DS7 (version A)

Exercice 1 (EDHEC 2004)

On note E l'espace vectoriel des fonctions polynomiales réelles de degré inférieur ou égal à 2.
On note e_0, e_1, e_2 les fonctions définies, pour tout réel x par :

$$e_0(x) = 1, \quad e_1(x) = x \quad \text{et} \quad e_2(x) = x^2$$

et on rappelle que $\mathscr{B} = (e_0, e_1, e_2)$ est une base de E.
Soit f l'application qui à toute fonction polynomiale P de E associe la fonction $Q = f(P)$, où Q est la dérivée seconde de l'application qui à tout réel x associe $(x^2 - x)\, P(x)$.

Commentaire

Le sujet fait ici le choix de confondre polynôme et fonction polynomiale. C'est parfaitement en accord avec le programme officiel qui conseille cette confusion. Cependant, on peine à comprendre l'intérêt ici car l'aspect fonction ne joue pas de rôle particulier dans l'exercice.

1. a) Montrer que f est un endomorphisme de E.

Démonstration.

- Démontrons que f est linéaire
  Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ et soit $(P_1, P_2) \in \big(\mathbb{R}_2[X]\big)^2$.

$$\begin{aligned}
& \Big(f(\lambda_1 \cdot P_1 + \lambda_2 \cdot P_2)\Big)(X) \\
= \ & \Big((X^2 - X)\ (\lambda_1 \cdot P_1 + \lambda_2 \cdot P_2)\Big)''(X) \\
= \ & \Big((2X-1)\ (\lambda_1 \cdot P_1 + \lambda_2 \cdot P_2) + (X^2 - X)\ (\lambda_1 \cdot P_1 + \lambda_2 \cdot P_2)'\Big)'(X) \\
= \ & \Big((2X-1)\ (\lambda_1 \cdot P_1 + \lambda_2 \cdot P_2) + (X^2 - X)\ \big(\lambda_1 \cdot P_1' + \lambda_2 \cdot P_2'\big)\Big)'(X) && \textit{(par linéarité de l'application dérivée)} \\
= \ & \quad 2\ (\lambda_1 \cdot P_1 + \lambda_2 \cdot P_2)(X) + (2X-1)\ (\lambda_1 \cdot P_1 + \lambda_2 \cdot P_2)'(X) \\
& + \ (2X-1)\ (\lambda_1 \cdot P_1' + \lambda_2 \cdot P_2')(X) + (X^2 - X)\ \big(\lambda_1 \cdot P_1' + \lambda_2 \cdot P_2'\big)'(X) \\
= \ & \quad 2\ (\lambda_1 \cdot P_1 + \lambda_2 \cdot P_2)(X) + (2X-1)\ (\lambda_1 \cdot P_1' + \lambda_2 \cdot P_2')(X) \\
& + \ (2X-1)\ (\lambda_1 \cdot P_1' + \lambda_2 \cdot P_2')(X) + (X^2 - X)\ (\lambda_1 \cdot P_1'' + \lambda_2 \cdot P_2'')(X) && \textit{(par linéarité de l'application dérivée)} \\
= \ & \quad \lambda_1 \cdot \big(2\, P_1(X) + 2\,(2X-1)\ P_1'(X) + (X^2 - X)\ P_1''(X)\big) \\
& + \ \lambda_2 \cdot \big(2\, P_2(X) + 2\,(2X-1)\ P_2'(X) + (X^2 - X)\ P_2''(X)\big) \\
= \ & \lambda_1 \cdot f(P_1)(X) + \lambda_2 \cdot f(P_2)(X) \\
= \ & \big(\lambda_1 \cdot f(P_1) + \lambda_2 \cdot f(P_2)\big)(X)
\end{aligned}$$

  L'application f est donc linéaire.

Commentaire

Dans cette rédaction, on a explicité le calcul ce qui pourra servir dans les questions suivantes. Mais il était aussi possible de rédiger autrement. Pour ce faire, on introduit le polynôme $R \in \mathbb{R}_2[X]$ défini par $R(X) = X^2 - X$. On a alors :

$$\begin{array}{rcll} f(\lambda_1 \cdot P_1 + \lambda_2 \cdot P_2) & = & \big(R \times (\lambda_1 \cdot P_1 + \lambda_2 \cdot P_2)\big)'' & \\ & = & \big(\lambda_1 \cdot R\,P_1 + \lambda_2 \cdot R\,P_2\big)'' & \\ & = & \lambda_1 \cdot \big(R\,P_1\big)'' + \lambda_2 \cdot \big(R\,P_2\big)'' & \textit{(par linéarité de la dérivation seconde)} \\ & = & \lambda_1 \cdot f(P_1) + \lambda_2 \cdot f(P_2) & \textit{(par définition de } f\textit{)} \end{array}$$

- Démontrons que f est à valeurs dans $\mathbb{R}_2[X]$
  Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$. Comme $\deg(P) \leqslant 2$, alors :
  $$\deg\big((X^2 - X)\ P(X)\big) \ = \ \deg\big((X^2 - X)\big) + \deg\big(P(X)\big) \ \leqslant \ 2 + 2 \ = \ 4$$
  La valeur de $f(P)$ est obtenue en dérivant deux fois ce polynôme. On en déduit :
  $$\deg\big(f(P)\big) \ \leqslant \ 2$$
  Ainsi, f est bien à valeurs dans $\mathbb{R}_2[X]$.

$$\boxed{\text{L'application } f \text{ est bien un endomorphisme de } \mathbb{R}_2[X].}$$

Commentaire

- Rappelons tout d'abord les propriétés à connaître concernant le degré des polynômes.
  Si P et Q sont deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$ alors :
  $$\boxed{\deg\big(P \times Q\big) \ = \ \deg(P) + \deg(Q)} \qquad \boxed{\deg\big(P + Q\big) \ \leqslant \ \max\big(\deg(P), \deg(Q)\big)}$$
- On pouvait aussi rédiger en se servant du calcul précédent. Comme $\deg(P) \leqslant 2$, alors :
  - × $\deg(2\,P) \leqslant 2$,
  - × $\deg(P') \leqslant 1$ et ainsi :
    $$\deg\big(2\,(2X - 1)\ P'(X)\big) = \deg\big(2\,(2X - 1)\big) + \deg\big(P'(X)\big) \leqslant 1 + 1 \ = \ 2$$
  - × $\deg(P'') \leqslant 0$ et ainsi :
    $$\deg\big((X^2 - X)\ P''(X)\big) = \deg\big((X^2 - X)\big) + \deg\big(P''(X)\big) \leqslant 2 + 0 \ = \ 2$$

  On en déduit : $\deg\big(2\,P(X) + 2\,(2X - 1)\ P'(X) + (X^2 - X)\ P''(X)\big) \leqslant 2$.

□

b) Déterminer $f(e_0)$, $f(e_1)$ et $f(e_2)$ en fonction de e_0, e_1 et e_2.

Démonstration.
On a :

× $$\begin{array}{rcl} f(e_0)(X) & = & 2\, e_0(X) + 2\,(2X-1)\ \cancel{e_0'(X)} + (X^2-X)\ \cancel{e_0''(X)} \\ & = & (2 \cdot e_0)(X) \end{array}$$

× $$\begin{array}{rcl} f(e_1)(X) & = & 2\, e_1(X) + 2\,(2X-1)\ e_1'(X) + (X^2-X)\ \cancel{e_1''(X)} \\ & = & 2X + 2\,(2X-1) \ = \ 6X-2 \\ & = & (-2 \cdot e_0 + 6 \cdot e_1)(X) \end{array}$$

× $$\begin{array}{rcl} f(e_2)(X) & = & 2\, e_2(X) + 2\,(2X-1)\ e_2'(X) + (X^2-X)\ e_2''(X) \\ & = & 2X^2 + 2\,(2X-1)\ (2X) + (X^2-X)\ 2 \\ & = & 2X^2 + (8X^2-4X) + (2X^2-2X) \ = \ -6X + 12X^2 \\ & = & (-6 \cdot e_1 + 12 \cdot e_2)(X) \end{array}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } f(e_0) = 2 \cdot e_0,\ f(e_1) = -2 \cdot e_0 + 6 \cdot e_1 \text{ et } f(e_2) = -6\, e_1 + 12\, e_2.}$$

□

c) En déduire que la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$ est $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 6 & -6 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$.

Démonstration.
D'après la question précédente :

× $f(e_0) = 2 \cdot e_0 + 0 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2$ donc $\text{Mat}_{(e_0,e_1,e_2)}\big(f(e_0)\big) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

× $f(e_1) = -2 \cdot e_0 + 6 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2$ donc $\text{Mat}_{(e_0,e_1,e_2)}\big(f(e_1)\big) = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$.

× $f(e_2) = 0 \cdot e_0 - 6 \cdot e_1 + 12 \cdot e_2$ donc $\text{Mat}_{(e_0,e_1,e_2)}\big(f(e_2)\big) = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 12 \end{pmatrix}$.

$$\boxed{\text{Finalement : } A = \text{Mat}_{(e_0,e_1,e_2)}(f) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 6 & -6 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}.}$$

Commentaire

L'énoncé fournit le résultat de la question (la valeur de la matrice $A = \text{Mat}_{(e_0,e_1,e_2)}(f)$ à trouver). Par définition, cette matrice est la concaténation des vecteurs colonnes représentatifs des vecteurs $f(e_1)$, $f(e_2)$, et $f(e_3)$ dans la base $\mathscr{B}$. Ainsi, la lecture de A nous fournit directement les égalités : $f(e_0) = 2 \cdot e_0$, $f(e_1) = -2 \cdot e_0 + 6 \cdot e_1$ et $f(e_2) = -6 \cdot e_1 + 12 \cdot e_2$. Cela ne signifie pas que l'on peut rédiger la question ***1.b)*** avec comme argument : « d'après la question ***1.c)*** … ». Par contre, cette matrice permet de vérifier le résultat de la question précédente et de corriger une éventuelle erreur que l'on aurait pu commettre.

□

d) Montrer sans calcul que f est un automorphisme de E.

Démonstration.

- La matrice A est inversible car elle est triangulaire (supérieure) et ses coefficients diagonaux sont tous non nuls.
- La matrice A étant la représentation matricielle de f dans la base $\mathscr{B}$, on en conclut que f est bijective.

$$\boxed{\text{L'application } f \text{ est un endomorphisme bijectif de } E \text{ : c'est donc un automorphisme de } E.}$$

□

2. a) Donner les valeurs propres de f, puis en déduire que f est diagonalisable.

Démonstration.

- Notons tout d'abord que la matrice A est triangulaire (supérieure). Ses valeurs propres sont donc ses coefficients diagonaux.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathrm{Sp}(f) = \mathrm{Sp}(A) = \{2, 6, 12\}.}$$

- La matrice A est carrée d'ordre 3 et admet 3 valeurs propres **distinctes**.

$$\boxed{\text{On en conclut que } A \text{ est diagonalisable.}}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Enfin, comme } A \text{ est la matrice représentative de } f \text{ dans la base } E,\\ \text{l'endomorphisme } f \text{ est lui aussi diagonalisable.}\end{array}}$$

□

b) Déterminer les sous-espaces propres de f.

Démonstration.

- Déterminons $E_2(f)$, le sous-espace propre de f associé à la valeur propre 2.
  Soit $P \in E$. Alors il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $P = a \cdot e_0 + b \cdot e_1 + c \cdot e_2$.
  Autrement dit : $U = \mathrm{Mat}_{(e_0,e_1,e_2)}(P) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{array}{rcl}
P \in E_2(f) & \Longleftrightarrow & (f - 2\,\mathrm{id}_E)(M) = 0_E \\
& \Longleftrightarrow & (A - 2\,I_3) \times U = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} \\
& \Longleftrightarrow & \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcl} -\ 2\,b & & & = & 0 \\ 4\,b & - & 6\,c & = & 0 \\ & & 10\,c & = & 0 \end{array} \right. \\
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcl} b & = & 0 \\ c & = & 0 \end{array} \right.
\end{array}$$

  On obtient alors :

$$\begin{array}{rcl}
E_2(f) & = & \{P \in E \mid (f - 2\,\mathrm{id}_E)(P) = 0_E\} \\
& = & \{a \cdot e_0 + b \cdot e_1 + c \cdot e_2 \mid b = c = 0\} \\
& = & \{a \cdot e_0 \mid a \in \mathbb{R}\} \ = \ \mathrm{Vect}\,(e_0)
\end{array}$$

$$\boxed{\text{On en conclut : } E_1(f) = \mathrm{Vect}\,(e_0).}$$

- Déterminons $E_6(f)$, le sous-espace propre de f associé à la valeur propre 6.
  On reprend les notations précédentes.

$$\begin{array}{rcl}
P \in E_6(f) & \Longleftrightarrow & (f - 6\,\mathrm{id}_E)(M) = 0_E \\
& \Longleftrightarrow & (A - 6\,I_3) \times U = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} \\
& \Longleftrightarrow & \begin{pmatrix} -4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -4\,a & - & 2\,b & & & = & 0 \\ & & & - & 6\,c & = & 0 \\ & & & & 6\,c & = & 0 \end{array} \right. \\
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcl} -4\,a & & & = & 2\,b \\ & & c & = & 0 \end{array} \right.
\end{array}$$

On obtient alors :

$$\begin{array}{rcl}
E_6(f) & = & \{P \in E \mid (f - 6\,\mathrm{id}_E)(P) = 0_E\} \\
& = & \{a \cdot e_0 + b \cdot e_1 + c \cdot e_2 \mid a = -\frac{1}{2}\,b \quad \texttt{ET} \quad c = 0\} \\
& = & \{-\frac{1}{2}\,b \cdot e_0 + b \cdot e_1 \mid b \in \mathbb{R}\} \\
& = & \{b \cdot (-\frac{1}{2} \cdot e_0 + e_1) \mid b \in \mathbb{R}\} \\
& = & \mathrm{Vect}\left(-\frac{1}{2} \cdot e_0 + e_1\right) \; = \; \mathrm{Vect}\,(e_0 - 2 \cdot e_1)
\end{array}$$

$$\boxed{\text{On en conclut : } E_6(f) = \mathrm{Vect}\,(e_0 - 2 \cdot e_1).}$$

Commentaire

On rappelle qu'on ne change pas l'espace vectoriel engendré par une famille $\mathcal{F}$ en multipliant un vecteur de $\mathcal{F}$ par un réel non nul. On se sert de cette propriété ici afin d'avoir une expression plus simple (sans fraction) de $E_6(f)$.

