

DS7 (version B)

Exercice (HEC 2002)

Le but de cet exercice est la résolution de l'équation matricielle $AM = MB$, d'inconnue M , dans l'espace vectoriel E des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels.

On rappelle que si U_1, U_2, U_3, U_4 sont les matrices définies par :

$$U_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad U_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad U_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad U_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

la famille (U_1, U_2, U_3, U_4) est une base de E , qui est donc de dimension 4.

Si A et B sont deux matrices de E , l'ensemble des matrices M de E vérifiant $AM = MB$ est noté $V_{A,B}$.

1. Soient A et B deux matrices de E et $\varphi_{A,B}$ l'application qui, à toute matrice M de E , associe la matrice $AM - MB$.

a) Montrer que $\varphi_{A,B}$ est un endomorphisme de E et en déduire que $V_{A,B}$ est un sous-espace vectoriel de E .

Démonstration.

• Démontrons que f est linéaire

Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et soit $(M_1, M_2) \in E^2$.

$$\begin{aligned} \varphi_{A,B}(\lambda \cdot M + \mu \cdot N) &= A(\lambda \cdot M + \mu \cdot N) - (\lambda \cdot M + \mu \cdot N)B \\ &= \lambda \cdot AM + \mu \cdot AN - \lambda \cdot MB - \mu \cdot NB \\ &= \lambda \cdot (AM - MB) + \mu \cdot (AN - NB) \\ &= \lambda \cdot \varphi_{A,B}(M) + \mu \cdot \varphi_{A,B}(N) \end{aligned}$$

Ainsi, φ est bien une application linéaire.

• Démontrons que f est à valeurs dans $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Soit $M \in E$. Comme A et B sont des éléments de E , alors $AM \in E$ et $MB \in E$.

Ainsi : $\varphi_{A,B}(M) \in E$.

L'application $\varphi_{A,B}$ est bien à valeurs dans E .

On en conclut que $\varphi_{A,B}$ est un endomorphisme de E .

• Par ailleurs :

$$\begin{aligned} V_{A,B} &= \{M \in E \mid AM - MB = 0\} \\ &= \{M \in E \mid \varphi_{A,B}(M) = 0\} \\ &= \ker(\varphi_{A,B}) \end{aligned}$$

Ainsi, $V_{A,B}$ est un espace vectoriel car c'est le noyau d'un endomorphisme. □

b) Dans le cas particulier où $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, construire la matrice carrée d'ordre 4 qui représente $\varphi_{A,B}$ dans la base (U_1, U_2, U_3, U_4) .

Montrer que cette matrice est inversible et en déduire l'ensemble $V_{A,B}$.

Démonstration.

$$\begin{aligned} \bullet \quad \varphi_{A,B}(U_1) &= AU_1 - U_1B \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot U_1 + 0 \cdot U_2 - 1 \cdot U_3 + 0 \cdot U_4 \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi : } \text{Mat}_{(U_1, U_2, U_3, U_4)}(\varphi_{A,B}(U_1)) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad \varphi_{A,B}(U_2) &= AU_2 - U_2B \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -2 \cdot U_1 + 0 \cdot U_2 + 0 \cdot U_3 - 1 \cdot U_4 \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \text{Mat}_{(U_1, U_2, U_3, U_4)}(\varphi_{A,B}(U_2)) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad \varphi_{A,B}(U_3) &= AU_3 - U_3B \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = -1 \cdot U_1 + 0 \cdot U_2 + 2 \cdot U_3 + 0 \cdot U_4 \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi : } \text{Mat}_{(U_1, U_2, U_3, U_4)}(\varphi_{A,B}(U_3)) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned}
 \bullet \quad \varphi_{A,B}(U_4) &= AU_4 - U_4B \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot U_1 - 1 \cdot U_2 - 2 \cdot U_3 + 0 \cdot U_4
 \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi : } \text{Mat}_{(U_1, U_2, U_3, U_4)}(\varphi_{A,B}(U_4)) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{On en déduit : } \text{Mat}_{(U_1, U_2, U_3, U_4)}(\varphi_{A,B}) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Notons C cette matrice.

$$\text{rg}(C) = \text{rg} \left(\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$\stackrel{L_3 \leftarrow 2L_3 + L_1}{=} \text{rg} \left(\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$\stackrel{L_2 \leftrightarrow L_4}{=} \text{rg} \left(\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\stackrel{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2}{=} \text{rg} \left(\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right)$$

La réduite obtenue est triangulaire (supérieure) et ses coefficients diagonaux sont tous non nuls. Elle est donc inversible.

On en déduit que la matrice C est inversible.

- La matrice C étant la représentation matricielle de $\varphi_{A,B}$ dans la base (U_1, U_2, U_3, U_4) , on en conclut que $\varphi_{A,B}$ est bijective. En particulier $\varphi_{A,B}$ est injective. Ainsi :

$$V_{A,B} = \ker(\varphi_{A,B}) = \{0_E\}$$

$$V_{A,B} = \{0_E\}$$

□

3. Soit a, b, c, d des réels non nuls vérifiant $a - b \neq c - d$, $a - b \neq 1$, $c - d \neq 1$, A et B les matrices définies par :

$$A = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ b & 1-b \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} c & 1-c \\ d & 1-d \end{pmatrix}$$

a) Montrer que les valeurs propres de A sont 1 et $a-b$. En déduire qu'il existe une matrice inversible P de E , et une matrice D égale à celle de la question ?? pour une valeur convenable de r , telles que l'on ait : $D = P^{-1}AP$.

Démonstration.

- Tout d'abord : $A - I_2 = \begin{pmatrix} a-1 & 1-a \\ b & -b \end{pmatrix}$.

La matrice $A - I_2$ est non inversible car possède deux colonnes colinéaires ($C_2 = -C_1$).

La matrice $A - I_2$ n'est pas inversible.
On en déduit que 1 est valeur propre de A .

- Par ailleurs : $A - (a-b)I_2 = \begin{pmatrix} a-(a-b) & 1-a \\ b & 1-b-(a-b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & 1-a \\ b & 1-a \end{pmatrix}$.

La matrice $A - (a-b)I_2$ est non inversible car possède deux colonnes colinéaires (en effet, on a : $(1-a)C_1 = bC_2$).

La matrice $A - (a-b)I_2$ n'est pas inversible.
On en déduit que $a-b$ est valeur propre de A .

- Ces deux valeurs propres sont distinctes car $a-b \neq 1$.

La matrice A est (carrée) d'ordre 2 et possède deux valeurs propres distinctes.

Elle est donc diagonalisable.

On en déduit qu'il existe P inversible telle que : $A = PDP^{-1}$ où $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a-b \end{pmatrix}$.

Commentaire

- L'énoncé fournit directement les valeurs propres de la matrice A . Il suffit donc de **vérifier** que $a-b$ et 1 sont bien valeurs propres de 1. Pour ce faire, on utilise ici des considérations de colinéarité. Il est aussi possible de faire un calcul de déterminant (il est nul si les deux colonnes de la matrice sont colinéaires) ou de rang (qui est une mesure du degré d'indépendance linéaire des colonnes de la matrice).

- L'énoncé ne demande pas de déterminer la matrice P mais simplement de démontrer son existence. Rappelons que la matrice P est constituée d'une base de vecteurs propres, ces vecteurs apparaissant dans l'ordre d'apparition des valeurs propres dans A .

- Il est assez simple ici d'obtenir des vecteurs propres associés à chaque valeur propre.

Rappelons : $A - I_2 = \begin{pmatrix} a-1 & 1-a \\ b & -b \end{pmatrix}$. Or : $\begin{pmatrix} a-1 & 1-a \\ b & -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(on détermine ce vecteur en remarquant que les colonnes de $A - I_2$ sont opposées)

Ainsi $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre 1.

D'autre part : $A - (a-b)I_2 = \begin{pmatrix} b & 1-a \\ b & 1-a \end{pmatrix}$. Or : $\begin{pmatrix} b & 1-a \\ b & 1-a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a-1 \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(on détermine ce vecteur en remarquant que les colonnes de $A - (a-b)I_2$ sont colinéaires)

Ainsi $\begin{pmatrix} a-1 \\ b \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre $a-b$.

Ainsi, $P = \begin{pmatrix} 1 & a-1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$ et enfin : $P^{-1} = \frac{1}{b-(a-1)} \begin{pmatrix} b & 1-a \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

□

- b) Justifier de même l'existence d'une matrice inversible Q de E , et d'une matrice Δ égale à celle de la question ?? pour une valeur convenable de s , telles que l'on ait : $\Delta = Q^{-1}BQ$.

Démonstration.

- À renommage des variables près, cette question est la même que la précédente.
On en déduit que 1 et $c - d$ sont valeurs propres de B .
- Ces deux valeurs propres sont distinctes car $c - d \neq 1$.
La matrice B est (carrée) d'ordre 2 et possède deux valeurs propres distinctes.
Elle est donc diagonalisable.

On en déduit qu'il existe Q inversible telle que : $B = Q\Delta Q^{-1}$ où $\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c-d \end{pmatrix}$.

Commentaire

Comme dans la question précédente, l'énoncé ne demande pas de déterminer la matrice Q mais simplement de démontrer son existence. Cette question étant la même que la précédente (à renommage près des variables), la matrice Q suivante convient :

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & c-1 \\ 1 & d \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Q^{-1} = \frac{1}{d-(c-1)} \begin{pmatrix} d & 1-c \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

□

- c) Pour toute matrice M de E , montrer qu'elle appartient à $V_{A,B}$ si et seulement si la matrice $P^{-1}MQ$ appartient à $V_{D,\Delta}$. En déduire une base de $V_{A,B}$.

Démonstration.

Soit $M \in E$.

$$\begin{aligned} M \in V_{A,B} &\Leftrightarrow AM - MB = 0_E \\ &\Leftrightarrow AM = MB \\ &\Leftrightarrow PDP^{-1}M = MQ\Delta Q^{-1} && \text{(d'après les} \\ &&& \text{questions précédentes)} \\ &\Leftrightarrow P^{-1}(PDP^{-1}M)Q = P^{-1}(MQ\Delta Q^{-1})Q \\ &\Leftrightarrow DP^{-1}MQ = P^{-1}MQ\Delta \\ &\Leftrightarrow D(P^{-1}MQ) - (P^{-1}MQ)\Delta = 0_E \\ &\Leftrightarrow P^{-1}MQ \in V_{D,\Delta} \\ &\Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R}, P^{-1}MQ = \alpha \cdot U_1 && \text{(car } V_{D,\Delta} = \text{Vect}(U_1)) \\ &\Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R}, M = \alpha \cdot PU_1Q^{-1} \\ &\Leftrightarrow M \in \text{Vect}(PU_1Q^{-1}) \end{aligned}$$

On en déduit : $V_{A,B} = \text{Vect}(PU_1Q^{-1})$.

La famille (PU_1Q^{-1}) est :

- × libre car constituée uniquement d'un vecteur non nul.
En effet : $U_1 \neq 0_E$ et il en est de même de PU_1Q^{-1} car P et Q^{-1} sont inversibles.
- × génératrice de $V_{D,\Delta}$.

Ainsi, (PU_1Q^{-1}) est une base de $V_{A,B}$.

