Interrogation de rentrée

On traitera obligatoirement les exercices 1, 2 et 3, et on les traitera dans cet ordre. Les autres ne sont pas obligatoires et peuvent être traités dans n'importe quel ordre.

Exercice 1. *Rayer la ou les mentions inutiles (aucune justification n'est attendue)*

1.	Dans l'écriture $f : x \mapsto 1 + x$, la variable x est	: libre / liée
2.	Dans l'écriture $\big([X = i]\big)_{i\in[\![1,n]\!]}$, la variable i est	: libre / liée
	et la variable n est	: libre / liée
3.	Le résultat de la quantité $\sum\limits_{i=1}^{k} i$ dépend de	: i / k / ni i ni k
4.	Une variable muette est	: libre / liée
5.	Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite admettant une limite (finie ou non), la quantité $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	: dépend de n / ne dépend par de n / peut dépendre de n
6.	Dans l'écriture $\displaystyle\int_0^x f(t)\ dt$, la variable t est	: libre / liée
	la variable x est	: libre / liée
7.	Dans l'écriture $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0 \ \text{ et } \ y = 0\}$,	
	la variable x est	: libre / liée
	la variable y est	: libre / liée
	la variable z est	: libre / liée
8.	Dans l'écriture : $\forall x \in \mathbb{R}_+, \exists y \in \mathbb{R},\ x = y^2$,	
	la variable x est	: libre / liée
	la variable y est	: libre / liée
9.	Une variable libre	: doit toujours / ne doit jamais / doit parfois — être introduite par un « Soit »
10.	Une variable liée	: doit toujours / ne doit jamais / doit parfois — être introduite par un « Soit »

Exercice 2
Pour chacune des expressions suivantes :

(i) déterminer si elle désigne une proposition ou un objet. Si c'est un objet, précisez de quel type d'objet il s'agit (réel, fonction, suite, série, ensemble).

(ii) indiquer, pour chaque variable en présence, si elle est libre ou liée.

Aucune justification n'est attendue pour ces questions.

1. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n}\, dx$

2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^x}{1+t}\, dt$,

3. $f : t \mapsto \mathrm{e}^{-t}$,

4. $f(x)$,

5. $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0\}$,

6. $\displaystyle\sum_{i=j}^{n} (i+j)^3$,

7. $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} \sum_{i=j}^{n} (i+j)^3$,

8. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$,

9. $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} u_n$,

10. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \geqslant \ln(2)$

11. $\mathcal{P}(n)$,

12. $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)$.

Exercice 3

1. ***a)*** Résoudre le système suivant : $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & + & z & = & 0 \\ 2x & + & 4y & + & 2z & = & 0 \\ -x & - & 2y & - & z & = & 0 \end{array}\right.$.

b) On note : $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$. Déterminer $E_{-1}(A) = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = -X\}$.

2. ***a)*** Résoudre le système suivant : $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & 2z & = & 0 \\ 2x & - & y & + & 3z & = & 0 \\ 5x & - & 3y & + & 8z & = & 0 \end{array}\right.$.

b) On note : $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & -3 & 10 \end{pmatrix}$. Déterminer $E_2(A) = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = 2\cdot X\}$.

3. ***a)*** Résoudre le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x & - & 2y & + & z & = & 0 \\ -x & - & y & + & z & = & 0 \\ x & + & 2y & - & 3z & = & 0 \end{array}\right.$$

Exercice 4
Toutes les variables aléatoires sont supposées définies sur un même espace probabilisé noté $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

On considère une urne contenant initialement une boule bleue et une boule rouge. On procède à des tirages successifs d'une boule au hasard selon le protocole suivant :

× si on obtient une boule bleue, on la remet dans l'urne et on ajoute une boule bleue supplémentaire ;

× si on obtient une boule rouge, on la remet dans l'urne et on arrête l'expérience.

On suppose que toutes les boules sont indiscernables au toucher et on admet que l'expérience s'arrête avec une probabilité égale à 1. On note N la variable aléatoire égale au nombre de boules présentes dans l'urne à la fin de l'expérience.

1. ***a)*** Montrer soigneusement : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \mathbb{P}\big([N = n]\big) = \dfrac{1}{n\,(n-1)}$.

b) La variable aléatoire N admet-elle une espérance ?

2. Recopier et compléter les lignes incomplètes de la fonction **Python** suivante de façon à ce qu'elle renvoie une simulation de la variable aléatoire N.

```
import random as random

def simuleN() :
    b = 1 # b désigne le nombre de boules bleues dans l'urne
    while random.random() < ...........
        b = b + 1
    N = ...........
    return N
```

Exercice 5

Déterminer les solutions des équations différentielles suivantes d'inconnues $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$:

1. (E_2) $y' - 5y = x^2$

2. (E_6) $y' + y = t^k \, \mathrm{e}^{-t}$

3. (E_1) $y'' - 3\sqrt{2}\, y' + 4\, y = 8$

4. (E_4) $2y'' - 3y' + y = x\, \mathrm{e}^{-x}$

Exercice 6

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x} + 1}$.

1. ***a)*** Justifier que f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et étudier ses variations.

b) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution $\ell \in \mathbb{R}^+$.

c) Justifier que : $0 \leqslant \ell \leqslant \dfrac{1}{2}$.

Données numériques : $\mathrm{e}^{1/2} \simeq 1,65$ et $\mathrm{e} \simeq 2,72$ au centième près.

d) Montrer que : $\forall x \geqslant 0, \ |f'(x)| \leqslant f(x)$. En déduire que : $\forall x \geqslant 0, \ |f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}$.

e) Vérifier que $f\big([0, \frac{1}{2}]\big) \subset \big[0, \frac{1}{2}\big]$.

2. On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$u_0 = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+1} = f(u_n)$$

a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \big[0, \frac{1}{2}\big]$.

b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|u_{n+1} - \ell| \leqslant \frac{1}{2}\, |u_n - \ell| \qquad \text{puis que} \qquad |u_n - \ell| \leqslant \frac{1}{2^{n+1}}$$

c) En déduire que la suite (u_n) converge vers ℓ.

3. **Informatique**

a) Écrire une fonction **Python** `f` qui prend en entrée un réel `x` et qui calcule $f($`x`$)$.

b) En utilisant la fonction `f` précédente, écrire une fonction `SuiteU` qui prend en entrée un entier positif `n` et qui calcule $u_{\mathtt{n}}$.

c) En utilisant la fonction `SuiteU` précédente, comment peut-on obtenir à l'aide de **Python** une valeur approchée de ℓ à 10^{-4} près ?