DS7 (version B) /162

Exercice /37

Le but de cet exercice est la résolution de l'équation matricielle $AM = MB$, d'inconnue M, dans l'espace vectoriel E des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels.
On rappelle que si U_1, U_2, U_3, U_4 sont les matrices définies par :

$$U_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad U_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad U_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad U_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

la famille $(U_1,\ U_2,\ U_3,\ U_4)$ est une base de E, qui est donc de dimension 4.
Si A et B sont deux matrices de E, l'ensemble des matrices M de E vérifiant $AM = MB$ est noté $V_{A,B}$.

1. Soit A et B deux matrices de E et $\varphi_{A,B}$ l'application qui, à toute matrice M de E, associe la matrice $AM - MB$.

a) Montrer que $\varphi_{A,B}$ est un endomorphisme de E et en déduire que $V_{A,B}$ est un sous-espace vectoriel de E.

- **1 pt :** $\varphi_{A,B}$ **à valeurs dans** E
- **1 pt :** $\varphi_{A,B}$ **linéaire**
- **1 pt :** $V_{A,B} = \mathrm{Ker}(\varphi_{A,B})$ **donc c'est un e.v.**

b) Dans le cas particulier où $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, construire la matrice carrée d'ordre 4 qui représente $\varphi_{A,B}$ dans la base $(U_1,\ U_2,\ U_3,\ U_4)$.
Montrer que cette matrice est inversible et en déduire l'ensemble $V_{A,B}$.

- **4 pts :** $\mathrm{Mat}_{(U_1,U_2,U_3,U_4)}(\varphi_{A,B}(U_1)) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

  $\mathrm{Mat}_{(U_1,U_2,U_3,U_4)}(\varphi_{A,B}(U_2)) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

  $\mathrm{Mat}_{(U_1,U_2,U_3,U_4)}(\varphi_{A,B}(U_3)) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

  $\mathrm{Mat}_{(U_1,U_2,U_3,U_4)}(\varphi_{A,B}(U_4)) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$
- **2 pts :** $\mathrm{rg}(C) = 4$ **donc** C **inversible**
- **1 pt :** C **inversible donc** $\varphi_{A,B}$ **isomorphisme**
- **1 pt : on en déduit** $V_{A,B} = \{0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}\}$

2. Dans cette question, r et s désignent deux réels distincts et différents de 1, et on pose :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}$$

a) Soit $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ une matrice quelconque de E. Donner des conditions nécessaires et suffisantes sur x, y, z, t pour que M appartienne à $V_{D,\Delta}$.

- **1 pt :** $M \in V_{D,\Delta} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & x \\ y & = & s\,y \\ rz & = & z \\ rt & = & st \end{array} \right.$
- **1 pt :** $M \in V_{D,\Delta} \ \Leftrightarrow \ y = z = t = 0$ **car** $x \neq 1$**,** $r \neq 1$ **et** $t \neq 1$

b) En déduire une base de $V_{D,\Delta}$.

- **1 pt :** $V_{D,\Delta} = \text{Vect}\,(U_1)$
- **1 pt :** (U_1) **famille génératrice de** $V_{D,\Delta}$
- **1 pt :** (U_1) **famille libre**

3. Soit a, b, c, d des réels non nuls vérifiant $a - b \neq c - d$, $a - b \neq 1$, $c - d \neq 1$, A et B les matrices définies par :

$$A = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ b & 1-b \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} c & 1-c \\ d & 1-d \end{pmatrix}$$

a) Montrer que les valeurs propres de A sont 1 et $a-b$. En déduire qu'il existe une matrice inversible P de E, et une matrice D égale à celle de la question *2.* pour une valeur convenable de r, telles que l'on ait : $D = P^{-1}AP$.

- **1 pt :** $\text{rg}(A - I_2) = 1$ **donc** 1 **valeur propre de** A
- **1 pt :** $\text{rg}(A - (a-b)\,I_2) = 1$ **donc** $a - b$ **valeur propre de** A
- **1 pt :** A **diagonalisable (car matrice de** $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ **et admet** 2 **valeurs propres distinctes)**
- **1 pt : il existe** P **inversible telle que** $A = PDP^{-1}$ **où** $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a-b \end{pmatrix}$

b) Justifier de même l'existence d'une matrice inversible Q de E, et d'une matrice Δ égale à celle de la question *2.* pour une valeur convenable de s, telles que l'on ait : $\Delta \ = \ Q^{-1}\,B\,Q$.

- **1 pt :** $\text{Sp}(B) = \{1, c-d\}$
- **1 pt :** B **diagonalisable**
- **1 pt : il existe** Q **inversible telle que** $B = Q\Delta Q^{-1}$ **où** $\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c-d \end{pmatrix}$

c) Pour toute matrice M de E, montrer qu'elle appartient à $V_{A,B}$ si et seulement si la matrice $P^{-1}MQ$ appartient à $V_{D,\Delta}$. En déduire une base de $V_{A,B}$.