□

- En raisonnant comme dans la question 3., on obtient :

$$\begin{aligned} M \in V_{A,B} &\Leftrightarrow P^{-1}MQ \in V_{D,\Delta} \\ &\Leftrightarrow P^{-1}MQ = 0_E && \text{(car } V_{D,\Delta} = \{0_E\} \text{ en appliquant le} \\ &&& \text{résultat de la question 3.)} \\ &\Leftrightarrow M = 0 \end{aligned}$$

Ainsi, sous les hypothèses de l'énoncé, $V_{A,B} = \{0_E\}$.

□

Commentaire

- On a étudié dans cet exercice les solutions de l'équation matricielle $AM = MB$. La dimension de l'espace vectoriel des solutions peut être déterminée de manière exacte. Ce résultat est connu sous le nom de théorème de Cecioni-Frobenius (pour des matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$).
- Lorsque $A = B$, l'exercice consiste à chercher l'ensemble des matrices telles que : $AM = MA$, autrement dit l'ensemble des matrices qui commutent avec A . Cet ensemble est appelé le commutant de la matrice A .
- L'étude du commutant peut donner lieu à des sujets de concours. Dans ce cas, il faut s'attendre à des questions proches de celles développées dans cet exercice :
 - × l'étude est réalisée pour des matrices carrées d'ordre 2 ou 3,
 - × on commence par remarquer que le commutant de A est un espace vectoriel en tant que noyau de l'endomorphisme $\varphi : M \mapsto AM - MA$,
 - × on étudie (éventuellement) le cas particulier des matrices diagonalisables,
 - × on étudie (éventuellement) le cas particulier des matrices nilpotentes,
 - × ...
- De manière plus générale, il est fréquent de tomber sur l'étude d'endomorphisme définie sur un espace de matrices. C'était par exemple le cas de l'épreuve (EML 2014) où l'on étudie l'endomorphisme $\varphi : M \mapsto TMT$.

Problème (ESSEC II 2015)

L'étude des propriétés asymptotiques des lois de probabilités est importante pour modéliser la façon dont une expérience aléatoire a une tendance plus ou moins forte à donner des résultats numériquement grands. On commence par introduire l'outil d'analyse asymptotique suivant.

Soit f une fonction continue sur \mathbb{R}_+ à valeurs dans \mathbb{R}_+ . Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on pose pour tout $h \in \mathbb{R}_+$:

$$\varphi_x(h) = \min_{u \in [x, x+h]} (f(u))$$

On admet que $\varphi_x(h)$ admet une limite positive ou nulle quand h tend vers $+\infty$, notée Φ_x .

On admet qu'alors la fonction $x \mapsto \Phi_x$ admet une limite (qui peut être $+\infty$).

Cette limite est dite **limite inférieure de la fonction** f et est notée $\liminf_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

On admet de plus les deux résultats suivants.

(1) Soit f une fonction continue sur \mathbb{R}_+ à valeurs dans \mathbb{R}_+ . On suppose : $\liminf_{x \rightarrow +\infty} f(x) > 0$.

Alors il existe deux réels x_0 et ε strictement positifs tels que pour tout x supérieur ou égal à x_0 , on a : $f(x) \geq \varepsilon$.

(2) Soient f et g deux fonctions continues de \mathbb{R}_+ dans \mathbb{R}_+ telles que $f(x) \geq g(x)$ pour tout x positif, et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \ell$ où ℓ est un réel positif.

Alors : $\liminf_{x \rightarrow +\infty} f(x) \geq \ell$.

Commentaire

L'étude de cette nouvelle notion de \liminf était l'objet de la première partie de ce sujet d'ESSEC II. On a uniquement rappelé ici les résultats nécessaires dans les deux parties suivantes.

I - Lois sous-exponentielles

Dans ce problème, toutes les variables aléatoires sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On notera comme d'habitude, sous réserve d'existence, $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$ l'espérance et la variance d'une variable aléatoire réelle X .

Si X est une variable aléatoire réelle positive de fonction de répartition F , on notera systématiquement \bar{F} la queue de la répartition définie par : $\forall x \in \mathbb{R}_+, \bar{F}(x) = 1 - F(x) = \mathbb{P}([X > x])$.

Commentaire

- On prêtera une grande attention aux notations :

$$\bar{F}(x) \neq \overline{\mathbb{P}([X \leq x])}$$

Cette dernière notation n'a en effet aucun sens.

- La notation \bar{A} est licite seulement si A est un événement. Dans ce cas, \bar{A} désigne l'événement contraire de A .
- Ici, l'énoncé emploie la notation \bar{F} , où F est une fonction de répartition, pour désigner la fonction de survie de X :

$$\bar{F}(x) = \mathbb{P}(\overline{[X \leq x]}) = \mathbb{P}([X > x]) = 1 - F(x)$$

Cette notation peut donc prêter à confusion. On prendra garde à les éviter.

1. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans \mathbb{N} . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$\begin{cases} p_X(n) = \mathbb{P}([X = n]) \\ p_Y(n) = \mathbb{P}([Y = n]) \\ p_{X+Y}(n) = \mathbb{P}([X + Y = n]) \end{cases}$$

Montrer, pour tout n entier naturel :

$$p_{X+Y}(n) = \sum_{k=0}^n p_X(k) p_Y(n - k)$$

Démonstration.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

- La famille $([X = k])_{k \in \mathbb{N}}$ forme un système complet d'événements.
 Ainsi, par formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}([X + Y = n]) \\ = & \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X = k] \cap [X + Y = n]) \\ = & \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X = k] \cap [Y = n - k]) \\ = & \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X = k]) \mathbb{P}([Y = n - k]) && \text{(par indépendance de } X \text{ et } Y) \\ = & \sum_{\substack{k=0 \\ n-k \in Y(\Omega)}}^{+\infty} \mathbb{P}([X = k]) \mathbb{P}([Y = n - k]) \\ + & \sum_{\substack{k=0 \\ n-k \notin Y(\Omega)}}^{+\infty} \mathbb{P}([X = k]) \mathbb{P}([Y = n - k]) && \text{(car } [Y = n - k] = \emptyset \\ & \text{si } n - k \notin Y(\Omega)) \\ = & \sum_{k=0}^n \mathbb{P}([X = k]) \mathbb{P}([Y = n - k]) \end{aligned}$$

- La dernière ligne est obtenue en constatant :

$$\begin{cases} n - k \in Y(\Omega) = \mathbb{N} \\ k \in \llbracket 0, +\infty \llbracket \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq n - k \\ 0 \leq k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \leq n \\ 0 \leq k \end{cases} \Leftrightarrow \{ 0 \leq k \leq n \}$$

Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}, p_{X+Y}(n) = \sum_{k=0}^n p_X(k) p_Y(n - k)$.

□

Par analogie, on **admettra** que si X et Y sont deux variables aléatoires réelles positives indépendantes, admettant respectivement les densités f_X et f_Y continues sur \mathbb{R}_+ et continues à droite en 0, la variable $X + Y$ admet une densité notée $f_X \star f_Y$ définie, pour x positif, par :

$$(f_X \star f_Y)(x) = \int_0^x f_X(u) f_Y(x - u) du$$

On notera F_{X+Y} la fonction de répartition de la variable aléatoire $X + Y$.

Commentaire

- La fonction $f_X \star f_Y$ est appelée *produit de convolution* de f_X et f_Y . Il est traditionnellement défini de la manière suivante.

Soient X et Y deux v.a.r. à densité indépendantes, définies sur le même espace probabilisé, de densités respectives f_X et f_Y telles que f_X et f_Y soient bornées.

Alors la v.a.r. $X + Y$ est une v.a.r. à densité et une densité de $X + Y$ est donnée par la fonction h définie sur \mathbb{R} par :

$$f_X \star f_Y : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(u) f_Y(x - u) du$$

- L'énoncé nous fournit donne ici le produit de convolution de f_X et f_Y dans le cas où X et Y sont de plus des v.a.r. à valeurs positives. Cela a pour :
 - × avantage de simplifier le calcul de cette intégrale, puisque l'étape de réduction de l'intervalle d'intégration est déjà effectué,
 - × inconvénient de ne fournir, a priori, une expression d'une densité de $X + Y$ seulement sur \mathbb{R}_+ .
(notons bien que nous avons une expression de f_{X+Y} sur $] - \infty, 0[$ car, comme $X(\Omega) \subset \mathbb{R}_+$ et $Y(\Omega) \subset \mathbb{R}_+$, alors $(X + Y)(\Omega) \subset \mathbb{R}_+$ et ainsi : $\forall x \in] - \infty, 0[, f_{X+Y}(x) = 0$)
- Il est fréquent que les sujets TOP3 introduisent de nouvelles notations ou nouveaux objets. On ne se laissera pas pour autant décontenancer ! Une partie de la difficulté de l'épreuve consiste alors à manipuler ces notations, avec les ambiguïtés qu'elles peuvent éventuellement comporter.

2. Soit λ un réel strictement positif et soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de paramètre λ . On note f une densité commune et F leur fonction de répartition. On prendra pour tout x positif ou nul : $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$.

a) Expliciter, pour x positif, $F(x)$ et $\bar{F}(x)$.

Démonstration.

- Comme $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$:

$$F : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

- Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$\bar{F}(x) = 1 - F(x) = \lambda - (\lambda - e^{-\lambda x})$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \bar{F}(x) = e^{-\lambda x}$$

Commentaire

Une bonne connaissance du cours est une condition *sine qua non* de réussite au concours. En effet, on trouve dans toutes les épreuves de mathématiques (même pour les écoles les plus prestigieuses), des questions d'application directe du cours. C'est le cas en particulier de cette question qui nécessite simplement de connaître la loi exponentielle. □

b) Calculer $(f \star f)(x)$ pour tout x positif.

Démonstration.

- Les v.a.r. X et Y sont deux v.a.r. :
 - × indépendantes,
 - × positives, car elles suivent toutes les deux la loi $\mathcal{E}(\lambda)$,
 - × de densité commune f où :

$$f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

La fonction f est donc :

- continue sur \mathbb{R}_+ ,
- continue à droite en 0.

D'après l'énoncé, la v.a.r. $X + Y$ admet alors f_{X+Y} pour densité, où, pour tout $x \in [0, +\infty[$:

$$f_{X+Y}(x) = (f \star f)(x) = \int_0^x f(u) f(x-u) du$$

- Soit $x \in [0, +\infty[$. On obtient alors :

$$(f \star f)(x) = \int_0^x f(u) f(x-u) du = \int_0^x \lambda e^{-\lambda u} \lambda e^{-\lambda(x-u)} du$$

En effet, comme $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$, pour tout $u \in [0, x]$:

- × $u \in [0, +\infty[$, donc : $f(u) = \lambda e^{-\lambda u}$.
- × $(x-u) \in [0, +\infty[$, donc : $f(x-u) = \lambda e^{-\lambda(x-u)}$.

On en déduit :

$$\begin{aligned} (f \star f)(x) &= \lambda^2 \int_0^x e^{-\lambda(\cancel{u}+(x-\cancel{u}))} du \\ &= \lambda^2 e^{-\lambda x} \int_0^x 1 du \\ &= \lambda^2 e^{-\lambda x} [u]_0^x \\ &= \lambda^2 e^{-\lambda x} (x - 0) \end{aligned}$$

Finalement : $\forall x \in [0, +\infty[, (f \star f)(x) = \lambda^2 x e^{-\lambda x}$.

