de f	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0

Détaillons les différents éléments de ce tableau :

× $f(0) \;=\; \dfrac{e^0}{e^0+1} \;=\; \dfrac{1}{1+1} \;=\; \dfrac{1}{2}$,

× $\dfrac{e^x}{e^{2x}+1} \;=\; \dfrac{e^x}{e^{2x}}\,\dfrac{1}{1+\frac{1}{e^{2x}}} \;=\; \dfrac{1}{e^x}\,\dfrac{1}{1+\frac{1}{e^{2x}}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$

□

c) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution $\ell \in \mathbb{R}^+$.

Démonstration.
Notons $g : x \mapsto f(x) - x$. La fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ par somme de fonctions $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On procède par disjonction de cas :

- Si $x < 0$: comme $f(x) > 0$, l'équation $f(x) = x$ n'admet pas de solution.
- Si $x \geqslant 0$: tout d'abord, $g'(x) = f'(x) - 1$.
  Or $f'(x) \leqslant 0$ donc $g'(x) = f'(x) - 1 < 0$ et la fonction g est strictement décroissante.
  La fonction g est :
  - × continue sur $[0, +\infty[$,
  - × strictement décroissante sur $[0, +\infty[$.

  Elle réalise donc une bijection de $[0, +\infty[$ sur $g([0, +\infty[)$. Or :
  $$g([0, +\infty[) = \left] \lim_{x \to +\infty} g(x),\ g(0) \right] = \left] -\infty,\ \frac{1}{2} \right]$$
  En effet :
  - × $g(0) \ = \ f(0) - 0 \ = \ \dfrac{1}{2}$.
  - × comme $f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, on obtient : $g(x) = f(x) - x \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

  Enfin, comme $0 \in \left] -\infty, \dfrac{1}{2} \right]$, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\ell \in \mathbb{R}^+$.

$$\boxed{\text{On en déduit que l'équation } f(x) = x \text{ admet une unique solution } \ell \in [0, +\infty[.}$$

□

d) Justifier : $0 \leqslant \ell \leqslant \dfrac{1}{2}$.
Données numériques : $e^{1/2} \simeq 1,65$ et $e \simeq 2,72$ au centième près.

Démonstration.
Tout d'abord, remarquons :

- × $g(0) \ = \ f(0) - 0 \ = \ \dfrac{1}{2} \ \geqslant \ 0$,
- × $g(\ell) \ = \ f(\ell) - \ell \ = \ 0$,
- × $g\left(\dfrac{1}{2}\right) \ = \ f\left(\dfrac{1}{2}\right) - \dfrac{1}{2} \ = \ \dfrac{e^{\frac{1}{2}}}{e^1 + 1} - \dfrac{1}{2} \ = \ \dfrac{2\,e^{\frac{1}{2}} - e - 1}{2\,(e+1)} \leqslant 0$.

  En effet :
  $2\,e^{\frac{1}{2}} - e - 1 \ \simeq \ 2 \times 1,65 - 2,72 - 1 \ = \ 3,3 - 3,72 \ = \ -0,42 \ \leqslant \ 0$
  (les valeurs étant données au centième près, l'approximation obtenue est exacte au moins au dixième près)

On obtient donc : $g(0) \ \geqslant \ g(\ell) \ \geqslant \ g\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

Ces trois éléments sont dans l'ensemble $\left] -\infty, \dfrac{1}{2} \right]$.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{En appliquant } g^{-1} : \left] -\infty, \frac{1}{2} \right] \to \mathbb{R}_+ \text{ de part et d'autre} \\ \text{de l'inégalité, on obtient : } 0 \ \leqslant \ \ell \ \leqslant \ \frac{1}{2}.\end{array}}$$

Commentaire

On pouvait aussi tout simplement remarquer que, d'après la question précédente :
- $\times$ $\ell \in \mathbb{R}^+$
- $\times$ $\ell = f(\ell)$

Ainsi : $\ell = f(\ell) \in f(\mathbb{R}^+)$. Or $f(\mathbb{R}^+) =]0, \frac{1}{2}]$. Ainsi $\ell \in]0, \frac{1}{2}]$.