- Déterminons $E_{12}(f)$, le sous-espace propre de f associé à la valeur propre 6.
  On reprend les notations précédentes.

$$\begin{array}{rcl}
P \in E_{12}(f) & \Longleftrightarrow & (f - 12\,\mathrm{id}_E)(M) = 0_E \\
& \Longleftrightarrow & (A - 12\,I_3) \times U = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} \\
& \Longleftrightarrow & \begin{pmatrix} -10 & -2 & 0 \\ 0 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -10\,a & - & 2\,b & & & = & 0 \\ & - & 6\,b & - & 6\,c & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array} \right. \\
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcl} -10\,a & - & 2\,b & = & 0 \\ & - & 6\,b & = & 6\,c \end{array} \right. \\
& \underset{L_1 \leftarrow 3\,L_1 - L_2}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcl} -30\,a & & & = & -6\,c \\ & - & 6\,b & = & 6\,c \end{array} \right. \\
& \underset{\substack{L_1 \leftarrow -\frac{1}{6}\,L_1 \\ L_2 \leftarrow -\frac{1}{6}\,L_2}}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcl} 5a & & & = & c \\ & & b & = & -c \end{array} \right.
\end{array}$$

On obtient alors :

$$\begin{array}{rcl} E_{12}(f) & = & \{P \in E \mid (f - 12\,\mathrm{id}_E)(P) = 0_E\} \\ & = & \{a \cdot e_0 + b \cdot e_1 + c \cdot e_2 \mid a = \frac{1}{5}\,c \quad \texttt{ET} \quad c = 0\} \\ & = & \{\frac{1}{5}\,c \cdot e_0 - c \cdot e_1 + c \cdot e_2 \mid c \in \mathbb{R}\} \\ & = & \{c \cdot (\frac{1}{5}\,e_0 - e_1 + e_2) \mid a \in \mathbb{R}\} \\ & = & \mathrm{Vect}\left(\frac{1}{5}\,e_0 - e_1 + e_2\right) \;=\; \mathrm{Vect}\,(e_0 - 5 \cdot e_1 + 5 \cdot e_2) \end{array}$$

$$\boxed{\text{On en conclut : } E_{12}(f) = \mathrm{Vect}\,(e_0 - 5 \cdot e_1 + 5 \cdot e_2).}$$

□

Commentaire

- Il faut faire attention aux objets manipulés. On doit déterminer $E_2(f) = \mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{id}_E)$, noyau d'un endomorphisme de E. On doit donc obtenir un sous-espace vectoriel de E. Si $P \in E$ et $U = \mathrm{Mat}_{(e_0,e_1,e_2)}(P) \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ sont bien deux représentations différentes du même polynôme P, cela n'autorise pas pour autant à écrire l'égalité entre ces deux éléments :

$$\underbrace{a \cdot e_0 + b \cdot e_1 + c \cdot e_2}_{\in \mathbb{R}_2[X]} \;\cancel{=}\; \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}}_{\in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \quad \text{et} \quad \underbrace{\mathrm{Vect}\,(e_0)}_{E_1(f)} \;\cancel{=}\; \underbrace{\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)}_{E_1(A)}$$

- Il faut s'habituer à déterminer les ensembles $E_\lambda(A)$ par lecture de la matrice $A - \lambda\,I$.
  Illustrons la méthode avec la matrice de l'exercice et $\lambda = 1$.
  On cherche les vecteurs $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de $E_{12}(A)$ c'est-à-dire les vecteurs tels que :
  $(A - I_3)\,X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$. Or :

$$\begin{array}{rcl} \begin{pmatrix} -10 & -2 & 0 \\ 0 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & = & x \cdot C_1 + y \cdot C_2 + z \cdot C_3 \\ & = & x \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

  Pour obtenir le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ à l'aide de cette combinaison linéaire, on prend $x \neq 0$.
  En effet, si $x = 0$ alors forcément $y = 0$ sinon on crée un coefficient non nul en $1^{\text{ère}}$ position du vecteur résultat. Mais dans ce cas ($x = y = 0$), on a $z = 0$ sinon on crée un coefficient non nul en $2^{\text{ème}}$ position du vecteur résultat.
  Comme $x \neq 0$, alors forcément $y = -5x$ (pour ne pas créer un coefficient non nul en $1^{\text{ère}}$ position) puis $z = 5x$ (pour ne pas créer un coefficient non nul en $2^{\text{ème}}$ position). En prenant par exemple $x = 1$, on obtient :

$$E_{12}(A) \;\supset\; \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}\right)$$

  Et l'égalité est vérifiée pour des raisons de dimension (on peut par exemple démontrer : $\mathrm{rg}(A - 12\,I_3) = 2$ ce qui permet de conclure, par théorème du rang : $\dim\left(E_{12}(A)\right) = 1$).

3. a) Justifier l'existence d'une matrice P inversible dont la première ligne ne contient que des « 1 » telle que $A = PDP^{-1}$, où $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$.

Démonstration.
Il existe donc une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que $A = P\,D\,P^{-1}$.
Plus précisément :

× la matrice P est obtenue par concaténation de bases des sous-espaces propres de A,

× la matrice D est la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de A (dans le même ordre d'apparition que les vecteurs propres).

Comme $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$, $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ et $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}\right)$ sont des bases respectives de $E_2(A)$, $E_6(A)$ et $E_{12}(A)$:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\text{On a bien trouvé } P \text{ inversible et } D \text{ diagonale telles que : } A = P\,D\,P^{-1}.}$$

Commentaire

- Dans la question ***2.b)***, on a démontré : $E_6(f) \;=\; \mathrm{Vect}\left(-\frac{1}{2} \cdot e_0 + e_1\right) \;=\; \mathrm{Vect}\left(e_0 - 2 \cdot e_1\right)$.
  Cela se traduit matriciellement par : $E_6(A) \;=\; \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \;=\; \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.
  Comme dit précédemment, on opte généralement pour l'écriture la plus simple. Mais il faut bien avoir en tête que ce choix fournit des valeurs différentes pour la matrice P.
- L'énoncé précise que la première ligne de la matrice P ne doit contenir que des « 1 ». Cette contrainte permet de s'assurer que tous les candidats vont travailler, par la suite, sur la même matrice P. Si ce n'était pas le cas, le concepteur aurait une tâche bien difficile en question ***4.a)***, à savoir vérifier la valeur de P^{-1} pour la valeur de P choisie par le candidat.
- Détaillons plus précisément l'obtention de la formule : $A = P\,D\,P^{-1}$.
  Notons $\mathscr{B}' = (u_0, u_1, u_2)$ où :
  $$u_0 = e_0, \quad u_1 = e_0 - 2 \cdot e_1, \quad u_2 = e_0 - 5 \cdot e_1 + 5 \cdot e_2$$
  La famille $\mathscr{B}'$ est une base de E. En effet, elle est :
  × libre car obtenue par concaténation des familles libres (u_0), (u_1), (u_2) constituées de vecteurs propres associés à des valeurs propres différentes.
  × tel que : $\mathrm{Card}(\mathscr{B}') = 3 = \dim(E)$.
  On obtient alors, par la formule de changement de base :
  $$\begin{array}{ccccccc} \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) & = & P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} & \times & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) & \times & P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}} \\ \shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel \\ A & = & P & \times & D & \times & P^{-1} \end{array}$$

□

b) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = PD^nP^{-1}$.

Démonstration.
Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)$
où $\mathcal{P}(n)$: $A^n = P\,D^n\,P^{-1}$.

▸ **Initialisation** :

- D'une part : $A^0 = I_3$.
- D'autre part : $P\,D^0\,P^{-1} = P\,I_3\,P^{-1} = P\ P^{-1} = I_3$.

D'où $\mathcal{P}(0)$.

▸ **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* : $A^{n+1} = PD^{n+1}\,P^{-1}$).
Alors :

$$\begin{array}{rcll} A^{n+1} & = & A \times A^n & \\ & = & A \times P\,D^n\,P^{-1} & \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\ & = & P\,D\,P^{-1} \times P\,D^n\,P^{-1} & \textit{(d'après la question 3.a))} \\ & = & P\,D\left(P^{-1}P\right)D^n\,P^{-1} & \\ & = & P\,D\,I_3\,D^n\,P^{-1} & \\ & = & P\,DD^n\,P^{-1} \ = \ P\,D^{n+1}\,P^{-1} & \end{array}$$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N},\ A^n = PD^nP^{-1}.}$$

□

4. a) Déterminer la matrice P^{-1}.

Démonstration.
On procède par la méthode du pivot de Gauss.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue les opérations $\left\{ \begin{array}{l} L_1 \leftarrow 5\,L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \end{array} \right.$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 5 & 5 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue l'opération $\{\ L_1 \leftarrow 2\,L_1 + 5\,L_2$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 10 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue les opérations $\left\{\begin{array}{l} L_1 \leftarrow \frac{1}{10} L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{-2} L_2 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{5} L_3 \end{array}\right.$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{10} & \frac{3}{10} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \right.$$

$$\boxed{\text{Finalement : } P^{-1} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 10 & 5 & 3 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.}$$

Commentaire

- Rappelons tout d'abord qu'une matrice triangulaire est inversible si tous ses coefficients diagonaux sont non nuls. Ici, P est inversible par construction. En effet, P est une matrice de passage ($P = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$).
- Si une matrice triangulaire supérieure T (resp. inférieure) est inversible, alors son inverse est une matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure). Cette propriété est d'ailleurs immédiate si on s'intéresse de près aux opérations successivement effectuées lors de l'algorithme du pivot de Gauss. On peut par ailleurs préciser que les coefficients diagonaux de T^{-1} sont les inverses des coefficients diagonaux de T.
- Les deux points précédents permettent de vérifier le calcul d'inverse effectué. La matrice P est triangulaire supérieure et ses coefficients 1, -2 et 5 sont tous non nuls. Elle est donc inversible et son inverse est elle aussi triangulaire supérieure de coefficients diagonaux $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{-2}$ et $\frac{1}{5}$.

□

b) En déduire explicitement, en fonction de n, la matrice A^n.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} A^n &= PD^nP^{-1} && \textit{(d'après la question } \mathbf{3.b)}\textit{)} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 6^n & 0 \\ 0 & 0 & 12^n \end{pmatrix} \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 10 & 5 & 3 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \times 2^n & 5 \times 2^n & 3 \times 2^n \\ 0 & -5 \times 6^n & -5 \times 6^n \\ 0 & 0 & 2 \times 12^n \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 10 \times 2^n & 5(2^n - 6^n) & 3 \times 2^n - 5 \times 6^n + 2 \times 12^n \\ 0 & 10 \times 6^n & 10(6^n - 12^n) \\ 0 & 0 & 10 \times 12^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ A^n = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 10 \times 2^n & 5(2^n - 6^n) & 3 \times 2^n - 5 \times 6^n + 2 \times 12^n \\ 0 & 10 \times 6^n & 10(6^n - 12^n) \\ 0 & 0 & 10 \times 12^n \end{pmatrix}.}$$

□

c) On dit qu'une suite de matrices (M_n) tend vers la matrice M, lorsque n tend vers $+\infty$, si chaque coefficient de M_n tend vers le coefficient situé à la même place dans M.
On pose $B = \dfrac{1}{12}\, A$. Montrer que la suite (B^n) tend vers une matrice J vérifiant $J^2 = J$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Comme $B = \dfrac{1}{12}\, A$ alors, par récurrence immédiate, $B^n = \dfrac{1}{12^n}\, A^n$.
  En multipliant chaque coefficient de A^n par $\frac{1}{12^n}$, on obtient :

$$B^n \;=\; \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 10\times\left(\frac{1}{6}\right)^n & 5\left(\left(\frac{1}{6}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) & 3\times\left(\frac{1}{6}\right)^n - 5\times\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2\times 1 \\ 0 & 10\times\left(\frac{1}{2}\right)^n & 10(\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1) \\ 0 & 0 & 10\times 1 \end{pmatrix}$$

- Or :
  × $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{6^n} = 0$ car $\dfrac{1}{6} \in\ ]-1,1[$.
  × $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2^n} = 0$ car $\dfrac{1}{2} \in\ ]-1,1[$.
  On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} B^n = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} = J$$

- On remarque enfin :

$$J^2 \;=\; \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} \;=\; \frac{1}{100}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & -100 \\ 0 & 0 & 100 \end{pmatrix} \;=\; \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} \;=\; J$$

$$\boxed{\text{Ainsi, la suite } (B^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ tend vers la matrice } J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ qui vérifie } J^2 = J.}$$

□

Exercice 2 (EML 2022)

Partie A

On considère l'application f définie sur $]-\infty, 1[$ par :

$$f : t \mapsto \begin{cases} -\dfrac{\ln(1-t)}{t} & \text{si } t \in]-\infty, 0[\cup]0, 1[\\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $]-\infty, 1[$.

Démonstration.

- La fonction f est continue sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, 1[$ car elle est le quotient $f = \dfrac{f_1}{f_2}$ où :
  - × $f_1 : t \mapsto -\ln(1-t)$ qui est continue sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, 1[$,
  - × $f_2 : t \mapsto t$ qui :
    - est continue sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, 1[$,
    - `NE S'ANNULE PAS` sur ces intervalles.