□

c) En déduire $F_{X+Y}(x)$ pour tout x positif.

Démonstration.

- Tout d'abord, comme $X(\Omega) \subset [0, +\infty[$ et $Y(\Omega) \subset [0, +\infty[$, on en déduit :
 - $(X + Y)(\Omega) \subset [0, +\infty[$.
 - Ainsi : $\forall x \in]-\infty, 0[, f_{X+Y}(x) = 0$.

- Soit $x \in [0, +\infty[$.

$$\begin{aligned}
 F_{X+Y}(x) &= \int_{-\infty}^x f_{X+Y}(t) dt \\
 &= \int_0^x f_{X+Y}(t) dt && \text{(car } f_{X+Y} \text{ est nulle en dehors de } [0, +\infty[) \\
 &= \int_0^x (f \star f)(t) dt && \text{(d'après la question précédente)} \\
 &= \int_0^x \lambda^2 t e^{-\lambda t} dt && \text{(toujours d'après la question précédente)}
 \end{aligned}$$

- On procède par intégration par parties (IPP).

$$\left| \begin{array}{ll} u(t) = t & u'(t) = 1 \\ v'(t) = e^{-\lambda t} & v(t) = -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t} \end{array} \right.$$

Cette IPP est valide car les fonctions u et v sont de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, x]$.

On obtient alors :

$$\begin{aligned}
 F_{Y+Y}(x) &= \lambda^2 \left(\left[t \times \left(-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t} \right) \right]_0^x - \int_0^x 1 \times \left(-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t} \right) dt \right) \\
 &= \lambda^2 \left(-\frac{1}{\lambda} x e^{-\lambda x} - 0 + \frac{1}{\lambda} \int_0^x e^{-\lambda t} dt \right) \\
 &= -\lambda x e^{-\lambda x} + \lambda \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t} \right]_0^x \\
 &= -\lambda x e^{-\lambda x} + \lambda \left(-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} + \frac{1}{\lambda} \right) \\
 &= -\lambda x e^{-\lambda x} - e^{-\lambda x} + 1
 \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in [0, +\infty[, F_{X+Y}(x) = 1 - (1 + \lambda x) e^{-\lambda x}}$$

□

- d)** Montrer :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\overline{F_{X+Y}}(x)}{\overline{F}(x)} = +\infty$$

Démonstration.

Soit $x \in [0, +\infty[$

- D'après **2.a)** : $\overline{F}(x) = e^{-\lambda x} \neq 0$.

- Ainsi :

$$\frac{\overline{F_{X+Y}}(x)}{\overline{F}(x)} = \frac{1 - F_{X+Y}(x)}{e^{-\lambda x}} = \frac{\cancel{1} - (\cancel{1} - (1 + \lambda x) e^{-\lambda x})}{e^{-\lambda x}} = \frac{(1 + \lambda x) \cancel{e^{-\lambda x}}}{\cancel{e^{-\lambda x}}} = 1 + \lambda x$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\overline{F_{X+Y}}(x)}{\overline{F}(x)} = +\infty.}$$

□

3. Soit X une variable aléatoire positive de fonction de répartition F . On dit que la loi de X est à **support illimité à droite** si pour tout x positif : $\overline{F}(x) > 0$.

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes positives, de même loi à support illimité à droite, de fonction de répartition commune F .

a) Montrer, pour tout x positif :

$$\overline{F_{X+Y}}(x) \geq \mathbb{P}([\max(X, Y) > x])$$

Démonstration.

Soit $x \in [0, +\infty[$.

- Tout d'abord : $\overline{F_{X+Y}}(x) = \mathbb{P}([X + Y > x])$.
- Or, comme X et Y sont à valeurs positives :

$$[\max(X, Y) > x] \subset [X + Y > x]$$

Par croissance de \mathbb{P} :

$$\mathbb{P}([\max(X, Y) > x]) \leq \mathbb{P}([X + Y > x])$$

Ainsi : $\forall x \in \mathbb{R}_+, \overline{F_{X+Y}}(x) \geq \mathbb{P}([\max(X, Y) > x])$.

□

Commentaire

- On affirme ici l'inclusion entre événements :

$$[\max(X, Y) > x] \subset [X + Y > x]$$

Il ne semble pas dans l'esprit de ce sujet TOP3 de la justifier. Explicitons la tout de même dans cette remarque pour insister sur les objets mathématiques mis en jeu.

- Soit $\omega \in [\max(X, Y) > x]$. Alors : $\max(X(\omega), Y(\omega)) > x$.

Deux cas se présentent alors :

- × si $X(\omega) \geq Y(\omega)$, alors : $\max(X(\omega), Y(\omega)) = X(\omega)$.

Comme Y est à valeurs positives :

$$Y(\omega) \geq 0$$

donc $X(\omega) + Y(\omega) \geq X(\omega)$

d'où $X(\omega) + Y(\omega) \geq \max(X(\omega), Y(\omega))$

Par transitivité :

$$X(\omega) + Y(\omega) \geq \max(X(\omega), Y(\omega)) > x$$

- × si $X(\omega) < Y(\omega)$, alors : $\max(X(\omega), Y(\omega)) = Y(\omega)$.

Comme X est à valeurs positives :

$$X(\omega) \geq 0$$

donc $X(\omega) + Y(\omega) \geq Y(\omega)$

d'où $X(\omega) + Y(\omega) \geq \max(X(\omega), Y(\omega))$

Par transitivité :

$$X(\omega) + Y(\omega) \geq \max(X(\omega), Y(\omega)) > x$$

Dans tous les cas, on obtient : $X(\omega) + Y(\omega) > x$. Ainsi : $\omega \in [X + Y > x]$.

Commentaire

- On trouvera dans certains corrigés une disjonction de cas du type :

$$\begin{aligned} \times \text{ Si } X \geq Y : \text{ alors } \max(X, Y) = X \text{ et } \min(X, Y) = Y \dots \\ \times \text{ Si } X < Y : \text{ alors } \max(X, Y) = Y \text{ et } \min(X, Y) = X \dots \end{aligned}$$

Cette disjonction de cas n'a pas de sens.

Pour comprendre pourquoi ce n'est pas le cas, il faut avoir bien saisi la différence entre la relation d'ordre opérant sur les réels et celle opérant sur les applications.

- × Lorsque a et b sont des réels, on a :

$$a \leq b \quad \text{OU} \quad a > b$$

On dit que la relation d'ordre \leq définie sur les réels est une relation d'ordre **totale** : on peut toujours comparer deux réels.

- × La relation d'ordre sur les v.a.r. est elle aussi notée \leq et est définie par :

$$X \leq Y \Leftrightarrow \forall \omega \in \Omega, X(\omega) \leq Y(\omega)$$

Cette relation d'ordre n'est pas **totale**. Autrement dit, il existe des v.a.r. X et Y qui ne sont pas comparables par la relation \leq . Plus précisément, dès qu'il existe deux tirages $\omega_1 \in \Omega$ et $\omega_2 \in \Omega$ tels que :

$$X(\omega_1) \leq Y(\omega_1) \quad \text{et} \quad X(\omega_2) > Y(\omega_2)$$

alors aucune des relations : $X \leq Y$ et $X > Y$ n'est vérifiée puisque chacune de ces deux inégalités définit une propriété qui doit être vérifiée **pour tout** ω .

La relation d'ordre définie sur les v.a.r. est dite **partielle** (on ne peut pas comparer toutes les v.a.r.). La disjonction de cas présentée plus haut fait l'hypothèse forte que l'on peut comparer les v.a.r. X et Y . Cette hypothèse n'est pas raisonnable et une telle disjonction n'a donc pas lieu d'être.

- C'est aussi l'occasion de revenir sur la définition de la v.a.r. $\max(X, Y)$. On rappelle :

$$\max(X, Y) : \omega \mapsto \begin{cases} X(\omega) & \text{si } X(\omega) \geq Y(\omega) \\ Y(\omega) & \text{si } X(\omega) < Y(\omega) \end{cases}$$

Remarquons de nouveau que ce sont bien les deux **réels** $X(\omega)$ et $Y(\omega)$ que l'on compare (et non les v.a.r. X et Y).

- On pouvait également démontrer l'inclusion $[\max(X, Y) > x] \subset [X + Y > x]$ à l'aide de l'égalité entre v.a.r. :

$$X + Y = \max(X, Y) + \min(X, Y)$$

En effet :

- × comme $X(\Omega) \subset [0, +\infty[$ et $Y(\Omega) \subset [0, +\infty[$, alors : $(\min(X, Y))(\Omega) \subset [0, +\infty[$.
- × On en déduit l'inégalité entre v.a.r. :

$$X + Y \geq \max(X, Y)$$

Ainsi, on retrouve bien : $[\max(X, Y) > x] \subset [X + Y > x]$.

b) Montrer : $\mathbb{P}([\max(X, Y) > x]) = 1 - (F(x))^2$.

Démonstration.

Soit $x \in [0, +\infty[$.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([\max(X, Y) > x]) &= 1 - \mathbb{P}([\max(X, Y) \leq x]) \\ &= 1 - \mathbb{P}([X \leq x] \cap [Y \leq x]) \\ &= 1 - \mathbb{P}([X \leq x]) \times \mathbb{P}([Y \leq x]) \quad (\text{car } X \text{ et } Y \text{ sont} \\ &\hspace{15em} \text{indépendantes}) \\ &= 1 - F(x) \times F(x) \end{aligned}$$

$\forall x \in [0, +\infty[, \mathbb{P}([\max(X, Y) > x]) = 1 - (F(x))^2$

□

c) Montrer : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - (F(x))^2}{\overline{F}(x)} = 2$.

Démonstration.

- Soit $x \in [0, +\infty[$.
 - × On a bien : $\overline{F}(x) \neq 0$ car X est à support illimité à droite.
 - × De plus :

$$\frac{1 - (F(x))^2}{\overline{F}(x)} = \frac{\cancel{(1 - F(x))} (1 + F(x))}{\cancel{1 - F(x)}} = 1 + F(x)$$

- Or F est une fonction de répartition. D'où : $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$.

Finalement : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - (F(x))^2}{\overline{F}(x)} = 2$.

□

d) En déduire : $\liminf_{x \rightarrow +\infty} \frac{\overline{F_{X+Y}}(x)}{\overline{F}(x)} \geq 2$.

Démonstration.

Soit $x \in [0, +\infty[$.