- **1 pt :** $M \in V_{A,B} \ \Leftrightarrow \ PDP^{-1}\,M = M\,Q\Delta Q^{-1}$
- **1 pt : multiplication à gauche par** P^{-1} **et à droite par** Q
- **1 pt :** $M \in V_{A,B} \ \Leftrightarrow \ P^{-1}MQ \in V_{D,\Delta}$
- **1 pt :** $P^{-1}MQ \in V_{D,\Delta} \ \Leftrightarrow \ \exists \alpha \in \mathbb{R},\ P^{-1}MQ = \alpha \cdot U_1$ **(d'après** ***2.b)*****)**
- **1 pt :** $\exists \alpha \in \mathbb{R}$**,** $P^{-1}MQ = \alpha \cdot U_1 \ \Leftrightarrow \ M \in \text{Vect}\left(P\,U_1\,Q^{-1}\right)$
- **1 pt :** $V_{A,B} = \text{Vect}\left(P\,U_1\,Q^{-1}\right)$ **donc** $(P\,U_1\,Q^{-1})$ **engendre** $V_{A,B}$
- **1 pt :** $(P\,U_1\,Q^{-1})$ **libre**

4. Dans cette question r, s et u, v désignent quatre réels vérifiant $r \neq s$, $r \neq v$, $u \neq s$, $u \neq v$, et on pose :

$$D = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Delta = \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}$$

a) Par une méthode analogue à celle de la question *2.*, déterminer $V_{D,\Delta}$.

- **1 pt :** $M \in V_{D,\Delta} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} ux & = & vx \\ uy & = & sy \\ rz & = & vz \\ rt & = & st \end{array} \right.$
- **1 pt :** $M \in V_{D,\Delta} \Leftrightarrow x = y = z = t = 0$ **(car** $u \neq v$**,** $u \neq s$**,** $r \neq v$ **et** $r \neq s$**)**
- **1 pt :** $V_{D,\Delta} = \{0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}\}$

b) En déduire, par une méthode analogue à celle de la question *3.*, le sous-espace vectoriel $V_{A,B}$ dans le cas où A et B sont deux matrices diagonalisables n'ayant aucune valeur propre commune.

- **1 pt :** A **diagonalisable donc il existe** P **inversible telle que** $A = PDP^{-1}$ **avec** $D = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}$
- **1 pt :** B **diagonalisable donc il existe** Q **inversible telle que** $B = Q\Delta Q^{-1}$ **avec** $\Delta = \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}$
- **1 pt :** $M \in V_{A,B} \Leftrightarrow M = 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}$
- **1 pt :** $V_{A,B} = \{0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}\}$

Problème /124

L'étude des propriétés asymptotiques des lois de probabilités est importante pour modéliser la façon dont une expérience aléatoire a une tendance plus ou moins forte à donner des résultats numériquement grands. On commence par introduire l'outil d'analyse asymptotique suivant.
Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on pose pour tout $h \in \mathbb{R}_+$:

$$\varphi_x(h) = \min_{u \in [x, x+h]} \big(f(u)\big)$$

On admet que $\varphi_x(h)$ admet une limite positive ou nulle quand h tend vers $+\infty$, notée Φ_x.
On admet qu'alors la fonction $x \mapsto \Phi_x$ admet une limite (qui peut être $+\infty$).
Cette limite est dite **limite inférieure de la fonction** f et est notée $\liminf\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
On admet de plus les deux résultats suivants.

(1) Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. On suppose : $\liminf\limits_{x \to +\infty} f(x) > 0$.
Alors il existe deux réels x_0 et ε strictements positifs tels que pour tout x supérieur ou égal à x_0, on a : $f(x) \geqslant \varepsilon$.

(2) Soient f et g deux fonctions continues de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ telles que $f(x) \geqslant g(x)$ pour tout x positif, et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \ell$ où ℓ est un réel positif.
Alors : $\liminf\limits_{x \to +\infty} f(x) \geqslant \ell$.

I - Lois sous-exponentielles

Dans ce problème, toutes les variables aléatoires sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. On notera comme d'habitude, sous réserve d'existence, $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$ l'espérance et la variance d'une variable aléatoire réelle X.
Si X est une variable aléatoire réelle positive de fonction de répartition F, on notera systématiquement $\overline{F}$ la queue de la répartition définie par : $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\overline{F}(x) = 1 - F(x) = \mathbb{P}([X > x])$.

1. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} p_X(n) & = & \mathbb{P}([X = n]) \\ p_Y(n) & = & \mathbb{P}([Y = n]) \\ p_{X+Y}(n) & = & \mathbb{P}([X + Y = n]) \end{array} \right.$$

Montrer, pour tout n entier naturel :

$$p_{X+Y}(n) \ = \ \sum_{k=0}^{n} p_X(k)\, p_Y(n-k)$$

- **1 pt : FPT sur le SCE** $([X = k])_{k\in\mathbb{N}}$
- **1 pt : découpage de la somme**
- **1 pt : indépendance de X et Y**

Par analogie, on **admettra** que si X et Y sont deux variables aléatoires réelles positives indépendantes, admettant respectivement les densités f_X et f_Y continues sur $\mathbb{R}_+$ et continues à droite en 0, la variable $X + Y$ admet une densité notée $f_X \star f_Y$ définie, pour x positif, par :

$$(f_X \star f_Y)(x) \ = \ \int_0^x f_X(u)\, f_Y(x-u)\ du$$

On notera F_{X+Y} la fonction de répartition de la variable aléatoire $X + Y$.

