DS7 (version B)

Exercice

Le but de cet exercice est la résolution de l'équation matricielle $AM = MB$, d'inconnue M, dans l'espace vectoriel E des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels.
On rappelle que si U_1, U_2, U_3, U_4 sont les matrices définies par :

$$U_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad U_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad U_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad U_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

la famille $(U_1,\ U_2,\ U_3,\ U_4)$ est une base de E, qui est donc de dimension 4.
Si A et B sont deux matrices de E, l'ensemble des matrices M de E vérifiant $AM = MB$ est noté $V_{A,B}$.

1. Soit A et B deux matrices de E et $\varphi_{A,B}$ l'application qui, à toute matrice M de E, associe la matrice $AM - MB$.

a) Montrer que $\varphi_{A,B}$ est un endomorphisme de E et en déduire que $V_{A,B}$ est un sous-espace vectoriel de E.

b) Dans le cas particulier où $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, construire la matrice carrée d'ordre 4 qui représente $\varphi_{A,B}$ dans la base $(U_1,\ U_2,\ U_3,\ U_4)$.
Montrer que cette matrice est inversible et en déduire l'ensemble $V_{A,B}$.

2. Dans cette question, r et s désignent deux réels distincts et différents de 1, et on pose :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}$$

a) Soit $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ une matrice quelconque de E. Donner des conditions nécessaires et suffisantes sur x, y, z, t pour que M appartienne à $V_{D,\Delta}$.

b) En déduire une base de $V_{D,\Delta}$.

3. Soit a, b, c, d des réels non nuls vérifiant $a - b \neq c - d$, $a - b \neq 1$, $c - d \neq 1$, A et B les matrices définies par :

$$A = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ b & 1-b \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} c & 1-c \\ d & 1-d \end{pmatrix}$$

a) Montrer que les valeurs propres de A sont 1 et $a-b$. En déduire qu'il existe une matrice inversible P de E, et une matrice D égale à celle de la question ***2.*** pour une valeur convenable de r, telles que l'on ait : $D = P^{-1}AP$.

b) Justifier de même l'existence d'une matrice inversible Q de E, et d'une matrice Δ égale à celle de la question ***2.*** pour une valeur convenable de s, telles que l'on ait : $\Delta = Q^{-1}BQ$.

c) Pour toute matrice M de E, montrer qu'elle appartient à $V_{A,B}$ si et seulement si la matrice $P^{-1}MQ$ appartient à $V_{D,\Delta}$. En déduire une base de $V_{A,B}$.

4. Dans cette question r, s et u, v désignent quatre réels vérifiant $r \neq s$, $r \neq v$, $u \neq s$, $u \neq v$, et on pose :

$$D = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Delta = \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}$$

a) Par une méthode analogue à celle de la question ***2.***, déterminer $V_{D,\Delta}$.

b) En déduire, par une méthode analogue à celle de la question ***3.***, le sous-espace vectoriel $V_{A,B}$ dans le cas où A et B sont deux matrices diagonalisables n'ayant aucune valeur propre commune.

Problème

L'étude des propriétés asymptotiques des lois de probabilités est importante pour modéliser la façon dont une expérience aléatoire a une tendance plus ou moins forte à donner des résultats numériquement grands. On commence par introduire l'outil d'analyse asymptotique suivant.
Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on pose pour tout $h \in \mathbb{R}_+$: $\varphi_x(h) = \min\limits_{u \in [x,x+h]} \big(f(u)\big)$. On admet que $\varphi_x(h)$ admet une limite positive ou nulle quand h tend vers $+\infty$, notée Φ_x. On admet qu'alors la fonction $x \mapsto \Phi_x$ admet une limite (qui peut être $+\infty$). Cette limite est dite **limite inférieure de la fonction** f et est notée $\liminf\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
On admet de plus les deux résultats suivants.

- Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. On suppose : $\liminf\limits_{x \to +\infty} f(x) > 0$.
  Alors il existe deux réels x_0 et ε strictements positifs tels que pour tout x supérieur ou égal à x_0, on a : $f(x) \geqslant \varepsilon$.
- Soient f et g deux fonctions continues de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ telles que $f(x) \geqslant g(x)$ pour tout x positif, et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \ell$ où ℓ est un réel positif.
  Alors : $\liminf\limits_{x \to +\infty} f(x) \geqslant \ell$.

I - Lois sous-exponentielles

Dans ce problème, toutes les variables aléatoires sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. On notera comme d'habitude, sous réserve d'existence, $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$ l'espérance et la variance d'une variable aléatoire réelle X.
Si X est une variable aléatoire réelle positive de fonction de répartition F, on notera systématiquement $\overline{F}$ la queue de la répartition définie par : $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\overline{F}(x) = 1 - F(x) = \mathbb{P}([X > x])$.

1. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} p_X(n) & = & \mathbb{P}([X = n]) \\ p_Y(n) & = & \mathbb{P}([Y = n]) \\ p_{X+Y}(n) & = & \mathbb{P}([X + Y = n]) \end{array} \right.$$

Montrer, pour tout n entier naturel :

$$p_{X+Y}(n) = \sum_{k=0}^{n} p_X(k)\, p_Y(n-k)$$

Par analogie, on **admettra** que si X et Y sont deux variables aléatoires réelles positives indépendantes, admettant respectivement les densités f_X et f_Y continues sur $\mathbb{R}_+$ et continues à droite en 0, la variable $X + Y$ admet une densité notée $f_X \star f_Y$ définie, pour x positif, par :

$$(f_X \star f_Y)(x) = \int_0^x f_X(u)\, f_Y(x-u)\, du$$

On notera F_{X+Y} la fonction de répartition de la variable aléatoire $X + Y$.

2. Soit λ un réel strictement positif et soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de paramètre λ. On note f une densité commune et F leur fonction de répartition. On prendra pour tout x positif ou nul : $f(x) = \lambda\, \mathrm{e}^{-\lambda\, x}$.

a) Expliciter, pour x positif, $F(x)$ et $\overline{F}(x)$.

b) Calculer $(f \star f)(x)$ pour tout x positif.

c) En déduire $F_{X+Y}(x)$ pour tout x positif.

d) Montrer :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\overline{F_{X+Y}}(x)}{\overline{F}(x)} \ = \ +\infty$$

3. Soit X une variable aléatoire positive de fonction de répartition F. On dit que la loi de X est **à support illimité à droite** si pour tout x positif : $\overline{F}(x) > 0$.
Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes positives, de même loi à support illimité à droite, de fonction de répartition commune F.

a) Montrer, pour tout x positif :

$$\overline{F_{X+Y}}(x) \ \geqslant \ \mathbb{P}([\max(X,Y) > x])$$

b) Montrer : $\mathbb{P}([\max(X,Y) > x]) = 1 - \big(F(x)\big)^2$.

c) Montrer : $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{1 - \big(F(x)\big)^2}{\overline{F}(x)} = 2$.

d) En déduire : $\displaystyle\liminf_{x \to +\infty} \frac{\overline{F_{X+Y}}(x)}{\overline{F}(x)} \geqslant 2$.

4. Soit X une variable aléatoire positive de fonction de répartition F. On suppose que la loi de X est à support illimité à droite. On dit que cette loi est **sous-exponentielle** si :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\overline{F_{X+Y}}(x)}{\overline{F}(x)} \ = \ 2$$

où, comme dans les notations précédentes, F_{X+Y} désigne la fonction de répartition de la somme des deux variables aléatoires réelles positives X et Y indépendantes, de même loi et de fonction de répartition F.
On considère alors deux variables aléatoires réelles positives indépendantes X et Y de même loi sous-exponentielle.

a) Montrer :

$$\lim_{x \to +\infty} \mathbb{P}_{[X+Y>x]}([X > x]) \ = \ \frac{1}{2}$$

b) En déduire (en utilisant la question ***3.c)***) :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\mathbb{P}([X+Y > x])}{\mathbb{P}([\max(X,Y) > x])} \ = \ 1$$

c) Démontrer l'égalité :

$$\mathbb{P}([X+Y > x]) \ = \ \mathbb{P}([X+Y > x] \cap [\max(X,Y) \leqslant x]) + \mathbb{P}([\max(X,Y) > x])$$

d) Conclure :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\mathbb{P}([X+Y > x] \cap [\max(X,Y) \leqslant x])}{\mathbb{P}([\max(X,Y) > x])} \ = \ 0$$

e) Interpréter le résultat précédent.

II - Problèmes de queues

Soit f une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$ que l'on suppose nulle sur $\mathbb{R}_-^*$ et continue sur $\mathbb{R}_+^*$, et F la fonction de répartition associée. On dit que la loi de probabilité définie par la densité f possède **une loi à queue lourde** si pour tout λ strictement positif, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{e}^{\lambda\, x}\,dx$ est divergente, c'est-à-dire que pour tout réel $\lambda > 0$:

$$\lim_{a\to+\infty} \int_1^a f(x)\,\mathrm{e}^{\lambda\, x}\,dx \;=\; +\infty$$

5. Soit X une variable aléatoire de densité f. Montrer que si la loi de X est à queue lourde, elle est à support illimité à droite.

6. Étude de quelques lois particulières :

a) Une loi exponentielle est-elle à queue lourde ?

b) Soit f la fonction d'expression $f(x) = \dfrac{1}{(1+x)^2}$ si x positif ou nul et $f(x) = 0$ si x est strictement négatif.

(i) Montrer que f est une densité de probabilité.

(ii) Soit λ strictement positif. Justifier l'existence d'un réel positif x_0 tel que pour tout x supérieur ou égal à x_0, on ait : $\dfrac{\mathrm{e}^{\lambda\, x}}{(1+x)^2} \geqslant 1$.

(iii) En déduire que la loi définie par f est à queue lourde.

c) Soit Z une variable aléatoire de loi normale centrée réduite et X la variable aléatoire définie par $X = \mathrm{e}^Z$.

(i) Déterminer une densité f de X.

(ii) Soit λ strictement positif. Que vaut $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\lambda\, x - \frac{1}{2}\, \big(\ln(x)\big)^2 - \ln(x)\right)$?