- Tout d'abord, d'après **3.a** :

$$\begin{aligned} \overline{F_{X+Y}}(x) &\geq \mathbb{P}([\max(X, Y) > x]) \\ &\stackrel{||}{=} 1 - (F(x))^2 \quad (\text{d'après } \mathbf{3.b}) \end{aligned}$$

- Or, comme X est à support illimité à droite : $\overline{F}(x) > 0$. Ainsi :

$$\frac{\overline{F_{X+Y}}(x)}{\overline{F}(x)} \geq \frac{1 - (F(x))^2}{\overline{F}(x)}$$

- On note alors :

$$f_1 : x \mapsto \frac{\overline{F_{X+Y}}(x)}{\overline{F}(x)} \quad \text{et} \quad g_1 : x \mapsto \frac{1 - (F(x))^2}{\overline{F}(x)}$$

On obtient :

× la fonction f_1 est continue sur \mathbb{R}_+ car elle est le quotient $\frac{h_1}{h_2}$ de :

- $h_1 : x \mapsto \overline{F_{X+Y}}(x) = 1 - F_{X+Y}(x)$ qui est continue sur \mathbb{R}_+ car la v.a.r. $X + Y$ est une v.a.r. à densité (d'après un résultat de l'énoncé),

- $h_2 : x \mapsto \overline{F}(x) = 1 - F(x)$ qui :

a) est continue sur \mathbb{R}_+ car X est une v.a.r. à densité,

b) NE S'ANNULE PAS sur \mathbb{R}_+ , car X est à support illimité à droite.

× De même, la fonction g_1 est continue sur \mathbb{R}_+ .

× Démontrons que la fonction f_1 est à valeurs dans \mathbb{R}_+ , *i.e.* : $\forall x \in \mathbb{R}_+, f_1(x) \geq 0$.

Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

- comme F et F_{X+Y} sont des fonctions de répartition :

$$0 \leq F(x) \leq 1 \quad \text{et} \quad 0 \leq F_{X+Y}(x) \leq 1$$

Ainsi :

$$1 \geq \overline{F}(x) \geq 0 \quad \text{et} \quad 1 \geq \overline{F_{X+Y}}(x) \geq 0$$

- De plus, comme X est à support illimité à droite : $\overline{F}(x) > 0$.

On en déduit, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$f_1(x) \geq 0$$

× Démontrons que la fonction g_1 est à valeurs dans \mathbb{R}_+ .

Soit $x \in \mathbb{R}_+$. On sait déjà : $0 \leq F(x) \leq 1$.

Par croissance de $x \mapsto x^2$ sur \mathbb{R}_+ : $0 \leq (F(x))^2 \leq 1$. Ainsi :

$$1 - (F(x))^2 \geq 0$$

Enfin : $\overline{F}(x) > 0$. D'où : $g_1(x) \geq 0$.

× D'après ce qui précède :

$$\forall x \in [0, +\infty[, f_1(x) \geq g_1(x)$$

× D'après la question précédente : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g_1(x) = 2$.

Ainsi, d'après le résultat (2) de l'énoncé : $\liminf_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) \geq 2$.

$$\boxed{\liminf_{x \rightarrow +\infty} \frac{\overline{F_{X+Y}}(x)}{\overline{F}(x)} \geq 2.}$$

□

4. Soit X une variable aléatoire positive de fonction de répartition F . On suppose que la loi de X est à support illimité à droite. On dit que cette loi est **sous-exponentielle** si :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\overline{F_{X+Y}}(x)}{\overline{F}(x)} = 2$$

où, comme dans les notations précédentes, F_{X+Y} désigne la fonction de répartition de la somme des deux variables aléatoires réelles positives X et Y indépendantes, de même loi et de fonction de répartition F .

On considère alors deux variables aléatoires réelles positives indépendantes X et Y de même loi sous-exponentielle.

a) Montrer :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_{[X+Y>x]}([X > x]) = \frac{1}{2}$$

Démonstration.

- Soit $x \in [0, +\infty[$.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{[X+Y>x]}([X > x]) &= \frac{\mathbb{P}([X > x] \cap [X + Y > x])}{\mathbb{P}([X + Y > x])} \\ &= \frac{\mathbb{P}([X > x])}{\mathbb{P}([X + Y > x])} && \text{(car, comme } Y \text{ à valeurs positives : } \\ & && [X > x] \subset [X + Y > x]) \\ &= \frac{\overline{F}(x)}{\overline{F}_{X+Y}(x)} \end{aligned}$$

- Or, comme la loi de X est sous-exponentielle : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\overline{F}_{X+Y}(x)}{\overline{F}(x)} = 2$.

On en déduit : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_{[X+Y>x]}([X > x]) = \frac{1}{2}$.

□

b) En déduire (en utilisant la question 3.c) :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\mathbb{P}([X + Y > x])}{\mathbb{P}([\max(X, Y) > x])} = 1$$

Démonstration.

- D'après les questions 3.b) et 3.c) :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\mathbb{P}([\max(X, Y) > x])}{\mathbb{P}([X > x])} = 2$$

- D'après la question précédente :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\mathbb{P}([X > x])}{\mathbb{P}([X + Y > x])} = \frac{1}{2}$$

- Or, pour tout $x \in [0, +\infty[$:

$$\begin{aligned} \frac{\mathbb{P}([X + Y > x])}{\mathbb{P}([\max(X, Y) > x])} &= \frac{\mathbb{P}([X + Y > x])}{\mathbb{P}([X > x])} \times \frac{\mathbb{P}([X > x])}{\mathbb{P}([\max(X, Y) > x])} \\ &\quad \begin{array}{c} \simeq \\ \downarrow \\ 2 \end{array} \quad \times \quad \begin{array}{c} \simeq \\ \downarrow \\ \frac{1}{2} \end{array} \end{aligned}$$

On en déduit : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\mathbb{P}([X + Y > x])}{\mathbb{P}([\max(X, Y) > x])} = 1$.

□

On en déduit :

$$\frac{\mathbb{P}([X + Y > x] \cap [\max(X, Y) \leq x])}{\mathbb{P}([\max(X, Y) > x])} = \frac{\mathbb{P}_{[X+Y>x]}([X \leq x] \cap [Y \leq x])}{\mathbb{P}_{[X+Y>x]}([X > x] \cup [Y > x])}$$

- Ainsi, d'après la question précédente :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\mathbb{P}_{[X+Y>x]}([X \leq x] \cap [Y \leq x])}{\mathbb{P}_{[X+Y>x]}([X > x] \cup [Y > x])} = 0$$

On en déduit que, pour de grandes valeurs de x , si l'événement $[X + Y > x]$ est réalisé, alors il est beaucoup plus probable que la v.a.r. X ou la v.a.r. Y prenne une valeur strictement supérieure à x , plutôt qu'elles prennent toutes les deux des valeurs inférieures ou égales à x .

Commentaire

On propose ici une interprétation possible du résultat de la question précédente. Toute interprétation pertinente permet assurément d'obtenir la totalité des points alloués à cette question. □

II - Problèmes de queues

Soit f une densité de probabilité sur \mathbb{R} que l'on suppose nulle sur \mathbb{R}_-^* et continue sur \mathbb{R}_+^* , et F la fonction de répartition associée. On dit que la loi de probabilité définie par la densité f possède **une loi à queue lourde** si pour tout λ strictement positif, l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(x) e^{\lambda x} dx$ est divergente, c'est-à-dire que pour tout réel $\lambda > 0$:

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_1^a f(x) e^{\lambda x} dx = +\infty$$

5. Soit X une variable aléatoire de densité f . Montrer que si la loi de X est à queue lourde, elle est à support illimité à droite.

Démonstration.

Démontrons la contraposée de cette assertion : si X n'est pas à support illimité à droite, alors la loi de X n'est pas à queue lourde.

Supposons que la v.a.r. X n'est pas à support illimité à droite.

Alors il existe $x_0 \in [0, +\infty[$ tel que : $\overline{F}(x_0) = 0$. Autrement dit : $F(x_0) = 1 - \overline{F}(x_0) = 1$.

- Soit $x \geq x_0$. Alors : $[X \leq x_0] \subset [X \leq x]$. Ainsi, par croissance de \mathbb{P} :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}([X \leq x_0]) & \leq & \mathbb{P}([X \leq x]) \\ \parallel & & \parallel \\ F(x_0) & & F(x) \end{array}$$

On obtient alors :

$$F(x_0) \leq F(x) \leq 1$$

Or $F(x_0) = 1$. On en déduit : $\forall x \in [x_0, +\infty[$, $F(x) = 1$.

- Comme de plus X est une v.a.r. à densité, on obtient :

$$\forall x \in]x_0, +\infty[, f(x) = F'(x) = 0$$

Autrement dit, la fonction f est nulle en dehors de $[0, x_0]$.

- Démontrons alors que l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(x) e^x dx$ est convergente.
- × La fonction $x \mapsto f(x) e^x$ est continue sur $[1, +\infty[$ en tant que produit de fonctions continues sur $[1, +\infty[$.
- × Deux cas se présentent :

- si $x_0 < 1$, alors la fonction $x \mapsto f(x) e^x$ est nulle sur $[1, +\infty[$. D'où : $\int_1^{+\infty} f(x) e^x dx = 0$.

En particulier, l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(x) e^x dx$ est convergente.

- si $x_0 \geq 1$, alors, comme la fonction $x \mapsto f(x) e^x$ est nulle en dehors de $[0, x_0]$:

$$\int_1^{+\infty} f(x) e^x dx = \int_1^{x_0} f(x) e^x dx$$

Or la fonction $x \mapsto f(x) e^x$ est continue sur le segment $[1, x_0]$. L'intégrale $\int_1^{x_0} f(x) e^x dx$ est convergente.

On a ainsi démontré qu'il existe $\lambda > 0$ ($\lambda = 1$) tel que $\int_1^{+\infty} f(x) e^{\lambda x} dx$ est convergente.

On en déduit que la loi de X n'est pas à queue lourde.

Par contraposée, si la loi de X est à queue lourde, alors elle est à support illimité à droite.

Commentaire

- Soient p et q deux propositions.
 On prendra bien garde à ne pas confondre les propositions :
 - × $q \Rightarrow p$: la proposition **réci-proque** de $p \Rightarrow q$,
 - × $\text{NON}(q) \Rightarrow \text{NON}(p)$: la proposition **contraposée** de $p \Rightarrow q$.
- En particulier, les propositions $p \Rightarrow q$ et $\text{NON}(q) \Rightarrow \text{NON}(p)$ ont même valeur de vérité.
 Ce n'est pas le cas des propositions $p \Rightarrow q$ et $q \Rightarrow p$. Par exemple, en notant :

$$p : x \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad q : x \in \mathbb{R}$$

- × $p \Rightarrow q$ est vraie (tout entier est un réel),
- × $\text{NON}(q) \Rightarrow \text{NON}(p)$ est vraie (si un nombre n'est pas un réel, ce n'est pas non plus un entier),
- × $q \Rightarrow p$ est fautive ($\sqrt{2}$ est un réel mais ce n'est pas un entier).

6. Étude de quelques lois particulières :

a) Une loi exponentielle est-elle à queue lourde ?

Démonstration.

- Soit Z une v.a.r. de loi $\mathcal{E}(\mu)$. Alors :

$$\forall x \in [0, +\infty[, f(x) = \mu e^{-\mu x}$$

- Soit $\lambda > 0$. Déterminons la nature de l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(x) e^{\lambda x} dx$.

× La fonction $x \mapsto f(x) e^{\lambda x}$ est continue sur $[1, +\infty[$. L'intégrale $\int_1^{+\infty} f(x) e^{\lambda x} dx$ est donc impropre (seulement) en $+\infty$.

