Interrogation de rentrée

On traitera obligatoirement les exercices 1, 2 et 3, et on les traitera dans cet ordre. Les autres ne sont pas obligatoires et peuvent être traités dans n'importe quel ordre.

Exercice 1. *Rayer la ou les mentions inutiles (aucune justification n'est attendue)*

1. Dans l'écriture $f : x \mapsto 1 + x$, la variable x est	:	libre / liée
2. Dans l'écriture $\big([X = i]\big)_{i \in [\![1,n]\!]}$, la variable i est	:	libre / liée
et la variable n est	:	libre / liée
3. Le résultat de la quantité $\sum\limits_{i=1}^{k} i$ dépend de	:	i / k / ni i ni k
4. Une variable muette est	:	libre / liée
5. Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite admettant une limite (finie ou non), la quantité $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$	:	dépend de n / ne dépend par de n / peut dépendre de n
6. Dans l'écriture $\displaystyle\int_0^x f(t)\, dt$, la variable t est	:	libre / liée
la variable x est	:	libre / liée
7. Dans l'écriture $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0 \text{ et } y = 0\}$,		
la variable x est	:	libre / liée
la variable y est	:	libre / liée
la variable z est	:	libre / liée
8. Dans l'écriture : $\forall x \in \mathbb{R}_+, \exists y \in \mathbb{R},\ x = y^2$,		
la variable x est	:	libre / liée
la variable y est	:	libre / liée
9. Une variable libre	:	doit toujours / ne doit jamais / doit parfois — être introduite par un « Soit »
10. Une variable liée	:	doit toujours / ne doit jamais / doit parfois — être introduite par un « Soit »

- **10 pts : on attribue 1 pt par question juste, pas de point négatif en cas de question fausse.**

Exercice 2

Pour chacune des expressions suivantes :

(i) déterminer si elle désigne une proposition ou un objet. Si c'est un objet, précisez de quel type d'objet il s'agit (réel, fonction, suite, série, ensemble).

- **12 pts : on attribue 1 pt si le bon terme (proposition, réel, fonction, suite, série, ensemble) apparaît et 0 sinon.**

(ii) indiquer, pour chaque variable en présence, si elle est libre ou liée.

- **12 pts : on attribue 1 pt par réponse juste.**

Aucune justification n'est attendue pour ces questions.

1. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n}\, dx$

2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^x}{1+t}\, dt$,

3. $f : t \mapsto \mathrm{e}^{-t}$,

4. $f(x)$,

5. $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0\}$,

6. $\displaystyle\sum_{i=j}^{n} (i+j)^3$,

7. $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} \sum_{i=j}^{n} (i+j)^3$,

8. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$,

9. $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} u_n$,

10. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \geqslant \ln(2)$

11. $\mathcal{P}(n)$,

12. $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)$.

Exercice 3

1. a) Résoudre le système suivant : $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2\,y & + & z & = & 0 \\ 2\,x & + & 4\,y & + & 2\,z & = & 0 \\ -x & - & 2\,y & - & z & = & 0 \end{array}\right.$.

- **3 pts : $x = -2y - z$. Précisions :**
  - × **on attribue les 3 pts seulement si tout apparaît comme dans le corrigé.**
  - × **on peut attribuer jusque 2 pts en cas d'erreur de calcul.**
  - × **on peut attribuer jusque 2 pts en cas de gestion non correcte des variables auxiliaires mais bon résultat.**

b) On note : $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$. Déterminer $E_{-1}(A) = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = -X\}$.

- **1 pt : résultat** $E_{-1}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$
- **2 pts : rédaction. Plus précisément, on attribue :**
  - × **0 pt : si utilisation du symbole $\Rightarrow$ à une étape ou incompréhension totale des objets manipulés.**
  - × **1 pt : une confusion d'objet ou une présentation ne correspondant pas au corrigé (notamment le fait d'écrire : $X = y \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$)**
  - × **2 pts : tout parfait. Est accepté aussi une légère maladresse d'introduction du système (lien avec la question précédente).**

2. a) Résoudre le système suivant : $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & 2\,z & = & 0 \\ 2\,x & - & y & + & 3\,z & = & 0 \\ 5\,x & - & 3\,y & + & 8\,z & = & 0 \end{array}\right.$.

- **3 pts : $x = -z$ et $y = z$. Selon les modalités précédentes.**

b) On note : $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & -3 & 10 \end{pmatrix}$. Déterminer $E_2(A) = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = 2 \cdot X\}$.