(iii) En déduire qu'il existe un réel x_0 strictement positif tel que :

$$\forall x \geqslant x_0,\;\; f(x)\,\mathrm{e}^{\lambda\, x} \geqslant 1$$

(iv) En déduire que la loi de X est à queue lourde.

On désigne désormais par X une variable aléatoire positive de loi à support illimité à droite et admettant une densité f continue sur $\mathbb{R}_+^*$, et continue à droite en 0. On note F la fonction de répartition associée. On pose alors : $r(x) = \dfrac{f(x)}{\overline{F}(x)}$ et $R(x) = -\ln\big(\overline{F}(x)\big)$, pour x positif.

7. Montrer :

$$\overline{F}(x) \;=\; \exp\left(-\int_0^x r(y)\,dy\right)$$

8. On suppose : $\displaystyle\liminf_{x\to+\infty} \frac{R(x)}{x} > 0$.

a) Montrer qu'il existe deux réels x_0 et ε strictement positifs tels que pour tout x supérieur ou égal à x_0 : $\overline{F}(x) \leqslant \mathrm{e}^{-\varepsilon\, x}$.

b) Soit λ tel que : $0 < \lambda < \varepsilon$. Soit A strictement positif donné. Montrer :

$$\int_0^A \mathrm{e}^{\lambda\, x}\, f(x)\,dx \;=\; 1 - \overline{F}(A)\,\mathrm{e}^{\lambda\, A} + \lambda \int_0^A \mathrm{e}^{\lambda\, x}\,\overline{F}(x)\,dx$$

c) Conclure que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{\lambda x} f(x)\, dx$ converge et que la loi de X n'est pas à queue lourde.

9. On rappelle l'inégalité de Markov : si Z est une variable aléatoire positive admettant une espérance $\mathbb{E}(Z)$, alors pour tout α strictement positif, on a :

$$\mathbb{P}([Z > \alpha]) \leqslant \frac{1}{\alpha}\, \mathbb{E}(Z)$$

On suppose maintenant que la loi de X n'est pas à queue lourde.

a) Montrer qu'il existe λ strictement positif tel que $c = \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\lambda X}\right)$ existe.

b) Soit x strictement positif. Montrer : $\overline{F}(x) \leqslant c \cdot \mathrm{e}^{-\lambda x}$.

c) Montrer : $\displaystyle\liminf_{x \to +\infty} \frac{R(x)}{x} \geqslant \lambda > 0$.

La condition $\displaystyle\liminf_{x \to +\infty} \frac{R(x)}{x} = 0$ n'est pas forcément très agréable à vérifier pour prouver qu'une loi possède une queue lourde. De ce fait, on introduit une autre notion plus simple dont on va montrer qu'elle suffit à assurer cette propriété.

10. Soit X une variable aléatoire positive de fonction de répartition F. On dit que la loi de X possède une **queue longue** si pour tout réel ε strictement positif, il existe un réel A strictement positif tel que pour tout réel x supérieur ou égal à A, et tout réel y appartenant à $[0, 1]$, on a :

$$\left| \frac{\overline{F}(x+y)}{\overline{F}(x)} - 1 \right| < \varepsilon$$

Dans la suite, F désigne la fonction de répartition d'une variable aléatoire X qui suit une telle loi.

a) Montrer, pour tout y de $[0, 1]$: $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\overline{F}(x+y) - \overline{F}(x)}{\overline{F}(x)} = 0$.

b) En déduire : $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{F(x+y) - F(x)}{\overline{F}(x)} = 0$.

c) Montrer, pour tout y de $[0, 1]$:

$$\lim_{x \to +\infty} \mathbb{P}_{[X > x]}([X > x + y]) = 1$$

d) Montrer : $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \big(R(x+1) - R(x)\big) = 0$.

11. Soit F la fonction de répartition d'une variable aléatoire de loi à queue longue.

a) Soit λ strictement positif fixé.

(i) Montrer qu'il existe x_0 positif tel que pour tout x supérieur ou égal à x_0 et pour tout y de $[0, 1]$, on a :

$$\overline{F}(x+y) \geqslant \overline{F}(x)\, \mathrm{e}^{-\frac{\lambda}{2}}$$

__Indication__ : On utilisera la définition de fonction de répartition d'une variable aléatoire qui suit une loi à queue longue donnée à la question précédente avec une valeur précise de ε que l'on explicitera.

(ii) Montrer, pour tout entier naturel non nul n :

$$\overline{F}(x_0 + n) \geqslant \overline{F}(x_0)\, \mathrm{e}^{-\lambda \frac{n}{2}}$$

(iii) En déduire : $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \mathrm{e}^{\lambda (x_0 + n)}\, \overline{F}(x_0 + n) = +\infty$.

b) Justifier que pour tout λ strictement positif, la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{\lambda x}\,\overline{F}(x)$ n'est pas bornée sur $\mathbb{R}_+$.

c) En raisonnant par l'absurde, montrer : $\liminf\limits_{x \to +\infty} \dfrac{R(x)}{x} = 0$.

d) Conclure que toute loi à queue longue possède une queue lourde.