× Soit $B \in [1, +\infty[$.

$$\begin{aligned} \int_1^B f(x) e^{\lambda x} dx &= \int_1^B \mu e^{-\mu x} e^{\lambda x} dx \\ &= \mu \int_1^B e^{(\lambda-\mu)x} dx \\ &= \mu \left[\frac{1}{\lambda-\mu} e^{(\lambda-\mu)x} \right]_1^B \\ &= \frac{\mu}{\lambda-\mu} (e^{(\lambda-\mu)B} - e^{\lambda-\mu}) \end{aligned}$$

× On remarque qu'en choisissant λ tel que $\lambda - \mu < 0$: $\lim_{B \rightarrow +\infty} e^{(\lambda-\mu)B} = 0$.

Ainsi, en choisissant par exemple $\lambda = \frac{\mu}{2}$, on obtient :

$$e^{(\frac{\mu}{2}-\mu)B} = e^{-\frac{\mu}{2} B} \xrightarrow{B \rightarrow +\infty} 0$$

L'intégrale $\int_1^{+\infty} f(x) e^{\frac{\mu}{2} x} dx$ est donc convergente.

La loi exponentielle n'est donc pas une loi à queue lourde.

Commentaire

Lorsqu'on résultat à démontrer est formulé sous forme d'interrogation (et pas d'affirmation comme c'est le cas en général), on pensera, dans une majorité de cas à répondre par la négative. À titre d'illustration, lorsqu'on rencontre les questions :

- × « L'ensemble F est-il un sous-espace vectoriel de E ? »
- × « Les v.a.r. X et Y sont-elles indépendantes ? »
- × « La v.a.r. X admet-elle une variance ? »
- × « La matrice A est-elle diagonalisable ? »
- × « La suite (u_n) est-elle majorée ? »

la réponse est, généralement, « non » (à justifier évidemment). □

b) Soit f la fonction d'expression $f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$ si x positif ou nul et $f(x) = 0$ si x est strictement négatif.

(i) Montrer que f est une densité de probabilité.

Démonstration.

• La fonction f est continue :

- × sur $] -\infty, 0[$, en tant que fonction constante,
- × sur $]0, +\infty[$ car elle est l'inverse $\frac{1}{h}$ de $h : x \mapsto (1+x)^2$:
 - est continue sur $]0, +\infty[$ en tant que fonction polynomiale,
 - NE S'ANNULE PAS sur $]0, +\infty[$.

La fonction f est continue sur \mathbb{R} sauf éventuellement en 0.

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent.
 - × si $x \in]-\infty, 0[$, alors : $f(x) = 0 \geq 0$.
 - × si $x \in [0, +\infty[$, alors : $f(x) = \frac{1}{(1+x)^2} \geq 0$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0}$$

- Démontrons que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ converge et vaut 1.

× Comme la fonction f est nulle en dehors de $[0, +\infty[$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_0^{+\infty} f(x) dx$$

× La fonction f est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$. L'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ est donc impropre (uniquement) en $+\infty$.

× Soit $B \in [0, +\infty[$.

$$\int_0^B f(x) dx = \int_0^B \frac{1}{(1+x)^2} dx = \left[-\frac{1}{1+x} \right]_0^B = -\frac{1}{1+B} + 1$$

Or : $\lim_{B \rightarrow +\infty} -\frac{1}{1+B} + 1 = 1$.

$$\boxed{\text{On en déduit que l'intégrale } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \text{ converge et vaut 1.}}$$

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est donc une densité de probabilité.}}$$

□

(ii) Soit λ strictement positif. Justifier l'existence d'un réel positif x_0 tel que pour tout x supérieur ou égal à x_0 , on ait : $\frac{e^{\lambda x}}{(1+x)^2} \geq 1$.

Démonstration.

- Tout d'abord : $\frac{e^{\lambda x}}{(1+x)^2} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{\lambda x}}{x^2}$. Or, en posant le changement de variable $u = \lambda x$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\lambda x}}{x^2} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{e^u}{\left(\frac{u}{\lambda}\right)^2} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \lambda^2 \frac{e^u}{u^2} = +\infty \quad (\text{par croissances comparées})$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\lambda x}}{(1+x)^2} = +\infty.}$$

- Par définition de la limite, on en déduit :

$$\forall A \geq 0, \exists x_0 \geq 0, \forall x \geq x_0, \frac{e^{\lambda x}}{(1+x)^2} \geq A$$

$$\boxed{\text{En particulier, pour } A = 1, \text{ il existe } x_0 \geq 0 \text{ tel que, pour tout } x \geq x_0 : \frac{e^{\lambda x}}{(1+x)^2} \geq 1.}$$

(iii) En déduire que la loi définie par f est à queue lourde.

Démonstration.

Soit $\lambda > 0$.

- La fonction $x \mapsto f(x) e^{\lambda x}$ est continue sur $[1, +\infty[$. L'intégrale $\int_1^{+\infty} f(x) e^{\lambda x} dx$ est donc impropre (uniquement) en $+\infty$.

- De plus :

- × d'après la question précédente : $\forall x > x_0, 0 \leq \frac{1}{x^0} \leq f(x) e^{\lambda x}$.

- × $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^0} dx$ est une intégrale de Riemann, impropre en $+\infty$, d'exposant 0 ($0 > 2$). Elle est donc divergente.

Par critère de comparaison d'intégrales généralisées de fonctions continues positives, l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(x) e^{\lambda x} dx$ est divergente.

On en déduit que la loi définie par f est à queue lourde.

Commentaire

On a passé ici sous silence la disjonction de cas suivante (qui n'aurait pas été exigée).

- Si $x_0 < 1$, alors : $\forall x \geq 1, 0 \leq \frac{1}{x^0} \leq f(x) e^{\lambda x}$.

Et on peut ensuite appliquer le critère de comparaison comme ci-dessus.

- Si $x_0 \geq 1$, alors :

- × $\forall x \geq x_0, 0 \leq \frac{1}{x^0} \leq f(x) e^{\lambda x}$.

- × $\int_{x_0}^{+\infty} \frac{1}{x^0} dx$ est une intégrale de Riemann, impropre en $+\infty$, d'exposant 0 ($0 > 2$). Elle est donc divergente.

Par critère de comparaison d'intégrales généralisées de fonctions continues positives, l'intégrale $\int_{x_0}^{+\infty} f(x) e^{\lambda x} dx$ est divergente. On en déduit que l'intégrale

$\int_1^{+\infty} f(x) e^{\lambda x} dx$ est également divergente. □

c) Soit Z une variable aléatoire de loi normale centrée réduite et X la variable aléatoire définie par $X = e^Z$.

(i) Déterminer une densité f de X .

Démonstration.

- Tout d'abord, par définition de X : $X(\Omega) \subset]0, +\infty[$.

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent :

- × si $x \in]-\infty, 0]$, alors $[X \leq x] = \emptyset$ (car $X(\Omega) \subset]-\infty, 0]$). D'où :

$$F_X(x) = \mathbb{P}([X \leq x]) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0$$

× si $x \in]0, +\infty[$, alors :

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \mathbb{P}([X \leq x]) \\ &= \mathbb{P}([e^Z \leq x]) \\ &= \mathbb{P}([Z \leq \ln(x)]) && \text{(par stricte croissance} \\ &&& \text{de } \ln \text{ sur }]0, +\infty[) \\ &= \Phi(\ln(x)) \end{aligned}$$

où Φ désigne la fonction de répartition de Z qui suit une loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

Finalement : $F_X : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0] \\ \Phi(\ln(x)) & \text{si } x \in]0, +\infty[\end{cases}$.

• La fonction F_X est continue :

× sur $] - \infty, 0[$ en tant que fonction constante,
 × sur $]0, +\infty[$ car elle est la composée $F_X = \Phi \circ g$ avec :

- $g : x \mapsto \ln(x)$ qui :

- a) est continue sur $]0, +\infty[$,
- b) vérifie : $g(]0, +\infty[) \subset \mathbb{R}$.

- Ψ qui est continue sur \mathbb{R} car c'est la fonction de répartition d'une v.a.r. à densité.

× en 0. En effet :

- d'une part : $\lim_{x \rightarrow 0^-} F_X(x) = F_X(0) = 0$,

- d'autre part, en posant le changement de variable $u = \ln(x)$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \Phi(\ln(x)) = \lim_{u \rightarrow -\infty} \Phi(u) = 0 \quad (\text{car } \Phi \text{ est une fonction de répartition})$$

Et ainsi : $\lim_{x \rightarrow 0^-} F_X(x) = F_X(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} F_X(x)$.

La fonction F_X est donc continue sur \mathbb{R} .

• La fonction F_X est de classe \mathcal{C}^1 sur $] - \infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ avec des arguments similaires à ceux de la continuité sur ces intervalles.

La fonction F_X est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} sauf éventuellement en 1.

La v.a.r. X est une v.a.r. à densité.

• Pour déterminer une densité f de X , on dérive F_X sur les intervalles ouverts $] - \infty, 0[$ et $]0, +\infty[$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

× Si $x \in] - \infty, 0[$.

$$f(x) = F'_X(x) = 0$$

× Si $x \in]0, +\infty[$.

$$\begin{aligned} f(x) &= F'_X(x) = (\Phi \circ g)'(x) \\ &= g'(x) \times \Phi'(g(x)) \\ &= \frac{1}{x} \times \varphi(\ln(x)) && \text{(où } \varphi \text{ est une densité} \\ &&& \text{de } Z, \text{ où } Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)) \\ &= \frac{1}{x} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\ln(x))^2}{2}\right) \end{aligned}$$

× On choisit enfin : $f(0) = 0$.

Ainsi, une densité f de X est : $f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0] \\ \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\ln(x))^2}{2}\right) & \text{si } x \in]0, +\infty[\end{cases}$.

(ii) Soit λ strictement positif. Que vaut $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\lambda x - \frac{1}{2} (\ln(x))^2 - \ln(x) \right)$?

Démonstration.

• Tout d'abord, pour tout $x \in]0, +\infty[$:

$$\lambda x - \frac{1}{2} (\ln(x))^2 - \ln(x) = x \left(\lambda - \frac{1}{2} \frac{(\ln(x))^2}{x} - \frac{\ln(x)}{x} \right)$$

• Or, par croissances comparées :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln(x))^2}{x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$$

Comme $\lambda > 0$, on en déduit : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\lambda x - \frac{1}{2} (\ln(x))^2 - \ln(x) \right) = +\infty$.

(iii) En déduire qu'il existe un réel x_0 strictement positif tel que :

$$\forall x \geq x_0, f(x) e^{\lambda x} \geq 1$$

Démonstration.

• Tout d'abord, pour tout $x \in]0, +\infty[$:

$$\begin{aligned} f(x) e^{\lambda x} &= \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\ln(x))^2}{2}\right) e^{\lambda x} \\ &= \frac{1}{e^{\ln(x)} \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} (\ln(x))^2 + \lambda x\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\lambda x - \frac{1}{2} (\ln(x))^2 - \ln(x)\right) \end{aligned}$$

• Or, d'après la question précédente : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\lambda x - \frac{1}{2} (\ln(x))^2 - \ln(x) \right) = +\infty$. D'où :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp\left(\lambda x - \frac{1}{2} (\ln(x))^2 - \ln(x)\right) = +\infty$$

Ainsi : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) e^{\lambda x} = +\infty$.