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est continue sur }]-\infty, 0[\text{ et sur }]0, 1[.}$$

- Par ailleurs :

$$f(t) = -\frac{\ln(1-t)}{t} \underset{t\to 0}{\sim} -\frac{-t}{t} = 1$$

Ainsi : $\lim\limits_{t\to 0} f(t) = 1 = f(0)$.

$$\boxed{\text{On en déduit que la fonction } f \text{ est continue en } 0.}$$

$$\boxed{\text{Finalement, la fonction } f \text{ est continue sur }]-\infty, 1[.}$$

Commentaire

Rappelons que la fonction $h : t \mapsto \ln(1-t)$ est continue sur $]-\infty, 1[$ car elle est la composée $h = h_2 \circ h_1$ avec :

- $h_1 : t \mapsto 1 - t$ qui est :
  - × continue sur $]-\infty, 1[$,
  - × telle que : $h_1(]-\infty, 1[) \subset]0, +\infty[$.
- $h_2 : t \mapsto \ln(t)$ qui est continue sur $]0, +\infty[$.

□

2. ***a)*** Démontrer : $\forall t \in]-\infty, 1[, \ \dfrac{t}{1-t} + \ln(1-t) \geqslant 0$.

Démonstration.

On note $g : t \mapsto \dfrac{t}{1-t} + \ln(1-t)$

- La fonction g est dérivable sur $]-\infty, 1[$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $]-\infty, 1[$.

- Soit $t \in \,]-\infty, 1[$.

$$\begin{aligned} g'(t) &= \frac{1 \times (1-t) - t \times (-1)}{(1-t)^2} - \frac{1}{1-t} \\ &= \frac{1}{(1-t)^2} - \frac{1}{1-t} \\ &= \frac{1-(1-t)}{(1-t)^2} \\ &= \frac{t}{(1-t)^2} \end{aligned}$$

On en déduit :

$$g'(t) \geqslant 0 \;\Leftrightarrow\; t \geqslant 0$$

- On obtient alors le tableau de variations suivant :

t	$-\infty$		0		1
Signe de $g'(t)$		$-$	0	$+$	‖
Variations de g	↘		0	↗	‖

- La fonction g admet donc 0 pour minimum en 0. Ainsi, pour tout $t \in \,]-\infty, 1[$:

$$g(t) \;\geqslant\; 0$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall t \in \,]-\infty, 1[,\ \frac{t}{1-t} + \ln(1-t) \geqslant 0.}$$

□

b) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, 1[$ et déterminer f' sur ces intervalles.

Démonstration.

- La fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, 1[$ car elle est le quotient $f = \dfrac{f_1}{f_2}$ où :
  × $f_1 : t \mapsto -\ln(1-t)$ qui est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, 1[$,
  × $f_2 : t \mapsto t$ qui :
    - est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, 1[$,
    - `NE S'ANNULE PAS` sur ces intervalles.

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur }]-\infty, 0[\text{ et sur }]0, 1[.}$$

- Soit $t \in \,]-\infty, 0[\,\cup\,]0, 1[$.

$$\begin{aligned} f'(t) &= -\frac{-\frac{1}{1-t} \times t - \ln(1-t) \times 1}{t^2} \\ &= \frac{\frac{t}{1-t} + \ln(1-t)}{t^2} \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall t \in \,]-\infty, 0[\,\cup\,]0, 1[,\ f'(t) = \frac{\frac{t}{1-t} + \ln(1-t)}{t^2}}$$

□

c) En déduire la monotonie de f sur $]-\infty,1[$.

Démonstration.
D'après la question ***2.b)***, pour tout $t \in\ ]-\infty,1[$:

$$\frac{t}{1-t} + \ln(1-t) \ \geqslant\ 0$$

On en déduit :

$$\forall t \in\ ]-\infty,0[\ \cup\ ]0,1[, \quad f'(t) \ \geqslant\ 0$$

On obtient le tableau de variations suivant :

t	$-\infty$		0		1
Signe de $f'(t)$		$+$	||	$+$	||
Variations de f	$\nearrow$		1	$\nearrow$	||

$\square$

3. a) Donner le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $t \mapsto \ln(1-t)$.

Démonstration.
Comme $\lim\limits_{t\to 0} -t = 0$, alors :

$$\ln(1-t) \ = \ -t - \frac{(-t)^2}{2} + \underset{t\to 0}{o}(t^2)$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \ln(1-t) = -t - \frac{t^2}{2} + \underset{t\to 0}{o}(t^2).}$$

$\square$

b) Montrer que f est dérivable en 0 et : $f'(0) = \dfrac{1}{2}$.

Démonstration.
Soit $t \in\ ]-\infty,0[\ \cup\ ]0,1[$.

$$\tau_0(f)(t) \ = \ \frac{f(t)-f(0)}{t-0} \ = \ \frac{-\frac{\ln(1-t)}{t} - 1}{t} \ = \ -\frac{\ln(1-t)+t}{t^2}$$

De plus :

$$\ln(1-t)+t \ = \ -t + \frac{t^2}{2} + \underset{t\to 0}{o}(t^2) + t \ = \ \frac{t^2}{2} + \underset{t\to 0}{o}(t^2)$$

Ainsi : $\ln(1-t)+t \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{t^2}{2}$. On en déduit :

$$\tau_0(f)(t) \ \underset{t\to 0}{\sim} \ \frac{\frac{t^2}{2}}{t^2} \ = \ \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que } f \text{ est dérivable en 0 et : } f'(0) = \frac{1}{2}.}$$

$\square$

c) Montrer enfin que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 1[$.

Démonstration.

- Tout d'abord, d'après la question ***2.b)***, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, 1[$.

$$\boxed{\text{En particulier, la fonction } f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur }]-\infty, 0[\text{ et sur }]0, 1[.}$$

- On souhaite ensuite démontrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ en 0, c'est-à-dire que :
  - × la fonction f dérivable en 0,
  - × la fonction f' est continue en 0.

  La fonction f est dérivable en 0 d'après la question précédente.
  Démontrons que f' est continue en 0.
  Soit $t \in]-\infty, 0[\cup]0, 1[$. D'après ***2.b)*** :

$$f'(t) = \frac{\frac{t}{1-t} + \ln(1-t)}{t^2}$$

  - × D'une part :

$$\frac{t}{1-t} = t \times \frac{1}{1-t} = t\left(1 + t + t^2 + \underset{t\to 0}{o}(t^2)\right) = t + t^2 + t^3 + \underset{t\to 0}{o}(t^3)$$

  Or $t^3 = \underset{t\to 0}{o}(t^2)$. Ainsi :

$$\frac{t}{1-t} = t + t^2 + \underset{t\to 0}{o}(t^2)$$

  - × D'autre part, d'après ***3.a)*** :

$$\ln(1-t) = -t - \frac{t^2}{2} + \underset{t\to 0}{o}(t^2)$$

  On obtient :

$$\begin{aligned} \frac{t}{1-t} + \ln(1-t) &= \cancel{t} + t^2 + \underset{t\to 0}{o}(t^2) - \cancel{t} - \frac{t^2}{2} + \underset{t\to 0}{o}(t^2) \\ &= \frac{t^2}{2} + \underset{t\to 0}{o}(t^2) \end{aligned}$$

  On en déduit :

$$f'(t) = \frac{\frac{t}{1-t} + \ln(1-t)}{t^2} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{\frac{\cancel{t^2}}{2}}{\cancel{t^2}} = \frac{1}{2}$$

  Finalement, d'après ***3.b)*** : $\lim\limits_{t\to 0} f'(t) = \frac{1}{2} = f'(0)$.

$$\boxed{\text{Ainsi, la fonction } f' \text{ est continue en } 0.}$$

$$\boxed{\text{On en conclut que la fonction } f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur }]-\infty, 1[.}$$

□

4. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en 1.

Démonstration.

- Tout d'abord, comme $\lim\limits_{t \to 1} \ln(1-t) = -\infty$, on obtient :

$$\lim_{t \to 1} -\frac{\ln(1-t)}{t} = +\infty$$

$$\boxed{\lim_{t \to 1} f(t) = +\infty}$$

- Ensuite, avec le changement de variable $\boxed{u = 1-t}$, on obtient :

$$\lim_{t \to -\infty} f(t) = \lim_{t \to -\infty} -\frac{\ln(1-t)}{t} = \lim_{u \to +\infty} -\frac{\ln(u)}{1-u}$$

Or :

$$-\frac{\ln(u)}{1-u} \underset{u \to +\infty}{\sim} -\frac{\ln(u)}{-u} = \frac{\ln(u)}{u}$$

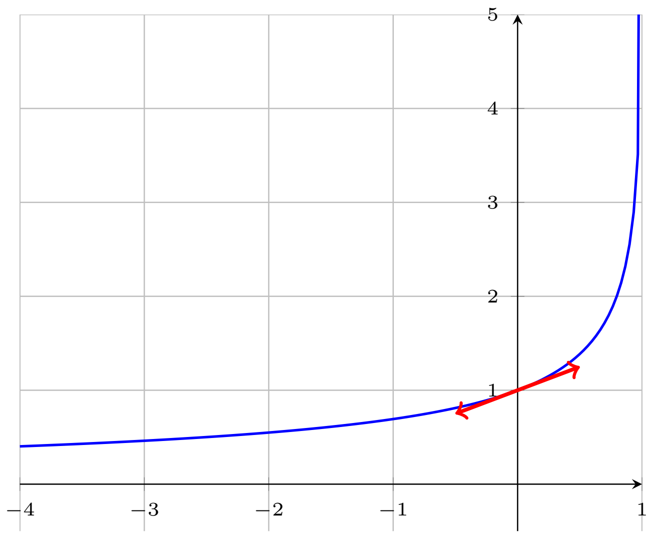
De plus, par croissances comparées : $\lim\limits_{u \to +\infty} \dfrac{\ln(u)}{u} = 0$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \lim_{t \to -\infty} f(t) = 0.}$$

□

5. Tracer l'allure de la courbe représentative de f dans un repère orthonormé en faisant apparaître la tangente en 0.

Démonstration.



□

Partie B

On considère maintenant la fonction L définie sur $]-\infty, 1[$ par :

$$L : x \mapsto \int_0^x f(t)\, dt$$

On rappelle que la série $\sum\limits_{k \geqslant 1} \dfrac{1}{k^2}$ converge et on admet : $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{k^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$.

6. Justifier que L est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 1[$ et préciser L' sur $]-\infty, 1[$.

Démonstration.

- D'après la question ***1.***, la fonction f est continue sur $]-\infty, 1[$.
  Elle admet donc une primitive F de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 1[$. On a alors, pour tout $x \in \,]-\infty, 1[$:

$$L(x) \;=\; \int_0^x f(t)\, dt \;=\; \big[\, F(t) \,\big]_0^x \;=\; F(x) - F(0)$$

$$\boxed{\text{Ainsi, la fonction } L \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur }]-\infty, 1[, \text{ car } F \text{ l'est}}$$

- De plus, pour tout $x \in \,]-\infty, 1[$:

$$L'(x) \;=\; F'(x) \;=\; f(x)$$

$$\boxed{\forall x \in \,]-\infty, 1[,\ L'(x) = f(x)}$$

Commentaire

On peut aussi rédiger en se servant du fait que la fonction L est la primitive de f sur $]-\infty, 1[$ qui s'annule en 0.
Ainsi, L est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 1[$ et : $\forall x \in \,]-\infty, 1[$, $L'(x) = f(x)$.

□

7. Étude de L en 1 :

a) Démontrer, à l'aide d'un changement de variable :

$$\forall (A, B) \in \,]0, 1[^2, \quad \int_A^B f(t)\, dt \;=\; \int_{1-B}^{1-A} \frac{-\ln(t)}{1-t}\, dt$$

Démonstration.
Soit $(A, B) \in \,]0, 1[^2$.
On effectue alors le changement de variable $\boxed{u = 1 - t}$.

$u = 1 - t \quad$ (et donc $t = 1 - u$)
$\hookrightarrow du = -dt$

- $t = A \;\Rightarrow\; u = 1 - A$
- $t = B \;\Rightarrow\; u = 1 - B$

Ce changement de variable est valide car $\psi : u \mapsto 1-u$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment d'extrémités $1 - A$ et $1 - B$.

$$\int_A^B f(t)\, dt \;=\; \int_{1-A}^{1-B} f(1-u)\,(-du) \;=\; \int_{1-B}^{1-A} f(1-u)\, du \;=\; \int_{1-B}^{1-A} -\frac{\ln(u)}{1-u}\, du$$

$$\boxed{\text{Pour tout } (A, B) \in \,]0, 1[^2, \text{ on obtient bien : } \int_A^B f(t)\, dt = \int_{1-B}^{1-A} -\frac{\ln(t)}{1-t}\, dt.}$$

□

b) Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \,]0,1[, \ -\dfrac{\ln(t)}{1-t} = \sum\limits_{k=0}^{n} \big(-t^k \ln(t)\big) + \dfrac{-t^{n+1}\ln(t)}{1-t}$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $t \in \,]0,1[$.

- Tout d'abord :

$$\begin{array}{rcl} \sum\limits_{k=0}^{n} \big(-t^k \ln(t)\big) & = & -\ln(t) \sum\limits_{k=0}^{n} t^k \\ & = & -\ln(t) \dfrac{1-t^{n+1}}{1-t} \qquad \textit{(car } t \neq 1\textit{)} \\ & = & -\dfrac{\ln(t)}{1-t} + \dfrac{t^{n+1}\ln(t)}{1-t} \end{array}$$

- On en déduit :

$$-\frac{\ln(t)}{1-t} = \sum_{k=0}^{n} \big(-t^k \ln(t)\big) - \frac{t^{n+1}\ln(t)}{1-t}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \,]0,1[, \ -\frac{\ln(t)}{1-t} = \sum_{k=0}^{n} \big(-t^k \ln(t)\big) + \frac{-t^{n+1}\ln(t)}{1-t}.}$$

□

c) Démontrer que, pour tout k de $\mathbb{N}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 -t^k \ln(t)\, dt$ converge et :

$$\int_0^1 -t^k \ln(t)\, dt = \frac{1}{(k+1)^2}$$

Démonstration.
Soit $k \in \mathbb{N}$.