- **1 pt : résultat** $E_2(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$
- **2 pts : rédaction. Plus précisément, on attribue :**
  - × **0 pt : si utilisation du symbole ⇒ à une étape ou incompréhension totale des objets manipulés.**
  - × **1 pt : une confusion d'objet ou une présentation ne correspondant pas au corrigé (notamment le fait d'écrire :** $X = z \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$**)**
  - × **2 pts : tout parfait. Est accepté aussi une légère maladresse d'introduction du système (lien avec la question précédente).**

3. a) Résoudre le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x & - & 2y & + & z & = & 0 \\ -x & - & y & + & z & = & 0 \\ x & + & 2y & - & 3z & = & 0 \end{array}\right.$$

- **3 pts :** $x = 0$ **et** $y = 0$ **et** $z = 0$**. Selon les modalités précédentes.**

Exercice 4

Toutes les variables aléatoires sont supposées définies sur un même espace probabilisé noté $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

On considère une urne contenant initialement une boule bleue et une boule rouge. On procède à des tirages successifs d'une boule au hasard selon le protocole suivant :

× si on obtient une boule bleue, on la remet dans l'urne et on ajoute une boule bleue supplémentaire ;

× si on obtient une boule rouge, on la remet dans l'urne et on arrête l'expérience.

On suppose que toutes les boules sont indiscernables au toucher et on admet que l'expérience s'arrête avec une probabilité égale à 1. On note N la variable aléatoire égale au nombre de boules présentes dans l'urne à la fin de l'expérience.

1. a) Montrer soigneusement : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \mathbb{P}\big([N = n]\big) = \dfrac{1}{n\,(n-1)}$.

- **1 pt : introduction des** B_k **et** R_k
- **1 pt : L'événement** $[N = n]$ **est réalisé si et seulement si...**
- **1 pt :** $[N = n] = B_1 \cap \cdots \cap B_{n-2} \cap R_{n-1}$
- **1 pt : formule des probabilités composées**
- **1 pt : explication valeurs probabilités conditionnelles**

b) La variable aléatoire N admet-elle une espérance ?

- **1 pt : La v.a.r.** N **admet une espérance si et seulement si la série** $\sum\limits_{n \geqslant 2} n\,\mathbb{P}\big([N = n]\big)$ **est absolument convergernte. Cette série étant à termes positifs, cela revient à démontrer qu'elle est convergente.**
- **1 pt :** $\sum\limits_{n=2}^{N} n\,\mathbb{P}\big([N = n]\big) = \sum\limits_{n=1}^{N-1} \dfrac{1}{n}$
- **1 pt : la série** $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{1}{n}$ **est une série de Riemann d'exposant** 1 $(1 \not> 2)$**. Elle est donc divergente.**

2. Recopier et compléter les lignes incomplètes de la fonction **Python** suivante de façon à ce qu'elle renvoie une simulation de la variable aléatoire N.

```
import random as random

def simuleN() :
    b = 1 # b désigne le nombre de boules bleues dans l'urne
    while random.random() < ..........
        b = b + 1
    N = ..........
    return N
```

- **2 pts : 1 pt par ligne à compléter**

```
import random as random

def simuleN() :
    b = 1 # b désigne le nombre de boules bleues dans l'urne
    while random.random() < b/(b+1)
        b = b + 1
    N = b + 1
    return N
```

Exercice 5

Déterminer les solutions des équations différentielles suivantes d'inconnues $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$:

1. (E_2) $y' - 5y = x^2$

- **1 pt : L'équation homogène associée est une équation différentielle linéaire d'ordre** 1 **à coefficients constants. L'ensemble de ses solutions est donc :** $\{x \mapsto \lambda\, \mathrm{e}^{5x} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$
- **1 pt : Soit** $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$**. On note** $g : x \mapsto a\, x^2 + b\, x + c$**.**
- **1 pt : la fonction** g **est de classe** $\mathcal{C}^1$ **sur** $\mathbb{R}$**.**
- **1 pt :** g **est solution de** $(E_2) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -5a & & & & & = & 1 \\ 2a & - & 5b & & & = & 0 \\ & & b & - & 5c & = & 0 \end{array}\right.$
- **1 pt : la fonction** $g : x \mapsto -\dfrac{1}{5}\left(x^2 + \dfrac{2}{5}\, x + \dfrac{2}{25}\right)$ **est une solution particulière de** (E_2)**.**
- **1 pt : l'ensemble des solutions de** (E_2) **est :** $\{x \mapsto \lambda\, \mathrm{e}^{5x} - \dfrac{1}{5}\left(x^2 + \dfrac{2}{5}\, x + \dfrac{2}{25}\right) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$