□

e) Montrer : $\forall x \geqslant 0,\ |f'(x)| \leqslant f(x)$.
En déduire : $\forall x \geqslant 0,\ |f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}$.

Démonstration.
Soit $x \geqslant 0$.

- D'après la question ***1.b)*** :
$$f'(x) = \frac{e^x - e^{3x}}{1 + e^{2x}} \leqslant 0$$
Donc : $|f'(x)| = -f'(x) = \dfrac{e^{3x} - e^x}{1 + e^{2x}}$. Et ainsi :
$$\begin{aligned} |f'(x)| - f(x) &= \frac{e^{3x} - e^x}{(e^{2x}+1)^2} - \frac{e^x}{e^{2x}+1} = \frac{e^{3x} - e^x - e^x \times (e^{2x}+1)}{(e^{2x}+1)^2} \\ &= \frac{\cancel{e^{3x}} - e^x - \cancel{e^{3x}} - e^x}{(e^{2x}+1)^2} = \frac{-2\, e^x}{(e^{2x}+1)^2} \leqslant 0 \end{aligned}$$
$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall x \geqslant 0,\ |f'(x)| \leqslant f(x).}$$
- Or, l'étude de la fonction f (question ***1.b)***) démontre qu'elle atteint son maximum en 0.
$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall x \geqslant 0,\ |f'(x)| \leqslant f(x) \leqslant f(0) = \frac{1}{2}.}$$

□

f) Vérifier que $f([0, \frac{1}{2}]) \subset [0, \frac{1}{2}]$.

Démonstration.
La fonction f est continue et décroissante sur $[0, \frac{1}{2}]$. On en déduit :
$$f\left(\left[0, \frac{1}{2}\right]\right) = \left[f\left(\frac{1}{2}\right),\ f(0)\right] = \left[\frac{e^{\frac{1}{2}}}{e+1}, \frac{1}{2}\right] \subset \left[0, \frac{1}{2}\right]$$
$$\boxed{\text{L'intervalle } [0, \tfrac{1}{2}] \text{ est stable par } f.}$$

□

2. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :
$$u_0 = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\quad u_{n+1} = f(u_n)$$

a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_n \in [0, \frac{1}{2}]$.

Démonstration.
Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)$
où $\mathcal{P}(n)$: $u_n \in [0, \frac{1}{2}]$.

▸ **Initialisation** :
$u_0 = 0 \in [0, \frac{1}{2}]$.
D'où $\mathcal{P}(0)$.

▸ **Hérédité** :
Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$
(*i.e.* $u_{n+1} \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$).
Par définition, $u_{n+1} = f(u_n)$. Or :
× par hypothèse de récurrence, on sait : $u_n \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$.
× l'intervalle $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ est stable par f.
On obtient donc : $u_{n+1} = f(u_n) \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$.
D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in \left[0, \tfrac{1}{2}\right].}$$

□

b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|u_{n+1} - \ell| \leqslant \frac{1}{2}\,|u_n - \ell| \qquad \text{puis que} \qquad |u_n - \ell| \leqslant \frac{1}{2^{n+1}}$$

Démonstration.

- D'après les questions précédentes :
  × f est dérivable sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$,
  × $\forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right],\ |f'(x)| \leqslant \frac{1}{2}$.
  On en déduit, par l'inégalité des accroissements finis :

$$\forall (x, y) \in \left[0, \frac{1}{2}\right]^2,\ |f(y) - f(x)| \leqslant \frac{1}{2}\,|y - x|$$

  Soit $n \in \mathbb{N}$. En appliquant cette inégalité à $y = u_n \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ et $x = \ell \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, on obtient :

$$|f(u_n) - f(\ell)| \leqslant \frac{1}{2}\,|u_n - \ell|$$

$$\boxed{\text{Et ainsi : } |u_{n+1} - \ell| \leqslant \tfrac{1}{2}\,|u_n - \ell|.}$$

- Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)$
  où $\mathcal{P}(n)$: $|u_n - \ell| \leqslant \dfrac{1}{2^{n+1}}$.