2. Soit λ un réel strictement positif et soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de paramètre λ. On note f une densité commune et F leur fonction de répartition. On prendra pour tout x positif ou nul : $f(x) = \lambda\, \mathrm{e}^{-\lambda x}$.

a) Expliciter, pour x positif, $F(x)$ et $\overline{F}(x)$.

- **1 pt : pour tout $x \geqslant 0$, $F(x) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}$**
- **1 pt : pour tout $x \geqslant 0$, $\overline{F}(x) = \mathrm{e}^{-\lambda x}$**

b) Calculer $(f \star f)(x)$ pour tout x positif.

- **2 pts : vérification des hypothèses (X et Y sont des v.a.r. positives, indépendantes, à densité continue sur $\mathbb{R}_+$, continues à droite en 0)**
- **2 pts : $(f \star f)(x) = \lambda^2\, x\, \mathrm{e}^{-\lambda x}$ (dont 1 pt pour : $\forall u \in [0, x]$, $u \geqslant 0$ et $x - u \geqslant 0$)**

c) En déduire $F_{X+Y}(x)$ pour tout x positif.

- **1 pt : comme f_{X+Y} densité de $X + Y$, $F_{X+Y}(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f_{X+Y}(t)\ dt$**
- **1 pt : $(X + Y)(\Omega) \subset [0, +\infty[$ donc f_{X+Y} nulle sur $]-\infty, 0[$**
- **1 pt : $F_{X+Y}(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f_{X+Y}(t)\ dt = \int_0^x f_{X+Y}(t)\ dt = \int_0^x (f \star f)(t)\ dt$**
- **1 pt : validité IPP ($u(t) = t$, $v(t) = -\dfrac{1}{\lambda}\, \mathrm{e}^{-\lambda t}$)**
- **1 pt : $F_{X+Y}(x) = 1 - (1 + \lambda\, x)\, \mathrm{e}^{-\lambda x}$**

d) Montrer :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\overline{F_{X+Y}}(x)}{\overline{F}(x)} \ = \ +\infty$$

- **1 pt : pour tout $x \geqslant 0$, $\dfrac{\overline{F_{X+Y}}(x)}{\overline{F}(x)} = 1 + \lambda\, x$**
- **1 pt : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\overline{F_{X+Y}}(x)}{\overline{F}(x)} = +\infty$**

3. Soit X une variable aléatoire positive de fonction de répartition F. On dit que la loi de X est **à support illimité à droite** si pour tout x positif : $\overline{F}(x) > 0$.
Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes positives, de même loi à support illimité à droite, de fonction de répartition commune F.

a) Montrer, pour tout x positif :

$$\overline{F_{X+Y}}(x) \ \geqslant\ \mathbb{P}([\max(X,Y) > x])$$

- **1 pt :** $[\max(X,Y) > x] \subset [X+Y > x]$ **car X et Y à valeurs positives**
- **1 pt :** $\overline{F_{X+Y}}(x) \ \geqslant\ \mathbb{P}([\max(X,Y) > x])$

b) Montrer : $\mathbb{P}([\max(X,Y) > x]) = 1 - \big(F(x)\big)^2$.

- **1 pt :** $[\max(X,Y) \leqslant x] = [X \leqslant x] \cap [Y \leqslant x]$
- **1 pt : indépendance de X et Y**
- **1 pt :** $\mathbb{P}([X \leqslant x])\ \mathbb{P}([Y \leqslant x]) = \big(F(x)\big)^2$ **car X et Y ont même loi**

c) Montrer : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1-\big(F(x)\big)^2}{\overline{F}(x)} = 2$.

- **1 pt :** $\dfrac{1-\big(F(x)\big)^2}{\overline{F}(x)} = \dfrac{1-\big(F(x)\big)^2}{1-F(x)} = 1 + F(x)$
- **1 pt :** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$ **car F est une fonction de répartition**

d) En déduire : $\displaystyle\liminf_{x\to+\infty} \frac{\overline{F_{X+Y}}(x)}{\overline{F}(x)} \geqslant 2$.

- **1 pt : d'après *3.a)* et *3.b)*,** $\overline{F_{X+Y}}(x) \geqslant 1 - \big(F(x)\big)^2$
- **1 pt : comme $\overline{F}(x) > 0$ (X à support illimité à droite),** $\dfrac{\overline{F_{X+Y}}(x)}{\overline{F}(x)} \geqslant \dfrac{1-\big(F(x)\big)^2}{\overline{F}(x)}$
- **3 pts : on applique le résultat admis *(2)* à** $f_1 : x \mapsto \dfrac{\overline{F_{X+Y}}(x)}{\overline{F}(x)}$ **et** $g_1 : x \mapsto \dfrac{1-\big(F(x)\big)^2}{\overline{F}(x)}$
  × **1 pt : f_1 et g_1 continues sur $\mathbb{R}_+$**
  × **1 pt : f_1 et g_1 à valeurs dans $\mathbb{R}_+$**
  × **1 pt : reste des hypothèses ($\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f_1(x) \geqslant g_1(x)$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g_1(x) = 2$)**