2. (E_6) $y' + y = t^k\, \mathrm{e}^{-t}$

- **1 pt : L'équation homogène associée est une équation différentielle linéaire d'ordre** 1 **à coefficients constants. L'ensemble de ses solutions est donc :** $\{t \mapsto \lambda\, \mathrm{e}^{-t} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$
- **1 pt : Soit** $\lambda \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$**. On note** $g : t \mapsto \lambda(t)\, \mathrm{e}^{-t}$**.**
- **1 pt : la fonction** g **est de classe** $\mathcal{C}^1$ **sur** $\mathbb{R}$**.**
- **1 pt :** g **est solution de** $(E_6) \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R},\ \lambda'(t) = t^k$
- **1 pt : la fonction** $g : x \mapsto \dfrac{1}{k+1}\, t^{k+1}\, \mathrm{e}^{-t}$ **est une solution particulière de** (E_6)**.**
- **1 pt : l'ensemble des solutions de** (E_6) **est :** $\{t \mapsto \lambda\, \mathrm{e}^{-t} + \dfrac{1}{k+1}\, t^{k+1}\, \mathrm{e}^{-t} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$

3. (E_1) $y'' - 3\sqrt{2}\, y' + 4\, y = 8$

- **1 pt : L'équation homogène associée est une équation différentielle linéaire d'ordre** 2 **à coefficients constants.**
- **1 pt : Les racines de son polynôme caractéristique sont** $x_1 = \sqrt{2}$ **et** $x_2 = 2\sqrt{2}$**.**
- **1 pt : l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée est donc :** $\{x \mapsto \lambda\, \mathrm{e}^{\sqrt{2}\, x} + \mu\, \mathrm{e}^{2\sqrt{2}\, x} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$
- **1 pt : Soit** $c \in \mathbb{R}$**. On note** $g : x \mapsto c$**. La fonction** g **est de classe** $\mathcal{C}^2$ **sur** $\mathbb{R}$**.**
- **1 pt :** g **est solution de** $(E_1) \Leftrightarrow c = 2$
- **1 pt : la fonction** $g : x \mapsto 2$ **est une solution particulière de** (E_1)**.**
- **1 pt : l'ensemble des solutions de** (E_6) **est :** $\{x \mapsto \lambda\, \mathrm{e}^{\sqrt{2}\, x} + \mu\, \mathrm{e}^{2\sqrt{2}\, x} + 2 \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$

4. (E_4) $2y'' - 3y' + y = x\, \mathrm{e}^{-x}$

- **1 pt : L'équation homogène associée est une équation différentielle linéaire d'ordre** 2 **à coefficients constants.**
- **1 pt : Les racines de son polynôme caractéristique sont** $x_1 = 1$ **et** $x_2 = \dfrac{1}{2}$**.**
- **1 pt : l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée est donc :** $\{x \mapsto \lambda\, \mathrm{e}^{x} + \mu\, \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\, x} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$
- **1 pt : Soit** $(a, b) \in \mathbb{R}^2$**. On note** $g : x \mapsto (ax + b)\, \mathrm{e}^{-x}$**. La fonction** g **est de classe** $\mathcal{C}^2$ **sur** $\mathbb{R}$**.**
- **1 pt :** g **est solution de** $(E_1) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ (6ax + 6b - 7a)\, \mathrm{e}^{-x} = x\, \mathrm{e}^{-x}$
- **1 pt :** $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^{-x} \neq 0$
- **1 pt : la fonction** $g : x \mapsto \left(\dfrac{1}{6}\ x + \dfrac{7}{36}\right) \mathrm{e}^{-x}$ **est une solution particulière de** (E_4)**.**
- **1 pt : l'ensemble des solutions de** (E_4) **est :** $\{x \mapsto \lambda\, \mathrm{e}^{x} + \mu\, \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\, x} + \dfrac{1}{6}\left(x + \dfrac{7}{6}\right) \mathrm{e}^{-x} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$

Exercice 6

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{2x} + 1}$.

1. a) Justifier que f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et étudier ses variations.

- **1 pt : La fonction** f **est de classe** $\mathcal{C}^1$ **sur** $\mathbb{R}$ **car est le quotient de :**
  - × **la fonction** $x \mapsto \mathrm{e}^{x}$**, de classe** $\mathcal{C}^1$ **sur** $\mathbb{R}$**,**
  - × **la fonction** $x \mapsto \mathrm{e}^{2x} + 1$**, de classe** $\mathcal{C}^1$ **sur** $\mathbb{R}$ **et qui ne s'annule pas sur** $\mathbb{R}$**.**
- **1 pt :** $f' : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{3x}}{(\mathrm{e}^{2x} + 1)^2}$
- **1 pt : par stricte croissance de la fonction exponentielle sur** $\mathbb{R}$ **:** $\forall x > 0,\ f'(x) < 0$**.**
- **1 pt : par parité de** f **:** $\forall x < 0,\ f'(x) > 0$**.**
- **1 pt : tableau de variations complet**

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de f	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0

b) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution $\ell \in \mathbb{R}^+$.