  ▸ **Initialisation** :
  $|u_0 - \ell| \leqslant \frac{1}{2}$ car u_0 et ℓ sont des éléments de $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.
  D'où $\mathcal{P}(0)$.

  ▸ **Hérédité** :
  Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$
  (*i.e.* $|u_{n+1} - \ell| \leqslant \dfrac{1}{2^{n+2}}$).
  D'après le résultat précédent : $|u_{n+1} - \ell| \leqslant \frac{1}{2}\,|u_n - \ell|$.
  Or, par hypothèse de récurrence : $|u_n - \ell| \leqslant \dfrac{1}{2^{n+1}}$.
  En combinant ces deux résultats, on obtient :

$$|u_{n+1} - \ell| \leqslant \frac{1}{2}\,|u_n - \ell| \leqslant \frac{1}{2}\,\frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^{n+2}}$$

  D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \ell| \leqslant \frac{1}{2^{n+1}}.}$$

□

c) En déduire que la suite (u_n) converge vers ℓ.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- D'après la question précédente : $|u_n - \ell| \leqslant \dfrac{1}{2^{n+1}}$. Autrement dit :

$$-\frac{1}{2^{n+1}} \leqslant u_n - \ell \leqslant \frac{1}{2^{n+1}}$$

- Or :
  × $\dfrac{1}{2^{n+1}} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ car $2^{n+1} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$,
  × $-\dfrac{1}{2^{n+1}} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

Donc, d'après le théorème d'encadrement, la suite $(u_n - \ell)$ est convergente de limite 0.

$$\boxed{\text{Ainsi, la suite } (u_n) \text{ est convergente et de limite } \ell.}$$

□

3. Informatique

a) Écrire une fonction **Python** `f` qui prend en entrée un réel `x` et qui calcule $f(\mathtt{x})$.

Démonstration.

```
import numpy as np

def f(x) :
    y = np.exp(x) / (np.exp(2*x) + 1)
    return y
```

□

b) En utilisant la fonction `f` précédente, écrire une fonction `SuiteU` qui prend en entrée un entier positif n et qui calcule u_n.

Démonstration.
On propose la fonction suivante :

```
def SuiteU(n) :
    u = 0
    for i in range(n) :
        u = f(u)
    return u
```

Détaillons les éléments de cette fonction.

- **Début de la fonction**
  L'énoncé commence par préciser la structure de la fonction :
  × cette fonction se nomme `SuiteU`,
  × elle prend en paramètre d'entrée l'entier `n`,
  × elle renvoie la valeur stockée dans la variable `u`.

```
def SuiteU(n) :
```

```
    return u
```

La variable `u`, qui contiendra les valeurs successives de la suite (u_n) est initialisée à 0 : la valeur de u_0.

```
2        u = 0
```

- **Structure itérative**
  Les lignes 3 à 4 consistent à calculer les valeurs successives de la suite (u_n).
  Pour cela, on utilise une structure itérative (boucle for) :

```
3        for i in range(n) :
4            u = f(u)
```

  On tire ici partie de la définition récursive (d'ordre 1) de cette suite. La nouvelle valeur de la suite, que l'on stockera dans la variable `u`, est obtenue à l'aide de la valeur précédente qui est celle alors stockée dans `u`.

- **Fin de la fonction**
  À l'issue de cette boucle, la variable `u` contient la quantité $u_{\texttt{n}}$ où `n` est le paramètre entré lors de l'appel de la fonction.