4. Soit X une variable aléatoire positive de fonction de répartition F. On suppose que la loi de X est à support illimité à droite. On dit que cette loi est **sous-exponentielle** si :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\overline{F_{X+Y}}(x)}{\overline{F}(x)} \ =\ 2$$

où, comme dans les notations précédentes, F_{X+Y} désigne la fonction de répartition de la somme des deux variables aléatoires réelles positives X et Y indépendantes, de même loi et de fonction de répartition F.
On considère alors deux variables aléatoires réelles positives indépendantes X et Y de même loi sous-exponentielle.

a) Montrer :

$$\lim_{x\to+\infty} \mathbb{P}_{[X+Y>x]}([X>x]) \;=\; \frac{1}{2}$$

- **1 pt :** $\mathbb{P}_{[X+Y>x]}([X>x]) = \dfrac{\mathbb{P}([X+Y>x]\cap[X>x])}{\mathbb{P}([X+Y>x])}$
- **1 pt :** $[X>x]\subset[X+Y>x]$ **car** $Y(\Omega)\subset\mathbb{R}_+$
- **1 pt :** $\mathbb{P}_{[X+Y>x]}([X>x]) = \dfrac{\mathbb{P}([X>x])}{\mathbb{P}([X+Y>x])} = \dfrac{\overline{F}(x)}{\overline{F_{X+Y}}(x)}$
- **1 pt :** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\overline{F}(x)}{\overline{F_{X+Y}}(x)} = \dfrac{1}{2}$ **car la loi de X est sous-exponentielle**

b) En déduire (en utilisant la question ***3.c)***) :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathbb{P}([X+Y>x])}{\mathbb{P}([\max(X,Y)>x])} \;=\; 1$$

- **1 pt :** $\dfrac{\mathbb{P}([X+Y>x])}{\mathbb{P}([\max(X,Y)>x])} = \dfrac{\mathbb{P}([X+Y>x])}{\mathbb{P}([X>x])} \times \dfrac{\mathbb{P}([X>x])}{\mathbb{P}([\max(X,Y)>x])}$
- **1 pt :** $\dfrac{\mathbb{P}([X>x])}{\mathbb{P}([\max(X,Y)>x])} = \dfrac{\overline{F}(x)}{1-\big(F(x)\big)^2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{2}$ **d'après *3.b)* et *3.c)***
- **1 pt :** $\dfrac{\mathbb{P}([X+Y>x])}{\mathbb{P}([X>x])} = \dfrac{\overline{F_{X+Y}}(x)}{\overline{F}(x)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 2$ **d'après la question précédente**

c) Démontrer l'égalité :

$$\mathbb{P}([X+Y>x]) \;=\; \mathbb{P}([X+Y>x]\cap[\max(X,Y)\leqslant x]) + \mathbb{P}([\max(X,Y)>x])$$

- **1 pt : FPT sur le SCE** $([\max(X,Y)\leqslant x]\,,[\max(X,Y)>x])$
- **1 pt :** $[\max(X,Y)>x]\subset[X+Y>x]$ **donc** $\mathbb{P}([X+Y>x]\cap[\max(X,Y)>x]) = \mathbb{P}([\max(X,Y)>x])$

d) Conclure :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathbb{P}([X+Y>x]\cap[\max(X,Y)\leqslant x])}{\mathbb{P}([\max(X,Y)>x])} \;=\; 0$$

- **1 pt :** $\dfrac{\mathbb{P}([X+Y>x]\cap[\max(X,Y)\leqslant x])}{\mathbb{P}([\max(X,Y)>x])} = \dfrac{\mathbb{P}([X+Y>x])}{\mathbb{P}([\max(X,Y)>x])} - 1$ **d'après la question précédente**
- **1 pt :** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathbb{P}([X+Y>x])}{\mathbb{P}([\max(X,Y)>x])} = 1$ **d'après *4.b)***

e) Interpréter le résultat précédent.

- **1 pt :** $\dfrac{\mathbb{P}([X+Y>x]\cap[\max(X,Y)\leqslant x])}{\mathbb{P}([\max(X,Y)>x])} = \dfrac{\mathbb{P}([X+Y>x]\cap[\max(X,Y)\leqslant x])}{\mathbb{P}([X+Y>x]\cap[\max(X,Y)>x])}$
- **1 pt :** $\dfrac{\mathbb{P}([X+Y>x]\cap[\max(X,Y)\leqslant x])}{\mathbb{P}([X+Y>x]\cap[\max(X,Y)>x])} = \dfrac{\mathbb{P}_{[X+Y>x]}([\max(X,Y)\leqslant x])}{\mathbb{P}_{[X+Y>x]}([\max(X,Y)>x])}$
- **1 pt : toute interprétation pertinente**

II - Problèmes de queues

Soit f une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$ que l'on suppose nulle sur $\mathbb{R}_-^*$ et continue sur $\mathbb{R}_+^*$, et F la fonction de répartition associée. On dit que la loi de probabilité définie par la densité f possède **une loi à queue lourde** si pour tout λ strictement positif, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\, e^{\lambda\, x}\, dx$ est divergente, c'est-à-dire que pour tout réel $\lambda > 0$:

$$\lim_{a \to +\infty} \int_1^a f(x)\, e^{\lambda\, x}\, dx \ = \ +\infty$$

5. Soit X une variable aléatoire de densité f. Montrer que si la loi de X est à queue lourde, elle est à support illimité à droite.