- La fonction $t \mapsto -t^k \ln(t)$ est continue sur $]0,1]$.
  L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 -t^k \ln(t)\, dt$ est donc uniquement impropre en 0.
- Soit $A \in \,]0,1]$.
  On procède par intégration par parties (IPP).

$$\left| \begin{array}{rclcrcl} u(t) & = & \ln(t) & \quad & u'(t) & = & \dfrac{1}{t} \\ v'(t) & = & -t^k & & v(t) & = & -\dfrac{1}{k+1}\, t^{k+1} \end{array} \right.$$

Cette IPP est valide car les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur le `SEGMENT` $[A,1]$.
On obtient :

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_A^1 -t^k \ln(t)\, dt & = & \left[-\dfrac{1}{k+1}\, t^{k+1} \times \ln(t) \right]_A^1 + \displaystyle\int_A^1 \dfrac{1}{k+1}\, t^{k+1} \times \dfrac{1}{t}\, dt \\ & = & \cancel{-\dfrac{1}{k+1} \ln(1)} + \dfrac{1}{k+1} A^{k+1} \ln(A) + \dfrac{1}{k+1} \displaystyle\int_A^1 t^k\, dt \\ & = & \dfrac{1}{k+1} A^{k+1} \ln(A) + \dfrac{1}{k+1} \left[\dfrac{1}{k+1}\, t^{k+1} \right]_A^1 \\ & = & \dfrac{1}{k+1} A^{k+1} \ln(A) + \dfrac{1}{(k+1)^2} \left(1 - A^{k+1}\right) \end{array}$$

- Or :
  - × d'une part, par croissances comparées : $\lim\limits_{A \to 0} A^{k+1} \ln(A) = 0$.
  - × d'autre part : $\lim\limits_{A \to 0} A^{k+1} = 0$.

$$\boxed{\text{On en déduit que l'intégrale } \int_0^1 -t^k \ln(t)\ dt \text{ est convergente}}$$

De plus :

$$\int_0^1 -t^k \ln(t)\ dt \ = \ 0 + \frac{1}{(k+1)^2}\,(1-0) \ = \ \frac{1}{(k+1)^2}$$

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ \int_0^1 -t^k \ln(t)\ dt = \frac{1}{(k+1)^2}}$$

□

d) Démontrer que la fonction $t \mapsto \dfrac{-t\ln(t)}{1-t}$ est bornée sur $]0,1[$.
(On pourra commencer par calculer les limites en 0 *et en* 1*)*

En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{-t^{n+1}\ln(t)}{1-t}\ dt$ converge puis démontrer :

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 \frac{-t^{n+1}\ln(t)}{1-t}\ dt \ = \ 0$$

Démonstration.
On note $g : t \mapsto -\dfrac{t\ln(t)}{1-t}$.

- Tout d'abord, par croissances comparées : $\lim\limits_{t \to 0} t\ln(t) = 0$. D'où :

$$\lim_{t \to 0} g(t) \ = \ 0$$

$$\boxed{\lim_{t \to 0} \ -\frac{t\ln(t)}{1-t} = 0}$$

- Ensuite :

$$g(t) \ = \ -\frac{t \times \ln(t)}{1-t} \ \underset{t \to 1}{\sim} \ -\frac{1 \times (t-1)}{1-t} \ = \ 1$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \lim_{t \to 1} \ -\frac{t\ln(t)}{1-t} = 1.}$$

- On vient donc de démontrer que la fonction g est prolongeable par continuité en 0 et en 1.
  Elle est de plus continue sur $]0,1[$ car elle est le produit $g = h \times f$ où :
  - × $h : t \mapsto t$ est continue sur $]-\infty,1[$,
  - × f est continue sur $]-\infty,1[$ d'après ***1.***

  Notons $\tilde{g}$ la fonction g prolongée par continuité en 0 et en 1.
- Cette fonction $\tilde{g}$ est **continue** sur le **segment** $[0,1]$.
  Elle est donc bornée (et atteint ses bornes).

$$\boxed{\text{La fonction } g\text{, qui est la restriction de } \tilde{g} \text{ à l'intervalle }]0,1[\text{, est donc également bornée.}}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}$.
  - $\times$ Soit $t \in \,]0,1[$.

$$\begin{array}{lrcll} & t & < & 1 & \\ \text{donc} & \ln(t) & < & 0 & \textit{(par stricte croissance} \\ & & & & \textit{de } \ln \textit{ sur }]0,+\infty[\textit{)} \\ \text{d'où} & -t^{n+1}\ln(t) & > & 0 & \textit{(car } -t^{n+1} < 0\textit{)} \\ \text{ainsi} & -\dfrac{t^{n+1}\ln(t)}{1-t} & > & 0 & \textit{(car } 1-t > 0\textit{)} \end{array}$$

  - $\times$ De plus, comme la fonction $t \mapsto -\dfrac{t\,\ln(t)}{1-t}$ est bornée, elle est en particulier majorée. Il existe donc $M \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $t \in \,]0,1[$:

$$\begin{array}{lrcll} & -\dfrac{t\,\ln(t)}{1-t} & \leqslant & M & \\ \text{donc} & -\dfrac{t^{n+1}\,\ln(t)}{1-t} & \leqslant & M\,t^n & \textit{(car } t^n > 0\textit{)} \end{array}$$

Finalement :

$\times$ $\forall t \in \,]0,1[, \ 0 < -\dfrac{t^{n+1}\,\ln(t)}{1-t} \leqslant M\,t^n$

$\times$ $\displaystyle\int_0^1 t^n \, dt$ est bien définie car la fonction $t \mapsto t^n$ est continue sur le segment $[0,1]$.

Par critère de comparaison des intégrales généralisées de fonctions continues positives, $\displaystyle\int_0^1 -\dfrac{t^{n+1}\,\ln(t)}{1-t} \, dt$ est convergente.

- De plus, par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant ($0 < 1$) :

$$0 \leqslant \int_0^1 -\frac{t^{n+1}\,\ln(t)}{1-t} \, dt \leqslant \int_0^1 M\,t^n \, dt$$

Or :

$$\int_0^1 M\,t^n \, dt = M \left[\frac{1}{n+1} \, t^{n+1} \right]_0^1 = \frac{M}{n+1}$$

Ainsi :

$$0 \leqslant \int_0^1 -\frac{t^{n+1}\,\ln(t)}{1-t} \, dt \leqslant \frac{M}{n+1}$$

On sait par ailleurs :

$\times$ $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} 0 = 0$

$\times$ $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{M}{n+1} = 0$

$$\boxed{\text{Par théorème d'encadrement : } \lim_{n \to +\infty} \int_0^1 -\frac{t^{n+1}\,\ln(t)}{1-t} \, dt = 0.}$$

□

e) À l'aide de la question ***7.b)***, montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{-\ln(t)}{1-t}\,dt$ converge puis que l'on a :

$$\int_0^1 \frac{-\ln(t)}{1-t}\,dt \;=\; \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \;=\; \frac{\pi^2}{6}$$

Démonstration.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après ***7.b)***, pour tout $t \in \,]0,1[$:

$$-\frac{\ln(t)}{1-t} \;=\; \sum_{k=0}^{n} \big(-t^k\,\ln(t)\big) + \frac{-t^{n+1}\,\ln(t)}{1-t}$$

  De plus :

  × d'après ***7.c)***, pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 -t^k\,\ln(t)\,dt$ est convergente.

  × d'après ***7.d)***, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{-t^{n+1}\,\ln(t)}{1-t}\,dt$ est convergente.

$$\boxed{\text{On en déduit que l'intégrale } \int_0^1 -\frac{\ln(t)}{1-t}\,dt \text{ est convergente}}$$

- De plus :

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 -\frac{\ln(t)}{1-t}\,dt \\
=\;& \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n} \big(-t^k\,\ln(t)\big)\right) dt + \int_0^1 \frac{-t^{n+1}\,\ln(t)}{1-t}\,dt \\
=\;& \sum_{k=0}^{n} \int_0^1 \big(-t^k\,\ln(t)\big)\,dt + \int_0^1 \frac{-t^{n+1}\,\ln(t)}{1-t}\,dt && \textit{(par linéarité de l'intégrale)} \\
=\;& \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)^2} + \int_0^1 \frac{-t^{n+1}\,\ln(t)}{1-t}\,dt && \textit{(d'après \textbf{7.c)})} \\
=\;& \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} + \int_0^1 \frac{-t^{n+1}\,\ln(t)}{1-t}\,dt && \textit{(par décalage d'indice)}
\end{aligned}$$

- Enfin :

  × d'une part, la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k^2}$ est une série de Riemann d'exposant 2 ($2 > 1$). Elle est donc convergente et :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} \;=\; \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$$

  × d'autre part, d'après ***7.d)*** :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{-t^{n+1}\,\ln(t)}{1-t}\,dt \;=\; 0$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \int_0^1 -\frac{\ln(t)}{1-t}\,dt = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.}$$

□

f) En déduire que L est prolongeable par continuité en 1 en posant $L(1) = \dfrac{\pi^2}{6}$.

Démonstration.

- La fonction L est prolongeable par continuité en 1 si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(t)\ dt$ est convergente.
- D'après la question ***7.a)***, $\displaystyle\int_0^1 f(t)\ dt$ est convergente si et seulement si $\displaystyle\int_0^1 \frac{-\ln(t)}{1-t}\ dt$ est convergente.
- D'après la question ***7.e)***, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{-\ln(t)}{1-t}\ dt$ est convergente.

$$\boxed{\text{On en déduit que } L \text{ est prolongeable par continuité en 1.}}$$

- De plus :

$$\begin{array}{rcll} L(1) & = & \displaystyle\int_0^1 f(t)\ dt & \\ & = & \displaystyle\int_0^1 \frac{-\ln(t)}{1-t}\ dt & \textit{(d'après \textbf{7.a)})} \\ & = & \dfrac{\pi^2}{6} & \textit{(d'après \textbf{7.e)})} \end{array}$$

$$\boxed{L(1) = \frac{\pi^2}{6}}$$

□

On note encore L la fonction ainsi prolongée en 1.

8. a) Justifier que la fonction $x \mapsto L(x) + L(-x) - \dfrac{1}{2}\ L(x^2)$ est dérivable sur $]-1,0[$ et sur $]0,1[$ et calculer sa dérivée sur ces intervalles.

Démonstration.

- La fonction $h : x \mapsto L(x^2)$ est dérivable sur $]-1,0[$ et sur $]0,1[$ car elle est la composée $h = L \circ h_1$ de :
  - × $h_1 : x \mapsto x^2$ qui est :
    - dérivable sur $]-1,0[$ et sur $]0,1[$,
    - telle que : $h_1\big(\ ]-1,0[\ \cup\ ]0,1[\ \big) \subset\ ]0,1[$.
  - × L qui est dérivable (car de classe $\mathcal{C}^1$) sur $]0,1[$ d'après ***6.***

  De même, la fonction $x \mapsto L(-x)$ est dérivable sur $]-1,0[$ et sur $]0,1[$.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{La fonction } \varphi : x \mapsto L(x) + L(-x) - \dfrac{1}{2}\ L(x^2) \text{ est donc dérivable sur }]-1,0[\text{ et} \\ \text{sur }]0,1[\text{ en tant que somme de fonctions dérivables sur ces intervalles.}\end{array}}$$

- Soit $x \in \,]-1,0[\, \cup \,]0,1[$.

$$\begin{array}{rcl}
\varphi'(x) & = & L'(x) - L'(-x) - \dfrac{1}{2} \times 2x \times L'(x^2) \\[2mm]
& = & f(x) - f(-x) - x\, f(x^2) \qquad\qquad\qquad \textit{(d'après } \textbf{\textit{6.}}\textit{)} \\[2mm]
& = & -\dfrac{\ln(1-x)}{x} + \dfrac{\ln(1+x)}{-x} + \cancel{x}\ \dfrac{\ln(1-x^2)}{x^{\cancel{2}}} \\[2mm]
& = & -\dfrac{\ln(1-x) + \ln(1+x)}{x} + \dfrac{\ln(1-x^2)}{x} \\[2mm]
& = & -\dfrac{\ln\big((1-x)\,(1+x)\big)}{x} + \dfrac{\ln(1-x^2)}{x} \\[2mm]
& = & -\dfrac{\ln(1-x^2)}{x} + \dfrac{\ln(1-x^2)}{x}
\end{array}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall x \in \,]-1,0[\, \cup \,]0,1[,\ \varphi'(x) = 0.}$$

□

b) En déduire : $\forall x \in [-1,1]$, $L(x) + L(-x) = \dfrac{1}{2}\, L(x^2)$.

Démonstration.

- Tout d'abord, pour tout $x \in [-1,1]$:

$$L(x) + L(-x) = \frac{1}{2}\, L(x^2) \quad \Leftrightarrow \quad \varphi(x) = 0$$

× la fonction φ' est nulle sur **l'intervalle** $]-1,0[$. La fonction φ est donc constante sur cet intervalle. On en déduit qu'il existe $c_1 \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in \,]-1,0[, \quad \varphi(x) = c_1$$

× de même, la fonction φ' est nulle sur **l'intervalle** $]0,1[$. La fonction φ est donc constante sur cet intervalle. On en déduit qu'il existe $c_2 \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in \,]0,1[, \quad \varphi(x) = c_2$$

Commentaire

- Attention, la proposition :

$$\forall x \in \,]-1,0[\, \cup \,]0,1[, \quad \varphi'(x) \ = \ 0$$

ne permet pas directement de conclure que la fonction φ est constante sur $]-1,0[\, \cup \,]0,1[$.

- Par exemple, la fonction ψ définie par :

$$\psi \ : \ \begin{array}{ccc}]-1,0[\, \cup \,]0,1[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } x \in \,]-1,0[\\[2mm] 2 & \text{si } x \in \,]0,1[\end{array} \right. \end{array}$$

admet bien une dérivée nulle sur son ensemble de définition mais n'est pas constante sur ce même ensemble.