Comme en question **6.b)(ii)**, par définition de la limite, il existe $x_0 > 0$ tel que :
 $\forall x \geq x_0, f(x) e^{\lambda x} \geq 1$.

(iv) En déduire que la loi de X est à queue lourde.

Démonstration.

Soit $\lambda > 0$.

- La fonction $x \mapsto f(x) e^{\lambda x}$ est continue sur $[1, +\infty[$ (car F_X est de classe \mathcal{C}^1 sur $[1, +\infty[$).

L'intégrale $\int_1^{+\infty} f(x) e^{\lambda x} dx$ est donc impropre (uniquement) en $+\infty$.

- De plus :

× d'après la question précédente : $\forall x \geq x_0, 0 \leq \frac{1}{x^0} \leq f(x) e^{\lambda x}$.

× $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^0} dx$ est une intégrale de Riemann, impropre en $+\infty$, d'exposant 0 (0 > 2). Elle est donc divergente.

Par critère de comparaison d'intégrales généralisées de fonctions continues positives, l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(x) e^{\lambda x} dx$ est divergente.

On en déduit que la loi de X est à queue lourde.

□

On désigne désormais par X une variable aléatoire positive de loi à support illimité à droite et admettant une densité f continue sur \mathbb{R}_+^* , et continue à droite en 0. On note F la fonction de répartition associée.

On pose alors : $r(x) = \frac{f(x)}{F(x)}$ et $R(x) = -\ln(\overline{F}(x))$, pour x positif.

7. Montrer :

$$\overline{F}(x) = \exp\left(-\int_0^x r(y) dy\right)$$

Démonstration.

- Remarquons tout d'abord que la fonction R est dérivable sur $]0, +\infty[$ et dérivable à droite en 0 car elle est la composée $R = h_2 \circ h_1$ avec :

× $h_1 : x \mapsto \overline{F}(x) = 1 - F(x)$ qui :

- est dérivable sur $]0, +\infty[$ et dérivable à droite en 0, car f est continue sur $]0, +\infty[$ et continue à droite en 0,

- vérifie : $h_1([0, +\infty]) \subset]0, +\infty[$ (car X est à support illimité à droite).

× $h_2 : x \mapsto -\ln(x)$ qui est dérivable sur $]0, +\infty[$.

De plus, soit $x \in \mathbb{R}_+$:

$$R'(x) = (h_2 \circ h_1)'(x) = h_1'(x) \times h_2'(h_1(x)) = -f(x) \times \left(-\frac{1}{\overline{F}(x)}\right) = r(x)$$

- On obtient alors :

$$\exp\left(-\int_0^x r(y) dy\right) = \exp\left(-[R(y)]_0^x\right) = \exp\left(-(R(x) - R(0))\right)$$

- Or :

$$R(0) = -\ln(\overline{F}(0)) = -\ln(1 - F(0))$$

Comme $X(\Omega) \subset [0, +\infty[$, pour tout $t \in]-\infty, 0[$: $F(t) = \mathbb{P}([X \leq t]) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0$.

La v.a.r. X est de plus une v.a.r. à densité, donc F est continue sur \mathbb{R} (donc en particulier en 0).

Ainsi :

$$F(0) = \lim_{t \rightarrow 0^-} F(t) = 0$$

Et alors : $R(0) = -\ln(1 - 0) = 0$.

- On en déduit :

$$\exp\left(-\int_0^x r(y) dy\right) = \exp\left(-R(x)\right) = \exp\left(\ln(\overline{F}(x))\right) = \overline{F}(x)$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+, \overline{F}(x) = \exp\left(-\int_0^x r(y) dy\right)}$$

□

8. On suppose : $\liminf_{x \rightarrow +\infty} \frac{R(x)}{x} > 0$.

- a) Montrer qu'il existe deux réels x_0 et ε strictement positifs tels que pour tout x supérieur ou égal à x_0 : $\overline{F}(x) \leq e^{-\varepsilon x}$.

Démonstration.

On note g la fonction définie sur \mathbb{R}_+ par $g : x \mapsto \begin{cases} \frac{R(x)}{x} & \text{si } x \in]0, +\infty[\\ r(0) & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

- Démontrons que g est continue sur \mathbb{R}_+ .

× La fonction g est continue sur $]0, +\infty[$ en tant que quotient de fonctions continues sur $]0, +\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur cet intervalle.

× La fonction g est continue en 0. En effet, comme R est dérivable à droite en 0 (d'après la question précédente) :

$$g(x) = \frac{R(x)}{x} = \frac{R(x) - R(0)}{x - 0} \xrightarrow{x \rightarrow 0} R'(0) = r(0)$$

Ainsi : $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = g(0)$.

- Démontrons que g est à valeurs dans \mathbb{R}_+ , i.e. : $\forall x \in \mathbb{R}_+, g(x) \geq 0$.

Soit $x \in]0, +\infty[$.

× Comme F est une fonction de répartition : $0 \leq F(x) \leq 1$. Ainsi : $1 \geq \overline{F}(x) \geq 0$.

× De plus, la v.a.r. X est à support illimité à droite. D'où : $0 < \overline{F}(x)$.

× On obtient :

$$0 < \overline{F}(x) \leq 1$$

$$\text{donc } \ln(\overline{F}(x)) \leq 0 \quad (\text{par croissance de } \ln \text{ sur }]0, +\infty[)$$

$$\text{d'où } R(x) \geq 0 \quad (\text{car } R(x) = -\ln(\overline{F}(x)))$$

De plus : $x > 0$. Ainsi : $g(x) \geq 0$.

× Enfin : $g(0) = r(0) = \frac{f(0)}{F(0)} = f(0)$ (on a démontré en question précédente : $\overline{F}(0) = 1$).

Or f est une densité de probabilité. On en déduit : $g(0) \geq 0$.

Finalement : $\forall x \in \mathbb{R}_+, g(x) \geq 0$.

- On sait alors :

× g est continue sur \mathbb{R}_+ ,

× g est à valeurs dans \mathbb{R}_+ ,

× $\liminf_{x \rightarrow +\infty} g(x) > 0$.

Alors, d'après le résultat (2) de l'énoncé, il existe $x_0 > 0$ et $\varepsilon > 0$ tels que, pour tout $x \geq x_0$: $g(x) \geq \varepsilon$.

- Soit $x \geq x_0$.

$$\begin{aligned}
 g(x) \geq \varepsilon &\Leftrightarrow \frac{R(x)}{x} \geq \varepsilon \\
 &\Leftrightarrow -\ln(\overline{F}(x)) \geq \varepsilon x \quad (\text{car } x > 0) \\
 &\Leftrightarrow \ln(\overline{F}(x)) \leq -\varepsilon x \\
 &\Leftrightarrow \overline{F}(x) \leq e^{-\varepsilon x} \quad (\text{par stricte croissance de exp sur } \mathbb{R})
 \end{aligned}$$

Finalement, il existe $x_0 > 0$ et $\varepsilon > 0$ tels que : $\forall x \geq x_0, \overline{F}(x) \leq e^{-\varepsilon x}$.

Commentaire

- On a détaillé ici précisément l'obtention des hypothèses nécessaires à l'application du résultat (2) de l'énoncé. On peut penser qu'une justification plus succincte aurait tout de même permis d'obtenir la grande majorité des points alloués à cette question.
- Il est cependant **indispensable** de vérifier (au moins rapidement) que ces hypothèses sont vérifiées !

- b) Soit λ tel que : $0 < \lambda < \varepsilon$. Soit A strictement positif donné. Montrer :

$$\int_0^A e^{\lambda x} f(x) dx = 1 - \overline{F}(A) e^{\lambda A} + \lambda \int_0^A e^{\lambda x} \overline{F}(x) dx$$

Démonstration.

On procède par intégration par parties (IPP).

$$\left| \begin{array}{ll}
 u(x) = e^{\lambda x} & u'(x) = \lambda e^{\lambda x} \\
 v'(x) = f(x) & v(x) = -(1 - F(x)) = -\overline{F}(x)
 \end{array} \right.$$

Cette IPP est valide car les fonctions u et v sont de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, A]$ (la fonction v est bien de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, A]$ car f est continue sur $]0, +\infty[$ et continue à droite en 0).

On obtient alors :

$$\begin{aligned}
 \int_0^A f(x) e^{\lambda x} dx &= [-\overline{F}(x) e^{\lambda x}]_0^A - \int_0^A -\overline{F}(x) \lambda e^{\lambda x} dx \\
 &= -\overline{F}(A) e^{\lambda A} + \overline{F}(0) e^0 + \lambda \int_0^A \overline{F}(x) e^{\lambda x} dx
 \end{aligned}$$

Finalement : $\int_0^A f(x) e^{\lambda x} dx = 1 - \overline{F}(A) e^{\lambda A} + \lambda \int_0^A \overline{F}(x) e^{\lambda x} dx$.

□

c) Conclure que $\int_0^{+\infty} e^{\lambda x} f(x) dx$ converge et que la loi de X n'est pas à queue lourde.

Démonstration.

- Tout d'abord, d'après la question **8.a**), pour tout $x \geq x_0 : \bar{F}(x) \leq e^{-\varepsilon x}$.
 On a de plus démontré en **8.a**), pour tout $x \in \mathbb{R}_+ : 0 < \bar{F}(x)$. Ainsi :

$$0 < \bar{F}(x) \leq e^{-\varepsilon x}$$

$$\text{donc } 0 < \bar{F}(x) e^{\lambda x} \leq e^{-\varepsilon x} e^{\lambda x} \quad (\text{car } e^{\lambda x} > 0)$$

$$\text{d'où } 0 < \bar{F}(x) e^{\lambda x} \leq e^{(\lambda - \varepsilon)x}$$

Or $\lambda < \varepsilon$, donc $\lambda - \varepsilon < 0$, et ainsi :

$$\times \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{(\lambda - \varepsilon)x} = 0$$

$$\times \lim_{x \rightarrow +\infty} 0 = 0$$

Alors, par théorème d'encadrement : $\lim_{A \rightarrow +\infty} \bar{F}(A) e^{\lambda A} = 0$.

- De plus :

$$\times \forall x \geq x_0, 0 \leq \bar{F}(x) e^{\lambda x} \leq e^{(\lambda - \varepsilon)x}$$

$$\times \int_{x_0}^{+\infty} e^{(\lambda - \varepsilon)x} dx \text{ est une intégrale exponentielle de paramètre } \lambda - \varepsilon \ (\lambda - \varepsilon < 0). \text{ Elle est donc convergente.}$$

Par critère de comparaison des intégrales généralisées de fonctions continues positives,

$$\int_{x_0}^{+\infty} \bar{F}(x) e^{\lambda x} dx \text{ est convergente.}$$

- De plus, la fonction $x \mapsto \bar{F}(x) e^{\lambda x}$ est continue sur le segment $[0, x_0]$. L'intégrale $\int_0^{x_0} \bar{F}(x) e^{\lambda x} dx$ est donc bien définie.

Finalement, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \bar{F}(x) e^{\lambda x} dx$ est convergente.

On en déduit que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x) e^{\lambda x} dx$ est convergente.