- **1 pt : structure raisonnement par contraposée**
- **1 pt : si X n'est pas à support illimité à droite, alors il existe $x_0 \geqslant 0$ tel que $\mathbb{P}([X > x_0]) = 0$, donc $\mathbb{P}([X \leqslant x_0]) = 1$.**
- **2 pts : $\mathbb{P}([X \leqslant x_0]) = 1$ donc f_X est nulle sur $[x_0, +\infty[$.**
- **2 pts : pour $\lambda = 1$ (par exemple), $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\, e^{x}\, dx = \begin{cases} 0 & \text{si } x_0 < 1 \\ \displaystyle\int_1^{x_0} f(x)\, e^{x}\, dx & \text{si } x_0 \geqslant 1 \end{cases}$,**

  donc converge

  -1 si confusion $\forall$ / $\exists$

6. Étude de quelques lois particulières :

a) Une loi exponentielle est-elle à queue lourde ?

- **1 pt : si $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\mu)$, alors : $\forall x \in [0, +\infty[$, $f(x) = \mu\, e^{-\mu\, x}$**
- **3 pts : en choisissant $\lambda = \dfrac{\mu}{2}$, on obtient : $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\, e^{\frac{\mu}{2}\, x}\, dx$ converge**
  - × **1 pt : choix de λ**
  - × **2 pts : $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\, e^{\lambda\, x}\, dx$ converge**

b) Soit f la fonction d'expression $f(x) = \dfrac{1}{(1+x)^2}$ si x positif ou nul et $f(x) = 0$ si x est strictement négatif.

(i) Montrer que f est une densité de probabilité.

- **1 pt : f continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0**
- **1 pt : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geqslant 0$**
- **2 pts : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx$ converge et vaut 1**
  - × **1 pt : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = \int_0^{+\infty} f(x)\, dx$ car f est nulle en dehors de $[0, +\infty[$**
  - × **1 pt : $\displaystyle\int_0^{B} \frac{1}{(1+x)^2}\, dx = 1 - \frac{1}{1+B} \underset{B \to +\infty}{\longrightarrow} 1$**

(ii) Soit λ strictement positif. Justifier l'existence d'un réel positif x_0 tel que pour tout x supérieur ou égal à x_0, on ait : $\dfrac{e^{\lambda\, x}}{(1+x)^2} \geqslant 1$.

- **1 pt : $\dfrac{e^{\lambda\, x}}{(1+x)^2} \underset{x \to +\infty}{\sim} \dfrac{e^{\lambda\, x}}{x^2} = \lambda^2\, \dfrac{e^{\lambda\, x}}{(\lambda\, x)^2}$**

- **1 pt :** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\lambda\, x}}{(\lambda\, x)^2} = +\infty$ **par croissances comparées, donc :** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\lambda\, x}}{(1+x)^2} = +\infty$
- **1 pt : par définition de la limite, il existe** $x_0 > 0$ **tel que :** $\forall x \geqslant x_0$, $\dfrac{\mathrm{e}^{\lambda\, x}}{(1+x)^2} \geqslant 1$

(iii) En déduire que la loi définie par f est à queue lourde.

- **1 pt :** $x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{\lambda\, x}}{(1+x)^2}$ **continue sur** $[1, +\infty[$
- **1 pt :** $\forall x > x_0$, $0 \leqslant \dfrac{1}{x^0} \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^{\lambda\, x}}{(1+x)^2}$
- **1 pt :** $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^0}\, dx$ **divergente**
- **1 pt :** $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\lambda\, x}}{(1+x)^2}\, dx$ **diverge par critère de comparaision d'intégrales de fonctions continues positives, donc** X **à queue lourde**

c) Soit Z une variable aléatoire de loi normale centrée réduite et X la variable aléatoire définie par $X = \mathrm{e}^Z$.

(i) Déterminer une densité f de X.

- **1 pt :** $X(\Omega) \subset \,]0, +\infty[$
- **3 pts :** $F_X : x \mapsto \begin{cases} 0 & \textbf{si } x \in \,]-\infty, 0] \\ \Phi\big(\ln(x)\big) & \textbf{si } x \in \,]0, +\infty[\end{cases}$
  - × **1 pt : cas** $x \leqslant 0$
  - × **2 pts : cas** $x > 0$ **(dont 1 pt pour la stricte croissance de** $\ln$ **sur** $]0, +\infty[$**)**
- **3 pts :** X **est une v.a.r. à densité**
  - × **2 pts :** F_X **continue sur** $\mathbb{R}$
  - × **1 pt :** F_X **de classe** $\mathcal{C}^1$ **sur** $\mathbb{R}$ **sauf éventuellement en** 0
- **3 pts :** $f_X : x \mapsto \begin{cases} 0 & \textbf{si } x \in \,]-\infty, 0] \\ \dfrac{1}{x\,\sqrt{2\,\pi}}\, \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\, \left(\ln(x)\right)^2} & \textbf{si } x > 0 \end{cases}$
  - × **1 pt : cas** $x \in \,]-\infty, 0[$
  - × **1 pt : cas** $x \in \,]0, +\infty[$
  - × **1 pt : choix** $f_X(0)$

-1 si la dérivation n'est pas effectuée sur des ouverts

(ii) Soit λ strictement positif. Que vaut $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\lambda\, x - \frac{1}{2}\, \big(\ln(x)\big)^2 - \ln(x)\right)$?