- Rappelons la propriété du cours valide :

Soit I un **intervalle** de $\mathbb{R}$.

Soit f une fonction dérivable sur I.

$$\forall x \in I,\ f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ est constante sur } I$$

- De plus, la fonction L est continue en 0. Les fonctions $x \mapsto L(-x)$ et $x \mapsto L(x^2)$ sont donc également continues en 0.

$$\boxed{\text{On en déduit que la fonction } \varphi \text{ est continue en } 0.}$$

- On en conclut :

$$\begin{array}{ccccc} \lim\limits_{x \to 0^-} \varphi(x) & = & \varphi(0) & = & \lim\limits_{x \to 0^+} \varphi(x) \\ \shortparallel & & & & \shortparallel \\ c_1 & & & & c_2 \end{array}$$

De plus, par définition de L :

$$\varphi(0) \ = \ L(0) + L(-0) - \frac{1}{2}\, L(0^2) \ = \ 0$$

Ainsi : $c_1 = 0 = c_2$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall x \in \,]-1,1[,\ \varphi(x) = 0.}$$

- Enfin, d'après ***7.f)***, la fonction L est prolongeable par continuité en 1. On en déduit que φ est prolongeable par continuité en 1. En effet :
  - × la fonction $\varphi_1 : x \mapsto L(-x)$ est continue en 1 car elle est la composée $\varphi_1 = L \circ f_1$ de :
    - f_1 qui est :
      - ▸ continue en 1,
      - ▸ telle que : $f_1(1) = -1$.
    - L qui est continue en -1 d'après ***6.***
  - × la fonction $\varphi_2 : x \mapsto L(x^2)$ est prolongeable par continuité en 1 car elle est la composée $\varphi_2 = L \circ f_2$ de :
    - f_2 qui est :
      - ▸ continue en 1,
      - ▸ telle que : $f_1(1) = 1$.
    - L qui est prolongeable par continuité en 1 d'après ***7.f)***.

  On en déduit :

$$\varphi(1) \ = \ \lim_{x \to 1} \varphi(x) \ = \ 0$$

  De même, la fonction φ est prolongeable par continuité en -1. On en déduit :

$$\varphi(-1) \ = \ \lim_{x \to -1} \varphi(x) \ = \ 0$$

  Ainsi : $\forall x \in [-1,1],\ \varphi(x) = 0$.

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall x \in [-1,1],\ L(x) + L(-x) = \frac{1}{2}\, L(x^2)}$$

Commentaire

On détaille ici précisément le prolongement par continuité de φ en -1 et en 1 pour le lecteur un peu moins à l'aise sur ces considérations. De manière générale, il n'est cependant pas nécessaire de rédiger aussi rigoureusement les questions portant sur la régularité de fonctions. Il est conseillé :

- × de rédiger très proprement la régularité d'une fonction pour les questions que l'on traite en premier. On démontre ainsi au correcteur sa capacité à rédiger ce type de questions.
- × de rédiger très proprement la régularité lorsqu'il s'agit du coeur de la question (« Démontrer que la fonction est continue / de classe $\mathcal{C}^1$ sur ... »).

□

c) Préciser alors la valeur de $L(-1)$.

Démonstration.
D'après la question précédente :

$$\begin{array}{rcl} L(-1) & = & -L\big(-(-1)\big) + \dfrac{1}{2}\, L\big((-1)^2\big) \\ & = & -L(1) + \dfrac{1}{2}\, L(1) \\ & = & -\dfrac{1}{2}\, L(1) \end{array}$$

$$\boxed{\text{D'après , on obtient : } L(-1) = -\frac{1}{2} \times \frac{\pi^2}{6} = -\frac{\pi^2}{12}.}$$

□

Partie C

On considère enfin la fonction Φ définie sur l'ouvert $]-\infty, 0[^2$ par :

$$\Phi : (x,y) \mapsto L(x) + L(y) - L(-xy)$$

On admet que la fonction Φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]-\infty, 0[^2$.

9. a) Calculer, pour tout (x,y) de $]-\infty, 0[^2$, les dérivées partielles d'ordre 1 de Φ au point (x,y).

Démonstration.

- D'après l'énoncé, la fonction Φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]-\infty, 0[^2$. Elle admet donc en particulier des dérivées partielles d'ordre 1 sur cet ouvert.
- Soit $(x,y) \in\,]-\infty, 0[^2$.
  - × d'une part :

$$\begin{array}{rcll} \partial_1(\Phi)(x,y) & = & L'(x) - \big(-y\, L'(-xy)\big) & \\ & = & f(x) + y\, f(-xy) & \textit{(d'après \textbf{6.})} \end{array}$$

  - × d'autre part :

$$\begin{array}{rcll} \partial_2(\Phi)(x,y) & = & L'(y) - \big(-x\, L'(-xy)\big) & \\ & = & f(y) + x\, f(-xy) & \textit{(d'après \textbf{6.})} \end{array}$$

$$\boxed{\forall (x,y) \in\,]-\infty, 0[^2, \left\{ \begin{array}{rcl} \partial_1(\Phi)(x,y) & = & f(x) + y\, f(-xy) \\ \partial_2(\Phi)(x,y) & = & f(y) + x\, f(-xy) \end{array} \right.}$$

□

b) En déduire que Φ admet $(-1,-1)$ comme unique point critique.

Démonstration.
Soit $(x,y) \in\,]-\infty, 0[^2$.

$$\begin{array}{rcl} \begin{array}{c} (x,y) \text{ est un point} \\ \text{critique de } f \end{array} & \Leftrightarrow & \nabla(\Phi)(x,y) = 0_{\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})} \\ & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcl} \partial_1(\Phi)(x,y) & = & 0 \\ \partial_2(\Phi)(x,y) & = & 0 \end{array} \right. \end{array}$$

D'après la question précédente, on obtient :

$$(x,y) \text{ est un point critique de } f \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} f(x) + y\, f(-xy) & = & 0 \\ f(y) + x\, f(-xy) & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} -\dfrac{\ln(1-x)}{x} + \cancel{y}\left(-\dfrac{\ln(1+xy)}{-x\,\cancel{y}}\right) & = & 0 \\[2ex] -\dfrac{\ln(1-y)}{y} + \cancel{x}\left(-\dfrac{\ln(1+xy)}{-\cancel{x}\,y}\right) & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} -\dfrac{\ln(1-x)}{x} + \dfrac{\ln(1+xy)}{x} & = & 0 \\[2ex] -\dfrac{\ln(1-y)}{y} + \dfrac{\ln(1+xy)}{y} & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} -\ln(1-x) + \ln(1+xy) & = & 0 \\ -\ln(1-y) + \ln(1+xy) & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \ln(1+xy) & = & \ln(1-x) \\ \ln(1+xy) & = & \ln(1-y) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 1+xy & = & 1-x \\ 1+xy & = & 1-y \end{array}\right. \qquad \textit{(par injectivité de } \ln \textit{ sur }]0,+\infty[\textit{)}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} -xy & = & x \\ -xy & = & y \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} -xy & = & x \\ x & = & y \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} -x^2 & = & x \\ x & = & y \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} -x & = & 1 \\ x & = & y \end{array}\right. \qquad \textit{(car } x \neq 0\textit{)}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -1 \\ y & = & -1 \end{array}\right.$$

$$\boxed{\text{Finalement, la fonction } \Phi \text{ admet } (-1,-1) \text{ comme unique point critique.}}$$

□

10. a) Montrer que la matrice hessienne, notée H, de Φ au point $(-1,-1)$ est : $H = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

Démonstration.

- D'après l'énoncé, la fonction Φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]-\infty, 0[^2$. Elle admet donc des dérivées partielles d'ordre 2 sur cet ouvert.
- Soit $(x,y) \in]-\infty, 0[^2$.
  - × Tout d'abord :

$$\partial^2_{1,1}(\Phi)(x,y) \;=\; f'(x) + y\big(-y\,f'(-xy)\big) \;=\; f'(x) - y^2\,f'(-xy)$$

  On obtient :

$$\partial^2_{1,1}(\Phi)(-1,-1) \;=\; f'(-1) - (-1)^2 \times f'\big(-(-1)\times(-1)\big) \;=\; f'(-1) - f'(-1) \;=\; 0$$

  - × Ensuite :

$$\partial^2_{2,1}(\Phi)(x,y) \;=\; 1 \times f(-xy) + y \times \big(-x\,f'(-xy)\big) \;=\; f(-xy) - xy\,f'(-xy)$$

  On obtient :

$$\begin{aligned}
\partial^2_{1,1}(\Phi)(-1,-1) &= f\big(-(-1)\times(-1)\big) - (-1)\times(-1)\times f'\big(-(-1)\times(-1)\big) \\
&= f(-1) - f'(-1) \\
&= -\frac{\ln(1-(-1))}{-1} - \frac{\frac{-1}{1-(-1)} + \ln(1-(-1))}{(-1)^2} \qquad \textit{(d'après } \textbf{\textit{2.b)}}\textit{)} \\
&= \ln(2) - \left(-\frac{1}{2} + \ln(2)\right) \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

  - × La fonction Φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]-\infty, 0[^2$. Ainsi, par théorème de Schwarz :

$$\partial^2_{1,2}(\Phi)(x,y) \;=\; \partial^2_{2,1}(\Phi)(x,y) \;=\; f(-xy) - xy\,f'(-xy)$$

  Ainsi : $\partial^2_{1,2}(\Phi)(-1,-1) = \partial^2_{2,1}(\Phi)(-1,-1) = \dfrac{1}{2}$.
  - × Enfin :

$$\partial^2_{2,2}(\Phi)(x,y) \;=\; f'(y) + x\big(-x\,f'(-xy)\big) \;=\; f'(y) - x^2\,f'(-xy)$$

  On obtient :

$$\partial^2_{2,2}(\Phi)(-1,-1) \;=\; f'(-1) - (-1)^2 \times f'\big(-(-1)\times(-1)\big) \;=\; f'(-1) - f'(-1) \;=\; 0$$

- On en déduit :

$$H \;=\; \nabla^2(\Phi)(-1,-1) \;=\; \begin{pmatrix} \partial^2_{1,1}(\Phi)(-1,-1) & \partial^2_{1,2}(\Phi)(-1,-1) \\ \partial^2_{2,1}(\Phi)(-1,-1) & \partial^2_{2,2}(\Phi)(-1,-1) \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{H = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}}$$

□

b) Déterminer les valeurs propres de H.

Démonstration.

- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\det(H - \lambda\, I_2) \;=\; \det\left(\begin{pmatrix} -\lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\lambda \end{pmatrix}\right) \;=\; \lambda^2 - \frac{1}{4} \;=\; \left(\lambda - \frac{1}{2}\right)\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)$$

- Ainsi :

$$\begin{array}{rcl} \lambda \in \operatorname{Sp}(H) & \Leftrightarrow & H - \lambda\, I_2 \text{ non inversible} \\ & \Leftrightarrow & \det(H - \lambda\, I_2) = 0 \\ & \Leftrightarrow & \left(\lambda - \frac{1}{2}\right)\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) = 0 \\ & \Leftrightarrow & \lambda = \frac{1}{2} \;\; \texttt{OU} \;\; \lambda = -\frac{1}{2} \end{array}$$

$$\boxed{\text{On obtient : } \operatorname{Sp}(H) = \{-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\}.}$$

□

11. La fonction Φ présente-t-elle un extremum local sur $]-\infty, 0[^2$?

Démonstration.

- Tout extremum local de Φ sur $]-\infty, 0[^2$ est un point critique de Φ sur cet ouvert.
- Or Φ admet $(-1, -1)$ comme unique point critique. De plus :
  - × d'après la question précédente : $\operatorname{Sp}\left(\nabla^2(\Phi)(-1,-1)\right) = \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$,
  - × de plus : $-\dfrac{1}{2} < 0$ et $\dfrac{1}{2} > 0$.

  On en déduit que $(-1, -1)$ n'est pas un extremum local de Φ (c'est un point col).
- On en déduit qu'aucun point critique de Φ sur $]-\infty, 0[^2$ n'est un extremum local.

$$\boxed{\text{La fonction } \Phi \text{ ne présente donc aucun extremum local sur }]-\infty, 0[^2.}$$

□

Problème (EDHEC 2012)

On désigne par λ, un réel strictement positif et on considère la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$, par :

$$f : x \mapsto \lambda\,|x|\ \mathrm{e}^{-\lambda\,x^2}$$

1. a) Montrer que f est paire.

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcll} f(-x) & = & \lambda\,|-x|\ \mathrm{e}^{-\lambda(-x)^2} & \\ & = & \lambda\,|x|\ \mathrm{e}^{-\lambda x^2} & \textit{(car les fonctions } x \mapsto |x| \textit{ et } x \mapsto x^2 \textit{ sont paires)} \\ & = & f(x) & \end{array}$$

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est paire.}}$$

□

b) Établir que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\ dx$ converge et donner sa valeur.

Démonstration.

- La fonction f est continue sur $[0, +\infty[$ en tant que produits de fonctions continues sur $[0, +\infty[$.
Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\ dx$ est impropre seulement en $+\infty$.
- Soit $B \in [0, +\infty[$.

$$\begin{array}{rcll} \displaystyle\int_0^B f(x)\ dx & = & \displaystyle\int_0^B \lambda\,|x|\ \mathrm{e}^{-\lambda x^2}\ dx & \\ & = & \displaystyle\int_0^B \lambda\,x\ \mathrm{e}^{-\lambda x^2}\ dx & \textit{(car pour tout } x \in [0, B], \textit{ on a : } |x| = x) \\ & = & -\dfrac{1}{2} \displaystyle\int_0^B (-2\lambda\,x)\ \mathrm{e}^{-\lambda x^2}\ dx & \\ & = & -\dfrac{1}{2} \Big[\ \mathrm{e}^{-\lambda x^2}\ \Big]_0^B & \\ & = & -\dfrac{1}{2} \left(\mathrm{e}^{-\lambda B^2} - \mathrm{e}^0\right) & \\ & = & \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\ \mathrm{e}^{-\lambda B^2} & \\ & \underset{B\to+\infty}{\longrightarrow} & \dfrac{1}{2} & \end{array}$$

$$\boxed{\text{On en conclut que l'intégrale } \int_0^{+\infty} f(t)\ dt \text{ est convergente. De plus : } \int_0^{+\infty} f(t)\ dt = \frac{1}{2}.}$$

□

c) Montrer que la fonction f peut être considérée comme densité d'une variable aléatoire X que l'on suppose, dans la suite, définie sur un certain espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

Démonstration.