Commentaire

- Afin de permettre une bonne compréhension des mécanismes en jeu, on a détaillé la réponse à cette question. Cependant, proposer un programme **Python** correct démontre la bonne compréhension de ces mécanismes et permet certainement d'obtenir la majorité des points alloués à cette question.
- Le programme **Python** consiste à mettre à jour successivement la variable `u` jusqu'à obtention de la valeur que l'on souhaite calculer. L'idée est la suivante.
  Si avant le $i^{\text{ème}}$ tour de boucle (avec $\texttt{i} \in [\![1, \texttt{n}]\!]$) :

  $$\text{la variable } \texttt{u} \text{ contient la valeur } u_{i-1}$$

  alors, à l'issue de ce tour de boucle :

  $$\text{la variable } \texttt{u} \text{ contient la valeur } u_i$$

  Cette propriété est ce qu'on appelle un **invariant de boucle**. Elle permet d'assurer la correction de la fonction implémentée et notamment le fait qu'à l'issue du dernier tour de boucle la variable `u` contient $u_{\texttt{n}}$.
- Dans ce programme, on réalise un appel à la fonction `f`. On obtient ainsi le programme générique permettant de calculer $u_{\texttt{n}}$ pour toute suite (u_n) récurrente d'ordre 1 (c'est à dire qui vérifie : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f\big(u_n\big)$). Il est vivement conseillé d'apprendre ce programme.
- Aux concours, il est toujours possible de coder la fonction `f` à part. Cependant, les questions **Python** sont généralement plus dirigées (on demande généralement de remplir des programmes à trous) ce qui laisse au candidat moins de possibilité de prendre des initiatives. Il faut aussi savoir coder la fonction `SuiteU` lorsque l'on ne demande pas au préalable de coder la fonction `f`. Il suffit alors de remplacer `f(u)` par son expression.

```
def SuiteU(n) :
    u = 0
    for i in range(n) :
        u = np.exp(u) / (np.exp(2*u) + 1)
    return u
```

□

c) En utilisant la fonction `SuiteU` précédente, comment peut-on obtenir à l'aide de **Python** une valeur approchée de ℓ à 10^{-4} près ?

Démonstration.
D'après la question ***2.b.***, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $|u_n - \ell| \leqslant \dfrac{1}{2^{n+1}}$.
S'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que : $\dfrac{1}{2^{n+1}} \leqslant 10^{-6}$, on obtiendra par transitivité : $|u_n - \ell| \leqslant 10^{-6}$. Or :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2^{n+1}} \leqslant 10^{-6} &\Leftrightarrow 2^{n+1} \geqslant 10^6 && \textit{(par stricte décroissance de la fonction inverse sur }]0,+\infty[\textit{)}\\
&\Leftrightarrow \ln\left(2^{n+1}\right) \geqslant \ln\left(10^6\right) && \textit{(par stricte croissance de la fonction } \ln \textit{ sur }]0,+\infty[\textit{)}\\
&\Leftrightarrow (n+1)\ \ln(2) \geqslant 6\ \ln(10) \\
&\Leftrightarrow n+1 \geqslant \frac{6\ \ln(10)}{\ln(2)} && \textit{(car } \ln(2) > 0\textit{)}\\
&\Leftrightarrow n \geqslant \frac{6\ \ln(10)}{\ln(2)} - 1
\end{aligned}$$

Pour $N = \left\lceil \dfrac{6\ \ln(10)}{\ln(2)} - 1 \right\rceil$ (et les entiers plus grands) on est donc assuré que :

$$|u_N - \ell| \leqslant 10^{-6}$$

ce qui signifie que u_N est une approximation de ℓ à 10^{-6} près.
Il suffit alors d'appeler la fonction `SuiteU` avec pour paramètre `N`.

```
N = int(np.ceil(6 * np.log(10) / np.log(2) - 1))
u = SuiteU(N)
```

Notons l'utilisation de la fonction `int` qui permet de considérer la variable `N` non pas comme un réel (type `float`) mais comme un entier (type `int`). Sans cela, on ne peut pas appliquer la fonction `SuiteU` à cette variable `N`. □