- **1 pt :** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\lambda\, x - \frac{1}{2}\, \big(\ln(x)\big)^2 - \ln(x)\right) = +\infty$ **par croissances comparées** *(iii)* En déduire qu'il existe un réel x_0 strictement positif tel que :

$$\forall x \geqslant x_0,\ f(x)\,\mathrm{e}^{\lambda\, x} \geqslant 1$$

- **1 pt :** $f(x)\,\mathrm{e}^{\lambda\, x} = \dfrac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\ \mathrm{e}^{\lambda\, x - \frac{1}{2}\ \left(\ln(x)\right)^2 - \ln(x)}$
- **1 pt :** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\,\mathrm{e}^{\lambda\, x} = +\infty$ **d'après la question précédente (+ composition de limites)**
- **1 pt : par définition de la limite, il existe** $x_0 > 0$ **tel que :** $\forall x \geqslant x_0$**,** $f(x)\,\mathrm{e}^{\lambda\, x} \geqslant 1$

(iv) En déduire que la loi de X est à queue lourde.

- **1 pt :** $x \mapsto f(x)\,\mathrm{e}^{\lambda\, x}$ **continue sur** $[1,+\infty[$
- **1 pt :** $\forall x \geqslant x_0$**,** $0 \leqslant \dfrac{1}{x^0} \leqslant f(x)\,\mathrm{e}^{\lambda\, x}$
- **1 pt : par critère de comparaison,** $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{e}^{\lambda\, x}\ dx$ **diverge, donc** X **est à queue lourde**

On désigne désormais par X une variable aléatoire positive de loi à support illimité à droite et admettant une densité f continue sur $\mathbb{R}_+^*$, et continue à droite en 0. On note F la fonction de répartition associée. On pose alors : $r(x) = \dfrac{f(x)}{\overline{F}(x)}$ et $R(x) = -\ln\left(\overline{F}(x)\right)$, pour x positif.

7. Montrer :

$$\overline{F}(x) \ = \ \exp\left(-\int_0^x \ r(y)\ dy\right)$$

- **2 pts :** $F(0) = 0$
  - × **1 pt :** $X(\Omega) \subset [0,+\infty[$
  - × **1 pt :** F **continue en** 0
- **1 pt :** R **dérivable sur** $]0,+\infty[$ **et dérivable à droite en** 0
- **1 pt :** $\forall x \in \mathbb{R}_+$**,** $R'(x) = r(x)$
- **1 pt :** $\exp\left(-\displaystyle\int_0^x \ r(y)\ dy\right) = \overline{F}(x)$

8. On suppose : $\liminf\limits_{x\to+\infty} \dfrac{R(x)}{x} > 0$.

a) Montrer qu'il existe deux réels x_0 et ε strictement positifs tels que pour tout x supérieur ou égal à x_0 : $\overline{F}(x) \leqslant \mathrm{e}^{-\varepsilon\, x}$.

- **2 pts :** $g : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{R(x)}{x} & \textbf{si } x \in\ ]0,+\infty[\\ r(0) & \textbf{si } x = 0 \end{cases}$ **continue sur** $\mathbb{R}_+$
  - × **1 pt :** g **continue sur** $]0,+\infty[$
  - × **1 pt :** g **continue à droite en** 0 **(car** R **dérivable à droite en** 0**)**
- **1 pt :** $x \mapsto \dfrac{R(x)}{x}$ **à valeurs dans** $\mathbb{R}_+$
- **1 pt : application du résultat *(1)* de l'énoncé : il existe** $x_0 > 0$ **et** $\varepsilon > 0$ **tels que :** $\forall x \geqslant x_0$**,** $\dfrac{R(x)}{x} \geqslant \varepsilon$
- **1 pt :** $\overline{F}(x) \leqslant \mathrm{e}^{-\varepsilon\, x}$ **par croissance de la fonction** $\exp$ **sur** $\mathbb{R}$

b) Soit λ tel que : $0 < \lambda < \varepsilon$. Soit A strictement positif donné. Montrer :

$$\int_0^A \mathrm{e}^{\lambda\, x}\, f(x)\, dx \;=\; 1 - \overline{F}(A)\, \mathrm{e}^{\lambda\, A} + \lambda \int_0^A \mathrm{e}^{\lambda\, x}\, \overline{F}(x)\, dx$$

- **1 pt : $u : x \mapsto \mathrm{e}^{\lambda\, x}$ et $v : x \mapsto -\overline{F}(x)$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, A]$**
- **1 pt : IPP**

c) Conclure que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{\lambda\, x}\, f(x)\, dx$ converge et que la loi de X n'est pas à queue lourde.