- **1 pt : si $x < 0$, l'équation n'admet pas de solution car $f(x) > 0$**
- **3 pts : si $x \geqslant 0$**
  - × **1 pt : hypothèse du théorème de la bijection pour $g : x \mapsto f(x) - x$**
  - × **1 pt : $g\big([0, +\infty[\big) =]-\infty, \frac{1}{2}]$**
  - × **1 pt : $0 \in]-\infty, \frac{1}{2}[$**

c) Justifier que : $0 \leqslant \ell \leqslant \dfrac{1}{2}$.
Données numériques : $e^{1/2} \simeq 1,65$ et $e \simeq 2,72$ au centième près.

- **1 pt : $g(0) = \dfrac{1}{2} \geqslant 0$**
- **1 pt : $g\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{2\,\mathbf{e}^{\frac{1}{2}} - \mathbf{e} - 1}{2\,(\mathbf{e} + 1)} \leqslant 0$**
- **1 pt : $g(0) \geqslant g(\ell) \geqslant g\left(\dfrac{1}{2}\right)$**
- **1 pt : par décroissance de $g^{-1} :]-\infty, \frac{1}{2}] \to \mathbb{R}_+$, on obtient : $0 \leqslant \ell \leqslant \dfrac{1}{2}$**

d) Montrer que : $\forall x \geqslant 0,\ |f'(x)| \leqslant f(x)$. En déduire que : $\forall x \geqslant 0,\ |f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}$.

- **1 pt : $|f'(x)| - f(x) = \dfrac{-2\,\mathbf{e}^{x}}{(\mathbf{e}^{2x} + 1)^2} \leqslant 0$**
- **1 pt : d'après le tableau de variations de *1.b)*, $|f'(x)| \leqslant f(x) \leqslant f(0) = \dfrac{1}{2}$**

e) Vérifier que $f\big([0, \frac{1}{2}]\big) \subset [0, \frac{1}{2}]$.

- **1 pt : f est continue et décroissante sur $[0, \frac{1}{2}]$ donc...**

2. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$u_0 = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$$

a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0, \frac{1}{2}]$.

- **1 pt : initialisation**
- **2 pts : hérédité**

b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|u_{n+1} - \ell| \leqslant \frac{1}{2}\,|u_n - \ell| \qquad \text{puis que} \qquad |u_n - \ell| \leqslant \frac{1}{2^{n+1}}$$

- **3 pts : IAF**
  - × **1 pt : hypothèses**
  - × **1 pt : $\forall (x, y) \in [0, \frac{1}{2}]^2,\ |f(y) - f(x)| \leqslant \frac{1}{2}\,|y - x|$**
  - × **1 pt : En appliquant cette inégalité à $y = u_n \in [0, \frac{1}{2}]$ et $x = \ell \in [0, \frac{1}{2}]$**
- **3 pts : récurrence**
  - × **1 pt : initialisation**
  - × **2 pts : hérédité**

c) En déduire que la suite (u_n) converge vers ℓ.

- **1 pt : théorème d'encadrement**

3. **Informatique**

a) Écrire une fonction **Python** `f` qui prend en entrée un réel `x` et qui calcule $f(\mathtt{x})$.

- **3 pts : 1 pt par ligne**

```python
import numpy as np

def f(x) :
    y = np.exp(x) / (np.exp(2*x) + 1)
    return y
```

b) En utilisant la fonction `f` précédente, écrire une fonction `SuiteU` qui prend en entrée un entier positif `n` et qui calcule $u_{\mathtt{n}}$.

- **4 pts :**
  - × **1 pt : structure de fonction**
  - × **1 pt : initialisation**
  - × **2 pts : boucle for**

```python
def SuiteU(n) :
    u = 0
    for i in range(n) :
        u = f(u)
    return u
```

c) En utilisant la fonction `SuiteU` précédente, comment peut-on obtenir à l'aide de **Python** une valeur approchée de ℓ à 10^{-4} près ?

- **1 pt : S'il existe** $n \in \mathbb{N}$ **tel que :** $\dfrac{1}{2^{n+1}} \leqslant 10^{-6}$**, on obtiendra par transitivité :** $|u_n - \ell| \leqslant 10^{-6}$
- **3 pts :** $\dfrac{1}{2^{n+1}} \leqslant 10^{-6} \Leftrightarrow n \geqslant \dfrac{6\ \ln(10)}{\ln(2)} - 1$
  - × **1 pt : stricte décroissance de la fonction inverse sur** $\mathbb{R}_+^*$
  - × **1 pt : stricte croissance de la fonction** $\ln$ **sur** $\mathbb{R}_+^*$
  - × **1 pt :** $\ln(2) > 0$
- **1 pt :** $N = \left\lceil \dfrac{6\ \ln(10)}{\ln(2)} - 1 \right\rceil$ **convient**
- **2 pts : code Python (1 pt par ligne)**

```python
N = int(np.ceil(6 * np.log(10) / np.log(2) - 1))
u = SuiteU(N)
```