- On a démontré, en particulier, qu'en choisissant $\lambda = \frac{\varepsilon}{2}$, $\int_1^{+\infty} f(x) e^{\lambda x} dx$ est convergente.

Il existe donc λ (par exemple : $\lambda = \frac{\varepsilon}{2}$) tel que l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(x) e^{\lambda x} dx$ est convergente.

La loi de X n'est donc pas à queue lourde. □

9. On rappelle l'inégalité de Markov : si Z est une variable aléatoire positive admettant une espérance $\mathbb{E}(Z)$, alors pour tout α strictement positif, on a :

$$\mathbb{P}([Z > \alpha]) \leq \frac{1}{\alpha} \mathbb{E}(Z)$$

On suppose maintenant que la loi de X n'est pas à queue lourde.

a) Montrer qu'il existe λ strictement positif tel que $c = \mathbb{E}(e^{\lambda X})$ existe.

Démonstration.

• Soit $\lambda > 0$.

Par théorème de transfert, la v.a.r. $e^{\lambda X}$ admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{\lambda x} dx$ est absolument convergente.

La fonction $x \mapsto f(x) e^{\lambda x}$ étant positive sur \mathbb{R} , l'absolue convergence de $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{\lambda x} dx$ équivaut à sa convergence.

• De plus, comme $X(\Omega) \subset [0, +\infty[$, la fonction f est nulle en dehors de $[0, +\infty[$. D'où :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{\lambda x} dx = \int_0^{+\infty} f(x) e^{\lambda x} dx$$

Finalement, la v.a.r. $e^{\lambda X}$ admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x) e^{\lambda x} dx$ est convergente.

• Enfin :

× La v.a.r. X n'est pas à queue lourde. Il existe donc $\lambda > 0$ tel que $\int_1^{+\infty} f(x) e^{\lambda x} dx$ est convergente.

× Or, la fonction $x \mapsto f(x) e^{\lambda x}$ est continue sur le segment $[0, 1]$. L'intégrale $\int_0^1 f(x) e^{\lambda x} dx$ est donc bien définie.

On en déduit que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x) e^{\lambda x} dx$ est convergente.

D'après ce qui précède, on en conclut qu'il existe $\lambda > 0$ tel que $e^{\lambda X}$ admet une espérance (i.e. $c = \mathbb{E}(e^{\lambda X})$ existe). □

b) Soit x strictement positif. Montrer : $\bar{F}(x) \leq c \cdot e^{-\lambda x}$.

Démonstration.

• Tout d'abord :

$$\bar{F}(x) \leq c \cdot e^{-\lambda x} \Leftrightarrow \mathbb{P}([X > x]) \leq \frac{\mathbb{E}(e^{\lambda X})}{e^{\lambda x}} \quad (\text{par définition de } c)$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{P}([\lambda X > \lambda x]) \leq \frac{\mathbb{E}(e^{\lambda X})}{e^{\lambda x}} \quad (\text{car } \lambda > 0)$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{P}([e^{\lambda X} > e^{\lambda x}]) \leq \frac{\mathbb{E}(e^{\lambda X})}{e^{\lambda x}} \quad (\text{par stricte croissance de exp sur } \mathbb{R})$$

• Or la v.a.r. $e^{\lambda X}$:

× est à valeurs positives (par propriété de exp),

× admet une espérance, d'après la question précédente.

Ainsi, comme $e^{\lambda x} > 0$, par inégalité de Markov :

$$\mathbb{P}([e^{\lambda X} > e^{\lambda x}]) \leq \frac{\mathbb{E}(e^{\lambda X})}{e^{\lambda x}}$$

Par équivalence : $\bar{F}(x) \leq c \cdot e^{-\lambda x}$.

Commentaire

On reconnaît dans cette question le même principe de démonstration que pour celle de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

- 1) faire apparaître, par équivalence, une inégalité de Markov en composant par une fonction strictement croissante (dans cette question, la fonction $x \mapsto e^{\lambda x}$ sur \mathbb{R} ; pour l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, la fonction $x \mapsto x^2$ sur \mathbb{R}_+)
- 2) vérifier si les conditions d'application de l'inégalité de Markov sont bien vérifiées.

□

c) Montrer : $\liminf_{x \rightarrow +\infty} \frac{R(x)}{x} \geq \lambda > 0$.

Démonstration.

On conserve la notation : $g : x \mapsto \begin{cases} \frac{R(x)}{x} & \text{si } x \in]0, +\infty[\\ r(0) & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

- Soit $x \in]0, +\infty[$. D'après la question précédente :

$$\overline{F}(x) \leq c e^{-\lambda x}$$

donc $\ln(\overline{F}(x)) \leq \ln(c e^{-\lambda x})$ *(par croissance de \ln sur $]0, +\infty[$)*

d'où $R(x) \geq -(\ln(c) - \lambda x)$ *(car : $R(x) = -\ln(\overline{F}(x))$)*

ainsi $\frac{R(x)}{x} \geq \lambda - \frac{\ln(c)}{x}$ *(car $x > 0$)*

On note alors h , la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$h : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \left]0, \frac{\ln(c)}{\lambda}\right[\\ \lambda - \frac{\ln(c)}{x} & \text{si } x \in \left[\frac{\ln(c)}{\lambda}, +\infty\right[\end{cases}$$

- On obtient :

a) la fonction g est continue sur \mathbb{R}_+ et à valeurs dans \mathbb{R}_+ d'après **8.a**),

b) la fonction h est continue sur \mathbb{R}_+ et à valeurs dans \mathbb{R}_+ ,

c) $\forall x \in \mathbb{R}_+, g(x) \geq h(x)$,

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lambda$

D'après le résultat (2) de l'énoncé : $\liminf_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lambda$.

Finalemnt : $\liminf_{x \rightarrow +\infty} \frac{R(x)}{x} \geq \lambda$.

□

Commentaire

Revenons sur les hypothèses **b)** et **c)**.

- La fonction h est continue :
 - × sur $\left[0, \frac{\ln(c)}{\lambda}\right[$ en tant que fonction constante,
 - × sur $\left]\frac{\ln(c)}{\lambda}, +\infty\right[$, en tant que transformée affine d'une fonction continue sur $\left]\frac{\ln(c)}{\lambda}, +\infty\right[$,
 - × en $\ell = \frac{\ln(c)}{\lambda}$. En effet :
 - d'une part : $\lim_{x \rightarrow \ell^-} h(x) = 0$,
 - d'autre part : $\lim_{x \rightarrow \ell^+} h(x) = h(\ell) = \lambda - \frac{\ln(c)}{\lambda} = \lambda - \lambda = 0$.

D'où : $\lim_{x \rightarrow \ell^-} h(x) = h(\ell) = \lim_{x \rightarrow \ell^+} h(x)$.

- La fonction h est à valeurs dans \mathbb{R}_+ .
Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Deux cas se présentent :
 - × si $x \in [0, \ell[$, alors : $h(x) = 0 \geq 0$.
 - × si $x \in [\ell, +\infty[$, alors :

$$\begin{aligned} h(x) \geq 0 &\Leftrightarrow \lambda - \frac{\ln(c)}{x} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda \geq \frac{\ln(c)}{x} \\ &\Leftrightarrow x \geq \frac{\ln(c)}{\lambda} \quad (\text{car : } \frac{x}{\lambda} > 0) \end{aligned}$$

Or la dernière inégalité est vraie. Ainsi, par équivalence, la première l'est aussi.

- Démontrons : $\forall x \in \mathbb{R}_+, g(x) \geq h(x)$.
Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Deux cas se présentent :
 - × si $x \in [0, \ell[$, alors :
 - d'une part : $g(x) \geq 0$ (démontré en **8.a)**),
 - d'autre part : $h(x) = 0$.
 D'où : $g(x) \geq h(x)$.
 - × si $x \in [\ell, +\infty[$, alors :
 - d'une part : $g(x) \geq \lambda - \frac{\ln(c)}{x}$ (démontré dans cette question),
 - d'autre part : $h(x) = \lambda - \frac{\ln(c)}{x}$.
 D'où : $g(x) \geq h(x)$.

On a détaillé ici précisément l'obtention des hypothèses nécessaires à l'application du résultat (2) de l'énoncé. On peut penser qu'une justification plus succincte aurait tout de même permis d'obtenir la grande majorité des points alloués à cette question.

La condition $\liminf_{x \rightarrow +\infty} \frac{R(x)}{x} = 0$ n'est pas forcément très agréable à vérifier pour prouver qu'une loi possède une queue lourde. De ce fait, on introduit une autre notion plus simple dont on va montrer qu'elle suffit à assurer cette propriété.

10. Soit X une variable aléatoire positive de fonction de répartition F . On dit que la loi de X possède une **queue longue** si pour tout réel ε strictement positif, il existe un réel A strictement positif tel que pour tout réel x supérieur ou égal à A , et tout réel y appartenant à $[0, 1]$, on a :

$$\left| \frac{\overline{F}(x+y)}{\overline{F}(x)} - 1 \right| < \varepsilon$$

Dans la suite, F désigne la fonction de répartition d'une variable aléatoire X qui suit une telle loi.

a) Montrer, pour tout y de $[0, 1]$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\overline{F}(x+y) - \overline{F}(x)}{\overline{F}(x)} = 0$.

Démonstration.

Soit $y \in [0, 1]$.

• D'après l'énoncé :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A > 0, \forall x \geq 1, \left| \frac{\overline{F}(x+y)}{\overline{F}(x)} - 1 \right| < \varepsilon$$

Ceci est la définition de la propriété : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\overline{F}(x+y)}{\overline{F}(x)} = 1$.

• Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

$$\frac{\overline{F}(x+y) - \overline{F}(x)}{\overline{F}(x)} = \frac{\overline{F}(x+y)}{\overline{F}(x)} - 1$$

On en déduit, pour tout y de $[0, 1]$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\overline{F}(x+y) - \overline{F}(x)}{\overline{F}(x)} = 0$.

□

b) En déduire : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x+y) - F(x)}{\overline{F}(x)} = 0$.

Démonstration.

Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Soit $y \in [0, 1]$.

$$\frac{F(x+y) - F(x)}{\overline{F}(x)} = \frac{(X - \overline{F}(x+y)) - (X - \overline{F}(x))}{\overline{F}(x)} = -\frac{\overline{F}(x+y) - \overline{F}(x)}{\overline{F}(x)}$$

D'après la question précédente : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x+y) - F(x)}{\overline{F}(x)} = 0$.

□

c) Montrer, pour tout y de $[0, 1]$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_{[X > x]}([X > x+y]) = 1$$

Démonstration.

Soit $y \in [0, 1]$.

• Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{[X > x]}([X > x+y]) &= \frac{\mathbb{P}([X > x+y] \cap [X > x])}{\mathbb{P}([X > x])} \\ &= \frac{\mathbb{P}([X > x+y])}{\mathbb{P}([X > x])} && \text{(car, comme } y \geq 0 : \\ & && [X > x+y] \subset [X > x]) \\ &= \frac{\overline{F}(x+y)}{\overline{F}(x)} \end{aligned}$$

- Or, d'après **10.a**) : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\overline{F}(x+y)}{\overline{F}(x)} = 1.$

On en déduit : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_{[X > x]}([X > x+y]) = 1.$

□

- d)** Montrer : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (R(x+1) - R(x)) = 0.$

Démonstration.