- La fonction f est continue sur $]-\infty, +\infty[$ par produit de fonctions continues sur $]-\infty, +\infty[$.

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est donc continue sur }]-\infty, +\infty[.}$$

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors, comme $\lambda > 0$, on a :

$$f(x) \quad = \quad \lambda\,|x|\;\mathrm{e}^{-\lambda\, x^2} \;\geqslant\; 0 \qquad \textit{(car } |x| \geqslant 0 \textit{ et } e^{-\lambda\, x^2} > 0\textit{)}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geqslant 0.}$$

- Montrons que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ dx$ converge et vaut 1.

  × D'après la question précédente, l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} f(x)\ dx$ est convergente.

  × Comme la fonction f est paire, on en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(x)\ dx$ est convergente.
  De plus :

$$\int_{-\infty}^{0} f(x)\ dx \;=\; \int_{0}^{+\infty} f(x)\ dx$$

Commentaire

Rappelons que ce point se démontre à l'aide du changement de variable $\boxed{u = -x}$.

$$\left|\begin{array}{l} u = -x \text{ (donc } x = -u) \\ \hookrightarrow du = -\ dx \quad \text{et} \quad dx = -du \\ \bullet\ x = -\infty \ \Rightarrow\ u = +\infty \\ \bullet\ x = 0 \ \Rightarrow\ u = 0 \end{array}\right.$$

Ce changement de variable est valide car $\psi : u \mapsto -u$ est $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$. On obtient :

$$\int_{-\infty}^{0} f(x)\ dx \;=\; \int_{+\infty}^{0} f(-u)(-\ du) \;=\; -\int_{+\infty}^{0} f(u)\ du \;=\; \int_{0}^{+\infty} f(u)\ du$$

  × On en conclut que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ dx$ est convergente. De plus :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ dx &= \int_{-\infty}^{0} f(x)\ dx + \int_{0}^{+\infty} f(x)\ dx \\ &= 2\int_{0}^{+\infty} f(x)\ dx \;=\; 2\,\frac{1}{2} \;=\; 1 \qquad \textit{(d'après la question précédente)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ dx \text{ converge. De plus : } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ dx = 1.}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que la fonction } f \text{ est une densité de probabilité.}}$$

□

2. ***a)*** Justifier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\, f(x)\ dx$.

Démonstration.

- La fonction $x \mapsto xf(x)$ est continue sur $[0, +\infty[$.
  Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} xf(x)\ dx$ est impropre seulement en $+\infty$.
- De plus :
  × $\forall x \in [1, +\infty[,\ xf(x) \geqslant 0$ et $\dfrac{1}{x^2} \geqslant 0$
  × $xf(x) = \lambda\, x\, |x|\ \mathrm{e}^{-\lambda x^2} \underset{x \to +\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$.
  En effet pour $x \geqslant 1$: $\dfrac{xf(x)}{\frac{1}{x^2}} = \lambda\, x^3\, |x|\ \mathrm{e}^{-\lambda x^2} = \lambda\, x^4\ \mathrm{e}^{-\lambda x^2}$.
  En posant le changement de variable $u = x^2$, on obtient :
  $$\lim_{x \to +\infty} \lambda\, x^4\ \mathrm{e}^{-\lambda x^2} \;=\; \lim_{u \to +\infty} \lambda\, u^2\ \mathrm{e}^{-\lambda u} \;=\; \lim_{u \to +\infty} \lambda\, \frac{u^2}{(\mathrm{e}^{\lambda})^u} \;=\; 0 \qquad \textit{(par croissances comparées)}$$
  × l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\ dx$ est convergente en tant qu'intégrale de Riemann impropre en $+\infty$ et d'exposant $2 > 1$.

  Par critère de négligeabilité des intégrales généralisées de fonctions continues positives, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} xf(x)\ dx$ est convergente.
- Enfin, comme la fonction $x \mapsto xf(x)$ est continue sur le **segment** $[0, 1]$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 xf(x)\ dx$ est bien définie.

On en conclut que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} xf(x)\ dx$ est bien convergente.

Commentaire

Il est important de bien lire la question. On demande ici de **justifier la convergence** d'une intégrale impropre. Il n'est donc pas demandé explicitement de calculer cette intégrale. Dans ce cas, il faut privilégier l'utilisation d'un critère de comparaison / équivalence / négligeabilité des intégrales généralisées de fonctions continues positives. Au passage, si ce calcul n'est pas demandé c'est certainement parce qu'il est très technique ou impossible à réaliser dans le cadre du programme ECE.

□

b) En déduire que la variable aléatoire X possède une espérance, notée $\mathbb{E}(X)$, et donner sa valeur.

Démonstration.

- La v.a.r. X admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\ dx$ est absolument convergente, ce qui équivaut à démontrer qu'elle est convergente pour un calcul de moment du type $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^r f(x)\ dx$.

- Or :
  - × d'après la question précédente, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x f(x)\ dx$ est convergente.
  - × comme la fonction f est paire, la fonction $x \mapsto x f(x)$ est impaire.
    Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} x f(x)\ dx$ est convergente. De plus :

$$\int_{-\infty}^{0} x f(x)\ dx \ = \ -\int_0^{+\infty} x f(x)\ dx$$

  - × On en conclut que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\ dx$ est convergente. Enfin :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\ dx \ = \ \int_{-\infty}^{0} x\, f(x)\ dx + \int_0^{+\infty} x\, f(x)\ dx \ = \ 0$$

$$\boxed{\text{La v.a.r. } X \text{ admet donc une espérance. De plus : } \mathbb{E}(X) = 0.}$$

□

3. a) Montrer, grâce à une intégration par parties, que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2\, f(x)\ dx$ converge et donner sa valeur.

Démonstration.

- La fonction $x \mapsto x^2 f(x)$ est continue sur $[0, +\infty[$.
  Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2 f(x)\ dx$ est impropre seulement en $+\infty$.
- Notons par ailleurs que pour tout $x \in [0, +\infty[$:

$$\begin{array}{rcll} x^2 f(x) & = & \lambda\, x^2\, |x|\ \mathrm{e}^{-\lambda x^2} & \\ & = & \lambda\, x^3\ \mathrm{e}^{-\lambda x^2} & \textit{(car pour tout } x \geqslant 0,\ |x| = x\textit{)} \\ & = & -\dfrac{1}{2}\ (-2\,\lambda x)\ \mathrm{e}^{-\lambda x^2} \times x^2 & \end{array}$$

- Soit $B \in [0, +\infty[$.
  On procède alors par intégration par parties (IPP).

$$\left|\ \begin{array}{rclcrcl} u(x) & = & -\frac{1}{2}\, x^2 & \quad & u'(x) & = & -x \\ v'(x) & = & (-2\,\lambda x)\ \mathrm{e}^{-\lambda x^2} & \quad & v(x) & = & \mathrm{e}^{-\lambda x^2} \end{array}\right.$$

  Cette IPP est valide car u et v sont $\mathcal{C}^1$ sur $[0, B]$. On obtient :

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_0^B x^2 f(x)\ dx & = & -\dfrac{1}{2}\ \Big[\ x^2\ \mathrm{e}^{-\lambda x^2}\ \Big]_0^B + \displaystyle\int_0^B x\ \mathrm{e}^{-\lambda x^2}\ dx \\ & = & -\dfrac{1}{2}\ \Big(B^2\ \mathrm{e}^{-\lambda B^2} - \cancel{0\ \mathrm{e}^0}\Big) + \dfrac{1}{\lambda}\displaystyle\int_0^B \lambda\, x\ \mathrm{e}^{-\lambda x^2}\ dx \\ & = & -\dfrac{1}{2}\ B^2\ \mathrm{e}^{-\lambda B^2} + \dfrac{1}{\lambda}\displaystyle\int_0^B f(x)\ dx \end{array}$$

- Or :
  - × en posant le changement de variable $u = B^2$, on obtient :

$$\lim_{B \to +\infty} -\frac{1}{2} B^2 \, e^{-\lambda B^2} = \lim_{u \to +\infty} -\frac{1}{2} u \, e^{-\lambda u} = \lim_{u \to +\infty} -\frac{1}{2} \frac{u}{\left(e^{\lambda}\right)^u} = 0$$ *(par croissances comparées)*

  - × d'après la question ***1.b)*** l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x) \, dx$ est convergente. On en déduit que la quantité $\displaystyle\int_0^B f(x) \, dx$ admet une limite lorsque B tend vers $+\infty$. Plus précisément :

$$\lim_{B \to +\infty} \int_0^B f(x) \, dx = \int_0^{+\infty} f(x) \, dx = \frac{1}{2}$$

On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2 \, f(x) \, dx$ est convergente. De plus : $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2 f(x) \, dx = \frac{1}{2\,\lambda}$.

Commentaire

- Insistons une nouvelle fois sur la formulation de l'énoncé :
  - × en question ***2.a)*** on demande de « Justifier la convergence » d'une intégrale. Il faut alors privilégier l'utilisation d'un critère de comparaison / équivalence / négligeabilité des intégrales généralisées de fonctions continues positives.
  - × en question ***3.a)*** on demande de démontrer qu'une intégrale « converge et donner sa **valeur** ». Il s'agit donc ici d'effectuer un **calcul**.
- Pour le calcul, l'énoncé précise la manière de procéder : il s'agit de réaliser une intégrations par parties. Rien ne peut donc justifier le fait de ne pas savoir commencer ce type de questions puisque l'on donne la méthode à suivre. Il suffit alors de mettre en place la rédaction associée.
- Lors de l'intégration par parties, il y a une initiative à prendre, à savoir quelle fonction on doit dériver (choix de la fonction u) et quelle fonction on doit intégrer (choix de v'). En réalité, il n'y a pas vraiment le choix :
  - × si on pose $u : x \mapsto e^{-\lambda x^2}$, alors on a $v' : x \mapsto \lambda x^3$. Un tel choix n'est pas raisonnable car on a alors :

$$u' : x \mapsto (-2\,\lambda x) \, e^{-\lambda x^2} \quad \text{et} \quad v : x \mapsto \frac{\lambda}{4} \, x^4$$

    Les deux fonctions produites sont plus complexes que les fonctions initiales (on fait grimper le degré des polynômes présents). Cela va à l'encontre de l'idée de simplification contenue dans la méthode de l'IPP.
  - × le cas précédent étant écarté, il faut faire en sorte que la partie $e^{-\lambda x^2}$ apparaisse dans la fonction v' à intégrer. En adjoignant $(-2\,\lambda x)$ à cette quantité, on fait apparaître une forme permettant d'obtenir une primitive usuelle. C'est cette réflexion qui doit mener au choix $v' : x \mapsto (-2\,\lambda x) \, e^{-\lambda x^2}$.
- Notons enfin que le calcul de la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^B x \, e^{-\lambda x^2} \, dx$ a déjà été fait en question ***1.b)***. Il convient alors de se servir du résultat ce qui permet d'éviter d'avoir à refaire le calcul.

□

b) En déduire que la variable aléatoire X possède une variance, notée $\mathbb{V}(X)$, et donner sa valeur.

Démonstration.

- La v.a.r. X admet une variance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\, dx$ est absolument convergente, ce qui équivaut à démontrer qu'elle est convergente pour un calcul de moment du type $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^r f(x)\, dx$.
- Or :
  - × d'après la question précédente, l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} x^2 f(x)\, dx$ est convergente.
  - × comme la fonction f est paire, la fonction $x \mapsto x^2 f(x)$ est elle aussi paire.
    Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} x^2 f(x)\, dx$ est convergente. De plus :
    $$\int_{-\infty}^{0} x^2 f(x)\, dx \;=\; \int_{0}^{+\infty} x^2 f(x)\, dx$$
  - × on en conclut que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\, dx$ est convergente. Enfin :
$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx &= \int_{-\infty}^{0} f(x)\, dx + \int_{0}^{+\infty} f(x)\, dx\\ &= 2 \int_{0}^{+\infty} f(x)\, dx \;=\; 2\,\frac{1}{2\,\lambda} \;=\; \frac{1}{\lambda}\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, la v.a.r. } X \text{ admet un moment d'ordre 2. De plus : } \mathbb{E}\big(X^2\big) = \frac{1}{\lambda}.}$$

- D'après la formule de Kœnig-Huyghens :
$$\mathbb{V}(X) \;=\; \mathbb{E}\big(X^2\big) - \big(\mathbb{E}(X)\big)^2 \;=\; \frac{1}{\lambda} - 0^2 \;=\; \frac{1}{\lambda}$$

$$\boxed{\text{On en conclut que la v.a.r. } X \text{ admet une variance. De plus : } \mathbb{V}(X) = \frac{1}{\lambda}.}$$

Commentaire

- La fonction f étant paire, on peut aisément démontrer que la fonction $x \mapsto x f(x)$ est impaire et que la fonction $x \mapsto x^2 f(x)$ est paire.
- De manière générale, si f est paire alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$:
  - × la fonction $h_1 : x \mapsto x^{2k+1} f(x)$ est impaire. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$\begin{aligned}h_1(-x) &= (-x)^{2k+1} f(-x) \;=\; (-1)^{2k+1} x^{2k+1} f(x) \qquad \textit{(car } f \textit{ est paire)}\\ &= -x^{2k+1} f(x) \;=\; -h_1(x)\end{aligned}$$
  - × la fonction $h_2 : x \mapsto x^{2k} f(x)$ est paire. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$\begin{aligned}h_2(-x) &= (-x)^{2k} f(-x) \;=\; (-1)^{2k} x^{2k} f(x) \qquad \textit{(car } f \textit{ est paire)}\\ &= x^{2k} f(x) \;=\; h_2(x)\end{aligned}$$

Autrement dit, si f est paire, alors la fonction $x \mapsto x^r f(x)$ est paire (resp. impaire) si r est un nombre pair (resp. impair).