- **1 pt : $0 \leqslant \overline{F}(A)\, \mathrm{e}^{\lambda\, A} \leqslant \mathrm{e}^{(\lambda-\varepsilon)A}$ d'après *8.a)***
- **1 pt : par théorème d'encadrement : $\lim\limits_{A\to+\infty} \overline{F}(A)\, \mathrm{e}^{\lambda\, A} = 0$ car $\lambda < \varepsilon$**
- **1 pt : $0 \leqslant \overline{F}(x)\, \mathrm{e}^{\lambda\, x} \leqslant \mathrm{e}^{-(\varepsilon-\lambda)x}$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(\varepsilon-\lambda)x}\, dx$ converge car $\lambda < \varepsilon$**
- **1 pt : par critère de comparaison d'intégrales de fonctions continues positives, $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\, \mathrm{e}^{\lambda\, x}\, dx$ converge**
- **1 pt : choix de $\lambda = \dfrac{\varepsilon}{2}$ (par exemple) pour conclure que la loi de X n'est pas à queue lourde**

9. On rappelle l'inégalité de Markov : si Z est une variable aléatoire positive admettant une espérance $\mathbb{E}(Z)$, alors pour tout α strictement positif, on a :

$$\mathbb{P}([Z > \alpha]) \;\leqslant\; \frac{1}{\alpha}\, \mathbb{E}(Z)$$

On suppose maintenant que la loi de X n'est pas à queue lourde.

a) Montrer qu'il existe λ strictement positif tel que $c = \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\lambda\, X}\right)$ existe.

- **1 pt : par Th. de transfert, $\mathrm{e}^{\lambda\, X}$ admet une espérance ssi $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, \mathrm{e}^{\lambda\, x}\, dx$ converge absolument, ce qui équivaut à $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, \mathrm{e}^{\lambda\, x}\, dx$ converge car $x \mapsto f(x)\, \mathrm{e}^{\lambda\, x}$ positive**
- **1 pt : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, \mathrm{e}^{\lambda\, x}\, dx = \int_0^{+\infty} f(x)\, \mathrm{e}^{\lambda\, x}\, dx$ car f nulle en dehors de $[0, +\infty[$**
- **1 pt : loi de X pas à queue lourde, donc il existe $\lambda > 0$ tel que $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\, \mathrm{e}^{\lambda\, x}\, dx$ converge, donc tel que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\, \mathrm{e}^{\lambda\, x}\, dx$ converge**

b) Soit x strictement positif. Montrer : $\overline{F}(x) \leqslant c \cdot \mathrm{e}^{-\lambda\, x}$.

- **1 pt : $\mathbb{P}([X > x]) = \mathbb{P}(\left[\mathrm{e}^{\lambda\, X} > \mathrm{e}^{\lambda\, x}\right])$ car $\exp$ strictement croissante sur $\mathbb{R}$**
- **1 pt : inégalité de Markov applicable ($\mathrm{e}^{\lambda\, X}$ à valeurs positives et admet une espérance d'après la question précédente)**
- **1 pt : application inégalité de Markov : $\mathbb{P}(\left[\mathrm{e}^{\lambda\, X} > \mathrm{e}^{\lambda\, x}\right]) \leqslant \dfrac{\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\lambda\, X}\right)}{\mathrm{e}^{\lambda\, x}}$**

c) Montrer : $\liminf\limits_{x\to+\infty} \dfrac{R(x)}{x} \geqslant \lambda > 0$.

- **1 pt : d'après qst précédente $\overline{F}(x) \leqslant c\,\mathrm{e}^{-\lambda x}$, donc** $\dfrac{R(x)}{x} \geqslant \lambda - \dfrac{\ln(c)}{x}$
- **1 pt :** $\lim\limits_{x\to+\infty} \lambda - \dfrac{\ln(c)}{x} = \lambda$
- **1 pt :** g **et** $x \mapsto \lambda - \dfrac{\ln(c)}{x}$ **continues sur** $]0,+\infty[$
- **1 pt :** g **et** $x \mapsto \lambda - \dfrac{\ln(c)}{x}$ **à valeurs dans** $\mathbb{R}_+$ **(sur** $\left[\dfrac{\ln(c)}{\lambda}, +\infty\right[$**)**
- **1 pt : par application du résultat *(2)* de l'énoncé :** $\liminf\limits_{x\to+\infty} \dfrac{R(x)}{x} \geqslant \lambda > 0$

La condition $\liminf\limits_{x\to+\infty} \dfrac{R(x)}{x} = 0$ n'est pas forcément très agréable à vérifier pour prouver qu'une loi possède une queue lourde. De ce fait, on introduit une autre notion plus simple dont on va montrer qu'elle suffit à assurer cette propriété.

10. Soit X une variable aléatoire positive de fonction de répartition F. On dit que la loi de X possède une **queue longue** si pour tout réel ε strictement positif, il existe un réel A strictement positif tel que pour tout réel x supérieur ou égal à A, et tout réel y appartenant à $[0,1]$, on a :

$$\left| \frac{\overline{F}(x+y)}{\overline{F}(x)} - 1 \right| \ < \ \varepsilon$$

Dans la suite, F désigne la fonction de répartition d'une variable aléatoire X qui suit une telle loi.

a) Montrer, pour tout y de $[0,1]$: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\overline{F}(x+y)-\overline{F}(x)}{\overline{F}(x)} = 0$.

- **1 pt : l'hypothèse de l'énoncé est la définition de :** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\overline{F}(x+y)}{\overline{F}(x)} = 1$
- **1 pt :** $\dfrac{\overline{F}(x+y)-\overline{F}(x)}{\overline{F}(x)} = \dfrac{\overline{F}(x+y)}{\overline{F}(x)} - 1 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

b) En déduire : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{F(x+y)-F(x)}{\overline{F}(x)} = 0$.