- Soit $x \in \mathbb{R}_+.$

$$R(x+1) - R(x) = -\ln(\overline{F}(x+1)) + \ln(\overline{F}(x)) = -\ln\left(\frac{\overline{F}(x+1)}{\overline{F}(x)}\right)$$

- Or, en appliquant **10.a**) avec $y = 1$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\overline{F}(x+1)}{\overline{F}(x)} = 1.$

Par continuité de la fonction \ln en 1 :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{\overline{F}(x+1)}{\overline{F}(x)}\right) = \ln(1) = 0$$

Enfin : $\lim_{x \rightarrow +\infty} R(x+1) - R(x) = 0.$

□

11. Soit F la fonction de répartition d'une variable aléatoire de loi à queue longue.

a) Soit λ strictement positif fixé.

- (i) Montrer qu'il existe x_0 positif tel que pour tout x supérieur ou égal à x_0 et pour tout y de $[0, 1]$, on a :

$$\overline{F}(x+y) \geq \overline{F}(x) e^{-\frac{\lambda}{2}}$$

Indication : On utilisera la définition de fonction de répartition d'une variable aléatoire qui suit une loi à queue longue donnée à la question précédente avec une valeur précise de ε que l'on explicitera.

Démonstration.

- On note X une v.a.r. de fonction de répartition F .

Soit $\varepsilon > 0$. La v.a.r. X possède une queue longue. Il existe donc $x_0 > 0$ tel que, pour tout $x \geq x_0$, pour tout $y \in [0, 1]$:

$$\left| \frac{\overline{F}(x+y)}{\overline{F}(x)} - 1 \right| < \varepsilon$$

- Soit $x \geq x_0$. Soit $y \in [0, 1]$.

$$\left| \frac{\overline{F}(x+y)}{\overline{F}(x)} - 1 \right| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon \leq \frac{\overline{F}(x+y)}{\overline{F}(x)} - 1 \leq \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow 1 - \varepsilon \leq \frac{\overline{F}(x+y)}{\overline{F}(x)} \leq 1 + \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \overline{F}(x)(1 - \varepsilon) \leq \overline{F}(x+y) \leq \overline{F}(x)(1 + \varepsilon) \quad (\text{car : } \overline{F}(x) > 0)$$

- On choisit alors ε tel que $1 - \varepsilon = e^{-\frac{\lambda}{2}}$, i.e. : $\varepsilon = 1 - e^{-\frac{\lambda}{2}}$.
Vérifions qu'on a bien : $\varepsilon > 0$.

$$\begin{aligned} \varepsilon > 0 &\Leftrightarrow 1 - e^{-\frac{\lambda}{2}} > 0 \\ &\Leftrightarrow 1 > e^{-\frac{\lambda}{2}} \\ &\Leftrightarrow 0 > -\frac{\lambda}{2} && \text{(par stricte croissance} \\ &&& \text{de ln sur }]0, +\infty[) \\ &\Leftrightarrow 0 < \lambda \end{aligned}$$

La dernière inégalité est vraie. Ainsi, par équivalence, la première aussi.

En choisissant $\varepsilon = 1 - e^{-\frac{\lambda}{2}} > 0$, il existe $x_0 \geq 0$ tel que, pour tout $x \geq x_0$, pour tout $y \in [0, 1]$:

$$\bar{F}(x+y) \geq \bar{F}(x) e^{-\frac{\lambda}{2}}. \quad \square$$

(ii) Montrer, pour tout entier naturel non nul n :

$$\bar{F}(x_0 + n) \geq \bar{F}(x_0) e^{-\lambda \frac{n}{2}}$$

Démonstration.

Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n) : \bar{F}(x_0 + n) \geq \bar{F}(x_0) e^{-\lambda \frac{n}{2}}$.

► **Initialisation**

On applique le résultat de la question précédente à $x = x_0$ et $y = 1$ (on a bien $x \geq x_0$ et $y \in [0, 1]$). On obtient :

$$\bar{F}(x_0 + 1) \geq \bar{F}(x_0) e^{-\frac{\lambda}{2}}$$

D'où $\mathcal{P}(1)$.

► **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (i.e. $\bar{F}(x_0 + n + 1) \geq \bar{F}(x_0) e^{-\lambda \frac{n+1}{2}}$).

× On applique le résultat de la question précédente à $x = x_0 + n$ et $y = 1$ (on a bien $x \geq x_0$ et $y \in [0, 1]$). On obtient :

$$\bar{F}(x_0 + n + 1) \geq \bar{F}(x_0 + n) e^{-\frac{\lambda}{2}}$$

× Par hypothèse de récurrence :

$$\bar{F}(x_0 + n) \geq \bar{F}(x_0) e^{-\lambda \frac{n}{2}}$$

$$\text{donc } \bar{F}(x_0 + n) e^{-\frac{\lambda}{2}} \geq \bar{F}(x_0) e^{-\lambda \frac{n}{2}} e^{-\frac{\lambda}{2}} \quad (\text{car } e^{-\frac{\lambda}{2}} \geq 0)$$

$$\text{d'où } \bar{F}(x_0 + n) e^{-\frac{\lambda}{2}} \geq \bar{F}(x_0) e^{-\lambda \frac{n+1}{2}}$$

× Ainsi, par transitivité :

$$\bar{F}(x_0 + n + 1) \geq \bar{F}(x_0 + n) e^{-\frac{\lambda}{2}} \geq \bar{F}(x_0) e^{-\lambda \frac{n+1}{2}}$$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

Par principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\bar{F}(x_0 + n) \geq \bar{F}(x_0) e^{-\lambda \frac{n}{2}}$. □

(iii) En déduire : $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\lambda(x_0+n)} \overline{F}(x_0+n) = +\infty$.

Démonstration.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente :

$$\overline{F}(x_0+n) \geq \overline{F}(x_0) e^{-\lambda \frac{n}{2}}$$

$$\text{donc } e^{\lambda(x_0+n)} \overline{F}(x_0+n) \geq \overline{F}(x_0) e^{-\lambda \frac{n}{2}} e^{\lambda(x_0+n)} \quad (\text{car } e^{\lambda(x_0+n)} > 0)$$

$$\text{d'où } e^{\lambda(x_0+n)} \overline{F}(x_0+n) \geq \overline{F}(x_0) e^{\lambda(x_0+\frac{n}{2})}$$

- Or : $\overline{F}(x_0) \geq 0$. D'où : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \overline{F}(x_0) e^{\lambda(x_0+\frac{n}{2})} = +\infty$.

Par théorème de comparaison : $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\lambda(x_0+n)} \overline{F}(x_0+n) = +\infty$.

□

b) Justifier que pour tout λ strictement positif, la fonction $x \mapsto e^{\lambda x} \overline{F}(x)$ n'est pas bornée sur \mathbb{R}_+ .

Démonstration.

Soit $\lambda > 0$. On procède par l'absurde.

Supposons que la fonction $x \mapsto e^{\lambda x} \overline{F}(x)$ est bornée sur \mathbb{R}_+ .

Il existe alors $M \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}_+, 0 \leq e^{\lambda x} \overline{F}(x) \leq M$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$0 \leq e^{\lambda(x_0+n)} \overline{F}(x_0+n) \leq M$$

$$\text{Or, d'après la question précédente : } \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\lambda(x_0+n)} \overline{F}(x_0+n) = +\infty.$$

Absurde !

On en déduit, pour tout λ strictement positif, la fonction $x \mapsto e^{\lambda x} \overline{F}(x)$ n'est pas bornée sur \mathbb{R}_+ .

□

c) En raisonnant par l'absurde, montrer : $\liminf_{x \rightarrow +\infty} \frac{R(x)}{x} = 0$.

Démonstration.

On procède par l'absurde.

Supposons : $\liminf_{x \rightarrow +\infty} \frac{R(x)}{x} \neq 0$.

- On a démontré en question **8.a**) : $\forall x \in \mathbb{R}_+, R(x) \geq 0$. On en déduit :

$$\liminf_{x \rightarrow +\infty} \frac{R(x)}{x} > 0$$

D'après la question **8.**, la loi de X n'est pas à queue lourde.

- D'après la question **8.a**), il existe $x_0 > 0$ et $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $x \geq x_0$:

$$0 \leq \overline{F}(x) \leq e^{-\varepsilon x}$$

- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $0 < \lambda < \varepsilon$. On a déjà démontré en **8.c**), pour tout $x \geq x_0$:

$$0 \leq \overline{F}(x) e^{\lambda x} \leq e^{(\lambda-\varepsilon)x}$$

Comme $\lambda - \varepsilon < 0$, on en déduit : $e^{(\lambda-\varepsilon)x} \leq 1$. D'où :

$$0 \leq \overline{F}(x) e^{\lambda x} \leq 1$$

La fonction $x \mapsto \overline{F}(x) e^{\lambda x}$ est bornée sur $[x_0, +\infty[$.

- La fonction $x \mapsto \overline{F}(x) e^{\lambda x}$ est de plus continue sur le segment $[0, x_0]$.

Elle est donc bornée sur le segment $[0, x_0]$.

Finalement, la fonction $x \mapsto \overline{F}(x) e^{\lambda x}$ est bornée sur \mathbb{R}_+ .

Absurde! (d'après la question précédente)

Finalement : $\liminf_{x \rightarrow +\infty} \frac{R(x)}{x} = 0$.

Commentaire

On note $H : x \mapsto \overline{F}(x) e^{\lambda x}$. On utilise ici l'implication :

$$H \text{ bornée sur } [0, x_0] \text{ et sur } [x_0, +\infty[\Rightarrow H \text{ bornée sur } \mathbb{R}_+$$

Démonstrons la.

Supposons que la fonction H est bornée sur $[0, x_0]$ et sur $[x_0, +\infty[$.

- La fonction H est bornée sur $[0, x_0]$. On en déduit qu'il existe $M_1 \geq 0$ tel que :

$$\forall x \in [0, x_0], |H(x)| \leq M_1$$

- La fonction H est bornée sur $[x_0, +\infty[$. On en déduit qu'il existe $M_2 \geq 0$ tel que :

$$\forall x \in [x_0, +\infty[, |H(x)| \leq M_2$$

- On note alors $M = \max(M_1, M_2)$. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Deux cas se présentent :

× si $x \in [0, x_0]$, alors :

$$|H(x)| \leq M_1 \leq M$$

× si $x \in [x_0, +\infty[$, alors :

$$|H(x)| \leq M_2 \leq M$$

Finalement : $\forall x \in \mathbb{R}_+, |H(x)| \leq M$.

Autrement dit, la fonction H est bornée sur \mathbb{R}_+ . □

- d)** Conclure que toute loi à queue longue possède une queue lourde.

Démonstration.

Soit X une v.a.r. de loi à queue longue.

- D'après la question **11.** : $\liminf_{x \rightarrow +\infty} \frac{R(x)}{x} = 0$.
- On a de plus démontré en question **9.** :

$$\text{La loi de } X \text{ n'est pas à queue lourde} \Rightarrow \liminf_{x \rightarrow +\infty} \frac{R(x)}{x} > 0$$

Par contraposée, la loi de X est à queue lourde.

Toute loi à queue longue possède une queue lourde. □