□

4. On pose $Y = X^2$ et on admet que Y est une variable aléatoire à densité, elle aussi définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

a) Donner l'expression de la fonction de répartition F_Y de la variable aléatoire Y à l'aide de la fonction de répartition F_X de la variable aléatoire X.

Démonstration.

- Notons $h : x \mapsto x^2$, de sorte que : $Y = h(X)$.

$$\begin{array}{rcl} Y(\Omega) & = & \big(h(X)\big)(\Omega) \ = \ h\big(X(\Omega)\big) \\ & \subseteq & h\big(\,]-\infty, +\infty[\, \big) \\ & \subseteq & [0, +\infty[\end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } Y(\Omega) \subset [0, +\infty[.}$$

Commentaire

Profitons de cette question pour faire une remarque sur la notation $X(\Omega)$.

- Rappelons qu'une v.a.r. X est une application $X : \Omega \to \mathbb{R}$.
Comme la notation le suggère, $X(\Omega)$ est l'image de Ω par l'application X.
Ainsi, $X(\Omega)$ n'est rien d'autre que l'ensemble des valeurs prises par la v.a.r. X :

$$\begin{array}{rcl} X(\Omega) & = & \{X(\omega) \mid \omega \in \Omega\} \\ & = & \{x \in \mathbb{R} \mid \exists \omega \in \Omega, \ X(\omega) = x\} \end{array}$$

Il faut bien noter que dans cette définition aucune application probabilité $\mathbb{P}$ n'apparaît.

- Il est toujours correct d'écrire : $X(\Omega) \ \subseteq \ ]-\infty, +\infty[$.
En effet, cette propriété signifie que toute v.a.r. X est à valeurs dans $\mathbb{R}$, ce qui est toujours le cas par définition de la notion de variable aléatoire.
- Dans le cas des v.a.r. discrètes, il est d'usage relativement courant de confondre :
  - × l'ensemble de valeurs possibles de la v.a.r. X (*i.e.* l'ensemble $X(\Omega)$),
  - × l'ensemble $\{x \in \mathbb{R} \mid \mathbb{P}\big([X = x] \big) \neq 0\}$, ensemble des valeurs que X prend avec probabilité non nulle. Dans le cas qui nous intéresse ici, à savoir X est une v.a.r. discrète, cet ensemble est appelé support de X et est noté $\text{Supp}(X)$.
- Dans le cas des v.a.r. à densité, la détermination de l'ensemble image est plus techniue. Dans certains sujets, l'ensemble image des v.a.r. étudiées sera précisé (« On considère une v.a.r. à valeurs strictement positives »). Si ce n'est pas le cas :
  - × si X suit une loi usuelle, on peut se référer à l'ensemble image donné en cours. Par exemple, si $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1])$, on se permet d'écrire :

    « Comme $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1])$, on **considère** : $X(\Omega) = [0, 1]$. »

  - × si X ne suit pas une loi usuelle, on étudie l'ensemble : $I = \{x \in \mathbb{R} \mid f_X(x) > 0\}$.
    On se permet alors d'écrire :

    « Dans la suite, on **considère** : $X(\Omega) = I$. »

  En **décrétant** la valeur de $X(\Omega)$, on ne commet pas une erreur mais on décide d'ajouter une hypothèse qui ne fait pas partie de l'énoncé. Cette audace permet de travailler avec un ensemble image connu, ce qui permet de structurer certaines démonstrations (l'ensemble image étant connu, on se rappelle que la fonction de répartition, par exemple, s'obtient à l'aide d'une dsijonction de cas).

- Déterminons la fonction de répartition de Y.
  Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent.
  × Si $x < 0$, alors $[Y \leqslant x] = \varnothing$ car $Y(\Omega) = [0, +\infty[$. Ainsi :
  $$F_Y(x) = \mathbb{P}([Y \leqslant x]) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$$
  × Si $x \in [0, +\infty[$:
  $$\begin{aligned} F_Y(x) &= \mathbb{P}\big([Y \leqslant x]\big) \\ &= \mathbb{P}\big(\left[X^2 \leqslant x\right]\big) \\ &= \mathbb{P}\big([\,|X| \leqslant \sqrt{x}]\big) && \textit{(par stricte croissance de la fonction } \sqrt{\cdot} \textit{ sur } [0,+\infty[\textit{)} \\ &= \mathbb{P}\big([-\sqrt{x} \leqslant X \leqslant \sqrt{x}]\big) \\ &= F_X(\sqrt{x}) - F_X(-\sqrt{x}) && \textit{(car } X \textit{ est une v.a.r. à densité)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } F_Y : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in\,]-\infty, 0[\\ F_X(\sqrt{x}) - F_X(-\sqrt{x}) & \text{si } x \in [0, +\infty[\end{cases}.}$$

Commentaire

- Cette question consiste à déterminer la loi de Y, transformée de la v.a.r. X. Ce type de question est extrêmement fréquent dans les sujets traitant de v.a.r. à densité. La résolution de ce type de question ne présente aucune difficulté majeure. Il s'agit simplement de se référer à la rédaction usuelle.
- En particulier, il faut savoir déterminer la loi d'une transformée affine, du carré et de la partie entière d'une v.a.r. à densité X. Cela fait partie du bagage culturel mathématique nécessaire avant d'affronter les écrits de concours.
- Il faut ajouter à ce bagage la détermination de la loi du minimum et du maximum de v.a.r. à densité indépendantes. Il suffit une nouvelle fois de mettre en place la rédaction usuelle associée à ce type de questions. □

b) Déterminer une densité f_Y de Y, puis vérifier que Y suit la loi exponentielle de paramètre λ.

Démonstration.
- La fonction de répartition F_X d'une v.a.r. à densité X est de classe $\mathcal{C}^1$ en tout point où la densité f_X considérée est continue.

  $\boxed{\text{Comme } f_X \text{ est continue sur } \mathbb{R},\ F_X \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}.}$
- On peut alors démontrer que F_Y est :
  × continue sur $\mathbb{R}$.
  × de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 0[\, \cup\,]0, +\infty[$.

  $\boxed{\text{On en déduit que } Y \text{ est une v.a.r. à densité}}$

Commentaire

Il est précisé dans l'énoncé : « on admet que Y est une variable aléatoire à densité ». Il n'est donc pas demandé de développer le point ci-dessus. Toutefois, il est utile de le préciser. Il convient de rappeler qu'une fonction est dérivable (ou même de classe $\mathcal{C}^1$) avant de la dériver.

- On obtient une densité f_Y en dérivant F_Y sur les intervalles **ouverts**.
  Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent :
  × si $x \in \left]-\infty, 0\right[$ alors $f_Y(x) = F_Y'(x) = 0$.
  × si $x \in \left]0, +\infty\right[$ alors :

$$\begin{array}{rcll}
f_Y(x) & = & F_Y'(x) & \\[2mm]
& = & \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\, F_X'(\sqrt{x}) - \dfrac{-1}{2\sqrt{x}}\, F_X'(-\sqrt{x}) & \\[2mm]
& = & \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\, f(\sqrt{x}) + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\, f(-\sqrt{x}) & \\[2mm]
& = & \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\, f(\sqrt{x}) + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\, f(\sqrt{x}) & \textit{(car } f \textit{ est paire)} \\[2mm]
& = & \dfrac{1}{\sqrt{x}}\, f(\sqrt{x}) & \\[2mm]
& = & \dfrac{1}{\sqrt{x}}\, \lambda\, |\sqrt{x}|\, \mathrm{e}^{-\lambda\,(\sqrt{x})^2} & \\[2mm]
& = & \lambda\, \mathrm{e}^{-\lambda\, x} &
\end{array}$$

  × enfin, on **pose** : $f_Y(0) = 0$.

On en conclut que Y admet pour densité la focntion : $f_Y : x \mapsto \left\{\begin{array}{cl} 0 & \text{si } x \neq 0 \\ \lambda \mathrm{e}^{-\lambda\, x} & \text{si } x > 0 \end{array}\right.$.

On reconnaît pour f_Y une densité associée à la loi exponentielle de paramètre λ.

On en conclut : $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$.

☐

c) Retrouver alors sans calcul la valeur de $\mathbb{V}(X)$.

Démonstration.

- D'après question précédente, $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$.
  On en déduit que $Y = X^2$ admet une espérance et une variance.

Ainsi, X admet un moment d'ordre 2 et donc une variance.

- De plus :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{V}(X) & = & \mathbb{E}(X^2) - \big(\mathbb{E}(X)\big)^2 & \textit{(par la formule de Kœnig-Huygens)} \\[2mm]
& = & \mathbb{E}(Y) - \cancel{\big(\mathbb{E}(X)\big)^2} & \textit{(car } \mathbb{E}(X) = 0 \textit{ d'après la question } \textbf{\textit{2.b)}}\textit{)} \\[2mm]
& = & \dfrac{1}{\lambda} & \textit{(car } Y \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)\textit{)}
\end{array}$$

On retrouve $\mathbb{V}(X) = \dfrac{1}{\lambda}$.

☐

5. Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0,1[$.

a) On pose $W = -\dfrac{1}{\lambda}\ \ln(1-U)$ et on admet que W est une variable aléatoire.
Déterminer la fonction de répartition de W et en déduire la loi suivie par la variable aléatoire W.

Démonstration.

- Notons $h : x \mapsto -\dfrac{1}{\lambda}\ \ln(1-x)$, de sorte que $W = h(U)$.
Comme $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1[)$, on considère : $U(\Omega) = [0,1[$. On en déduit :

$$\begin{array}{rcll} W(\Omega) & = & \big(h(U)\big)(\Omega) \ = \ h\big(U(\Omega)\big) \ = \ h\big([0,1[\big) & \\ & = & \Big[h(0), \lim\limits_{x\to 1} h(x)\Big[& \textit{(car } h \textit{ est continue et strictement croissante sur } [0,1[\textit{)} \\ & = & [0,+\infty[& \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } W(\Omega) = [0,+\infty[.}$$

Commentaire

Comme ce n'est pas le coeur de la question, il n'est pas nécessaire de faire l'étude détaillée de la fonction h. On présente ici rapidement les éléments permettant cette étude :

× la fonction h est dérivable (donc en particulier continue) sur $[0,1[$ en tant que composée de fonctions dérivables sur les intervalles adéquats.

× soit $x \in\ ]0,1[$.

$$h'(x) \ = \ -\frac{1}{\lambda}\ \left(-\frac{1}{1-x}\right) \ = \ \frac{1}{\lambda(1-x)} > 0$$

La fonction h est donc strictement croissante sur $[0,1[$.

- Déterminons la fonction de répartition de W.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent.

× Si $x < 0$, alors $[W \leqslant x] = \varnothing$ car $W(\Omega) = [0,+\infty[$. Ainsi :

$$F_W(x) = \mathbb{P}\big(\,[W \leqslant x]\,\big) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$$

× Si $x \in [0,+\infty[$:

$$\begin{array}{rcll} F_W(x) & = & \mathbb{P}([W \leqslant x]) \ = \ \mathbb{P}\left(\left[-\dfrac{1}{\lambda}\ln(1-U) \leqslant x\right]\right) & \\ & = & \mathbb{P}([\ln(1-U) \geqslant -\lambda x]) & \textit{(car } -\lambda < 0\textit{)} \\ & = & \mathbb{P}\left(\left[1-U \geqslant \mathrm{e}^{-\lambda x}\right]\right) & \textit{(car la fonction } \exp \textit{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}\textit{)} \\ & = & \mathbb{P}\left(\left[U \leqslant 1-\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]\right) & \\ & = & F_U\left(1-\mathrm{e}^{-\lambda x}\right) & \\ & = & 1-\mathrm{e}^{-\lambda x} & \textit{(car } 1-e^{-\lambda x} \in [0,1[\textit{)} \end{array}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } F_W : x \mapsto \left\{\begin{array}{cl} 0 & \text{si } x \in\ ]-\infty,0[\\ 1-\mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } x \in [0,+\infty[\end{array}\right. .}$$

- On reconnaît la fonction de répartition associée à la loi $\mathcal{E}(\lambda)$.
  Or, la fonction de répartition caractérise la loi d'une v.a.r.

$$\boxed{\text{On en conclut : } W \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda).}$$

Commentaire

- On a démontré, lors de l'étude de $W(\Omega)$, que h réalise une bijection de $[0,1[$ sur $[0,+\infty[$. Il est possible de déterminer l'expression de $h^{-1} : [0,+\infty[\to [0,1[$.
  Pour ce faire, on remarque que pour tout $x \in [0,1[$ et $y \in [0,+\infty[$, on a :
  $$\begin{aligned} y = h(x) \quad &\Leftrightarrow \quad y = -\frac{1}{\lambda}\ \ln(1-x) \\ &\Leftrightarrow \quad x = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda\, y} \\ &\Leftrightarrow \quad x = h^{-1}(y) \end{aligned}$$
  On démontre ainsi que h^{-1} a pour expression : $h^{-1} : x \mapsto 1 - \mathrm{e}^{-\lambda\, x}$.
- On retrouve ici l'expression de la quantité $1 - \mathrm{e}^{-\lambda\, x}$ apparaissant à la fin de la résolution de la question. Ce n'est pas surprenant car la méthode utilisée ici consiste justement à faire apparaître, étape par étape, la quantité $h^{-1}(x)$. Plus précisément, on a :
  $$F_W(x) \ = \ \mathbb{P}\big(\left[W \leqslant x\right]\big) \ = \ \mathbb{P}\big(\left[h(U) \leqslant x\right]\big) \ = \ \mathbb{P}\big(\left[U \leqslant h^{-1}(x)\right]\big) \ = \ F_U\big(h^{-1}(x)\big)$$
  On comprend mieux pourquoi cette manière de procéder est appelée **méthode d'inversion**.