- **1 pt :** $\dfrac{\overline{F}(x+y)-\overline{F}(x)}{\overline{F}(x)} = -\dfrac{F(x+y)-F(x)}{\overline{F}(x)}$

c) Montrer, pour tout y de $[0,1]$:

$$\lim_{x\to+\infty} \mathbb{P}_{[X>x]}([X > x+y]) = 1$$

- **1 pt :** $\mathbb{P}_{[X>x]}([X > x+y]) = \dfrac{\mathbb{P}([X>x]\cap[X>x+y])}{\mathbb{P}([X>x])} = \dfrac{\mathbb{P}([X>x+y])}{\mathbb{P}([X>x])} = \dfrac{\overline{F}(x+y)}{\overline{F}(x)}$
- **1 pt :** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\overline{F}(x+y)}{\overline{F}(x)} = 1$ **d'après l'énoncé**

d) Montrer : $\lim\limits_{x\to+\infty} R(x+1) - R(x) = 0$.

- **1 pt :** $R(x+1) - R(x) = -\ln\left(\dfrac{\overline{F}(x+1)}{\overline{F}(x)}\right)$
- **1 pt :** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\overline{F}(x+1)}{\overline{F}(x)} = 1$ **d'après *10.a)* en** $y=1$
- **1 pt :** $\ln$ **continue en** 1

11. Soit F la fonction de répartition d'une variable aléatoire de loi à queue longue.

a) Soit λ strictement positif fixé.

(i) Montrer qu'il existe x_0 positif tel que pour tout x supérieur ou égal à x_0 et pour tout y de $[0,1]$, on a :

$$\overline{F}(x+y) \ \geqslant\ \overline{F}(x)\,\mathrm{e}^{-\frac{\lambda}{2}}$$

<u>Indication</u> : On utilisera la définition de fonction de répartition d'une variable aléatoire qui suit une loi à queue longue donnée à la question précédente avec une valeur précise de ε que l'on explicitera.

- **1 pt : X à queue longue donc il existe $A > 0$ tel que, pour tout $x \geqslant A$, pour tout $y \in [0,1]$:** $\left|\dfrac{\overline{F}(x+y)}{\overline{F}(x)} - 1\right| < \varepsilon$
- **1 pt :** $\left|\dfrac{\overline{F}(x+y)}{\overline{F}(x)} - 1\right| < \varepsilon$ **donc** $\overline{F}(x)(1-\varepsilon) \leqslant \overline{F}(x+y) \leqslant \overline{F}(x)(1+\varepsilon)$
- **1 pt :** $\varepsilon = 1 - \mathbf{e}^{-\frac{\lambda}{2}} > 0$

(ii) Montrer, pour tout entier naturel non nul n :

$$\overline{F}(x_0+n) \ \geqslant\ \overline{F}(x_0)\,\mathrm{e}^{-\lambda\,\frac{n}{2}}$$

- **3 pts :** $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\overline{F}(x_0+n) \geqslant \overline{F}(x_0)\,\mathbf{e}^{-\frac{n\,\lambda}{2}}$ **par récurrence**
  - × **1 pt : initialisation**
  - × **2 pts : hérédité**

(iii) En déduire : $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{\lambda\,(x_0+n)}\,\overline{F}(x_0+n) = +\infty$.

- **1 pt :** $0 \leqslant \left(\overline{F}(x_0)\,\mathbf{e}^{\lambda\,x_0}\right)\ \mathbf{e}^{n\,\frac{\lambda}{2}}$
- **1 pt : par théorème de comparaison** $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{e}^{\lambda\,(x_0+n)}\,\overline{F}(x_0+n) = +\infty$

b) Justifier que pour tout λ strictement positif, la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{\lambda\,x}\,\overline{F}(x)$ n'est pas bornée sur $\mathbb{R}_+$.

- **1 pt : raisonnement par l'absurde**
- **1 pt : utilisation qst précédente**

c) En raisonnant par l'absurde, montrer : $\liminf\limits_{x\to+\infty} \dfrac{R(x)}{x} = 0$.

- **1 pt : si** $\liminf\limits_{x\to+\infty} \dfrac{R(x)}{x} \neq 0$, **alors** $\liminf\limits_{x\to+\infty} \dfrac{R(x)}{x} > 0$ **car R à valeurs positives**
- **1 pt : d'après qst *8.* X n'est donc pas à queue lourde**
- **1 pt : d'après démonstration de *8.c)* : pour $0 < \lambda < \varepsilon$, pour tout $x \geqslant x_0$,** $0 \leqslant \overline{F}(x)\,\mathbf{e}^{\lambda\,x} \leqslant \mathbf{e}^{-(\varepsilon-\lambda)\,x} \leqslant 1$
- **1 pt : absurde car $x \mapsto \mathbf{e}^{\lambda\,x}\,\overline{F}(x)$ n'est pas bornée sur $\mathbb{R}_+$**

d) Conclure que toute loi à queue longue possède une queue lourde.

- **1 pt : d'après les qsts *11.a)* à *11.c)*, si X à queue longue, alors** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{R(x)}{x} = 0$
- **1 pt : d'après qst *9.* (contraposée), on en déduit que X à queue lourde**