□

b) En déduire une fonction **Python** dont l'en-tête est `def SimuVaX(lambda)` qui simule la v.a.r. $|X|$.
Vérifier que la probabilité que X prenne des valeurs positives est égale à la probabilité que X prenne des valeurs négatives.
En déduire une fonction **Python**, utilisant `rd.random()`, dont l'en-tête est `def SimuX(lambda)` qui simule la v.a.r. X.

Démonstration.

- Par définition : $Y = X^2$. Ainsi : $\sqrt{Y} = \sqrt{X^2} = |X|$.
  Afin de simuler la v.a.r. $|X|$, il suffit de simuler la v.a.r. $\sqrt{Y}$. Pour ce faire, il suffit de créer une fonction qui renvoie la racine carrée de la valeur obtenue en simulant la v.a.r. Y.
- Or :
  × d'après la question ***4.b)***, la v.a.r. Y suit la loi exponentielle de paramètre λ.
  × d'après la question ***5.a)***, la v.a.r. $W = -\dfrac{1}{\lambda}\ \ln(1-U)$ suit la exponentielle de paramètre λ dès lors que $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1[)$.
- On en déduit la fonction **Scilab** suivante.

```python
import random as rd
import numpy as np
def SimuVaX(lambda) :
    U = rd.random()
    Y = (-1 / lambda) * np.log(1-U)
    AbsX = np.sqrt(Y)
    return AbsX
```

Détaillons les éléments de ce programme :

- en ligne 4, on crée une variable `U` qui simule la v.a.r. U telle que $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1[)$.
- en ligne 5, on crée une variable `Y` qui simule la v.a.r. W telle que $W \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$.
  Comme $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$, la variable `Y` simule aussi la v.a.r. Y.
- en ligne 6, on crée une variable `AbsX` qui simule la v.a.r. $\sqrt{Y} = |X|$.

- Démontrons maintenant : $\mathbb{P}\big([X \leqslant 0]\big) = \dfrac{1}{2} = \mathbb{P}\big([X \geqslant 0]\big)$.

  Pour ce faire, on pose le changement de variable $\boxed{u = -t}$.

$$\left|\begin{array}{l} u = -t \text{ (donc } t = -u) \\ \hookrightarrow du = -\,dt \quad \text{et} \quad dt = -du \\ \\ \bullet\ t = -\infty \ \Rightarrow\ u = +\infty \\ \bullet\ t = 0 \ \Rightarrow\ u = 0 \end{array}\right.$$

  Ce changement de variable est valide car $\psi : u \mapsto -u$ est $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$. On obtient :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\big([X \leqslant 0]\big) &= \int_{-\infty}^{0} f(t)\ dt \\ &= \int_{+\infty}^{0} f(-u)\ (-du) \\ &= \int_{+\infty}^{0} f(u)\ (-du) && \textit{(car } f \textit{ est paire)} \\ &= -\int_{+\infty}^{0} f(u)\ du \\ &= \int_{0}^{+\infty} f(u)\ du \ = \ \mathbb{P}\big([X \geqslant 0]\big) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \mathbb{P}\big([X \leqslant 0]\big) = \mathbb{P}\big([X \geqslant 0]\big).}$$

- La famille $\big([X \leqslant 0], [X > 0]\big)$ est un système complet d'événements. On en déduit :

$$\mathbb{P}\big([X \leqslant 0]\big) + \mathbb{P}\big([X > 0]\big) = 1$$

  Or, comme X est une v.a.r. à densité : $\mathbb{P}\big([X > 0]\big) = \mathbb{P}\big([X \geqslant 0]\big)$. Finalement :

$$\mathbb{P}\big([X \leqslant 0]\big) + \mathbb{P}\big([X > 0]\big) \ = \ \mathbb{P}\big([X \leqslant 0]\big) + \mathbb{P}\big([X \geqslant 0]\big) \ = \ 2\ \mathbb{P}\big([X \leqslant 0]\big) \ = \ 1$$

$$\boxed{\text{On en conclut : } \mathbb{P}\big([X \leqslant 0]\big) = \dfrac{1}{2} = \mathbb{P}\big([X \geqslant 0]\big).}$$

- Remarquons alors : $X = \mathrm{sgn}(X)\ |X|$ où sgn est la fonction :

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{sgn} & : & \mathbb{R} & \to \ \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto \left\{\begin{array}{cl} -1 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{array}\right. \end{array}$$

On a ainsi exprimé X en fonction :

× de la v.a.r. $|X|$, v.a.r. qu'on sait simuler.

× de la v.a.r. $T = \text{sgn}(X)$ dont on peut préciser la loi.
Tout d'abord, par définition $T(\Omega) = \{-1, 1\}$.
De plus, d'après le point précédent, on a :

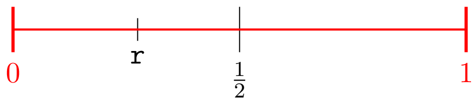
$$\mathbb{P}\big([T = -1] \big) = \mathbb{P}\big([X \leqslant 0] \big) = \frac{1}{2} = \mathbb{P}\big([X \geqslant 0] \big) = \mathbb{P}\big([T = 1] \big)$$

- On en déduit la fonction **Python** suivante :

```
1 def SimuX(lambda) :
2     r = rd.random()
3     if r <= 1/2 :
4         T = -1
5     else :
6         T = 1
7     AbsX = SimuVaX(lambda)
8     X = T * AbsX
9     return X
```

Détaillons les éléments de ce programme :

– on cherche tout d'abord à créer une variable `T` permettant de simuler la v.a.r. T.
Pour ce fiare, on commence par créer, en ligne 2, une variable `r` qui simuler une v.a.r. U telle que $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$. On procède alors comme suit.
L'appel `rand()` renvoie un réel `r` choisit aléatoirement dans $[0, 1]$:



Le réel `r` appartient à l'intervalle $[0, \frac{1}{2}]$ avec probabilité :

$$\mathbb{P}\big(\big[U \in [0, \tfrac{1}{2}]\big] \big) \ = \ \mathbb{P}\left(\left[U \leqslant \tfrac{1}{2}\right]\right) \ = \ \frac{1}{2} \ = \ \mathbb{P}\big([T = -1] \big)$$

Le réel `u` appartient à l'intervalle $]\frac{1}{2}, 1]$ avec probabilité :

$$\mathbb{P}\big(\big[U \in]\tfrac{1}{2}, 1]\big] \big) \ = \ \mathbb{P}\left(\left[U > \tfrac{1}{2}\right]\right) \ = \ \frac{1}{2} \ = \ \mathbb{P}\big([T = 1] \big)$$

Ces éléments expliquent la démarche des lignes 2 à 6. Plus précisément :

▸ si le réel `r` est dans l'intervalle $[0, \frac{1}{2}]$ (ce qui se produit avec probabilité $\frac{1}{2}$) la variable `T` est affectée à -1.

▸ si le réel `r` est dans l'intervalle $[\frac{1}{2}, 1]$ (ce qui se produit avec probabilité $\frac{1}{2}$) la variable `T` est affectée à 1.

– en ligne 7, on crée une variable `AbsX` qui simule la v.a.r. $|X|$ à l'aide de la fonction `SimuVaX`.

– en ligne 8, on crée une variable `X` qui simule la v.a.r. $X = T \times |X|$.

Commentaire

Afin de permettre une bonne compréhension des mécanismes en jeu, on a détaillé avec beaucoup de précision la réponse à cette question. Cependant, écrire correctement les programmes **Python** démontre la bonne compréhension de l'algorithme demandé et permet d'obtenir tous les points alloués à cette question.

□

On suppose, dans la suite, que le paramètre λ est inconnu et on souhaite l'estimer en utilisant la loi de Y.
On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et on considère n v.a.r. $Y_1, \ldots, Y_n$, supposées définies sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. On suppose qu'elles sont indépendantes et de même loi que Y.

6. On considère des réels $x_1, \ldots, x_n$ strictement positifs, ainsi que la fonction L, à valeurs dans $\mathbb{R}$, définie sur $]0,+\infty[$ par : $\forall \lambda \in]0,+\infty[$, $L(\lambda) = \prod\limits_{k=1}^{n} f_Y(x_k)$.

a) Exprimer $L(\lambda)$, puis $\ln\big(L(\lambda)\big)$ en fonction de λ, $x_1, \ldots, x_n$.

Démonstration.
Soit $\lambda \in]0,+\infty[$.

- Tout d'abord :

$$\begin{aligned}
L(\lambda) &= \prod_{k=1}^{n} f_Y(x_k) \\
&= \prod_{k=1}^{n} \lambda \, \mathrm{e}^{-\lambda x_k} \\
&= \left(\prod_{k=1}^{n} \lambda\right) \times \left(\prod_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{-\lambda x_k}\right) \\
&= \lambda^n \times \exp\left(\sum_{k=1}^{n} (-\lambda x_k)\right) \\
&= \lambda^n \times \exp\left(-\lambda \sum_{k=1}^{n} x_k\right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } \lambda \in]0,+\infty[,\ L(\lambda) = \lambda^n \times \exp\left(-\lambda \sum_{k=1}^{n} x_k\right).}$$

- Ensuite :

$$\begin{aligned}
\ln\big(L(\lambda)\big) &= \ln\left(\lambda^n \times \exp\left(-\lambda \sum_{k=1}^{n} x_k\right)\right) \\
&= \ln(\lambda^n) + \ln\left(\exp\left(-\lambda \sum_{k=1}^{n} x_k\right)\right) && \textit{(par propriété de la fonction } \ln\textit{)} \\
&= n\ln(\lambda) - \lambda \sum_{k=1}^{n} x_k
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } \lambda \in]0,+\infty[,\ \ln(L(\lambda)) = n\ln(\lambda) - \lambda \sum_{k=1}^{n} x_k.}$$

□

b) On considère la fonction φ, définie pour tout réel λ de $]0, +\infty[$ par $\varphi(\lambda) = n\ln(\lambda) - \lambda \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$.
Montrer que la fonction φ admet un maximum, atteint en un seul réel que l'on notera z et que l'on exprimera en fonction de $x_1, \ldots, x_n$.
Que peut-on dire de z pour la fonction L ?

Démonstration.

- La fonction φ est dérivable sur $]0, +\infty[$ en tant que somme de :
  - $\times$ $\lambda \mapsto n\ \ln(\lambda)$ dérivable sur $]0, +\infty[$.
  - $\times$ $\lambda \mapsto \left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k\right) \lambda$ dérivable sur $]0, +\infty[$ en tant que fonction polynomiale.

    (dans l'expression de cette fonction, on met en avant que la variable est ici λ)
- Soit $\lambda > 0$.
$$\varphi'(\lambda) = \frac{n}{\lambda} - \sum_{k=1}^{n} x_k$$
  On obtient alors :
$$\begin{aligned} \varphi'(\lambda) \geqslant 0 &\Leftrightarrow \frac{n}{\lambda} - \sum_{k=1}^{n} x_k \geqslant 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{n}{\lambda} \geqslant \sum_{k=1}^{n} x_k \\ &\Leftrightarrow \frac{\lambda}{n} \leqslant \frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n} x_k} && \textit{(car } x \mapsto \frac{1}{x} \textit{ est strictement croissante sur }]0,+\infty[\textit{)} \\ &\Leftrightarrow \lambda \leqslant \frac{n}{\sum\limits_{k=1}^{n} x_k} \end{aligned}$$
- On en déduit le tableau de variations suivant où l'on a noté $z = \dfrac{n}{\sum\limits_{k=1}^{n} x_k}$:

λ	0		z		$+\infty$
Signe de $\varphi'(\lambda)$		$+$	0	$-$	
Variations de φ	$-\infty$	$\nearrow$	$\varphi(z)$	$\searrow$	$-\infty$

$$\boxed{\text{La fonction } \varphi \text{ admet un unique maximum en } z = \frac{n}{\sum\limits_{k=1}^{n} x_k}.}$$

- Comme φ admet un maximum en z alors pour tout $\lambda > 0$, on a : $\varphi(\lambda) \leqslant \varphi(z)$. Or :
$$\begin{aligned} \varphi(\lambda) \leqslant \varphi(z) &\Leftrightarrow \ln\big(L(\lambda)\big) \leqslant \ln\big(L(z)\big) && \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{6.a)}}\textit{)} \\ &\Leftrightarrow L(\lambda) \leqslant L(z) && \textit{(car la fonction } \exp \textit{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}\textit{)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que } z \text{ est l'unique maximum de la fonction } L.}$$

□

Commentaire

- Dans cette question, on dispose initialement d'un n-uplet d'observations $(x_1, \dots, x_n)$. Plus précisément, $(x_1, \dots, x_n)$ est une réalisation d'un n-échantillon $(Y_1, \dots, Y_n)$ de la v.a.r. Y. La loi de Y dépend d'un paramètre λ, a priori inconnu et qu'on cherche à déterminer. Pour ce faire, une idée naturelle consiste à considérer que la valeur λ qui a permis de générer les observations est celle qui avait la plus grande probabilité de les générer. C'est cette idée qui guide la méthode dite du maximum de vraisemblance, dont la question ci-dessus est une illustration. Le réel z est précisément la valeur du paramètre λ maximisant la réalisation des observations initiales. Au passage, remarquons que les notations sont ici malheureuses. Il aurait été préférable de noter $(y_1, \dots, y_n)$ les observations et $\hat{\lambda}$ le réel z.
- La méthode du maximum de vraisemblance conduit à considérer la v.a.r. construite à l'aide de ce maximum. C'est l'objet de la question suivante où l'on étudie la v.a.r. Z_n.
  On reviendra sur ce point dans le chapitre « Estimation ».

7. On pose dorénavant, toujours avec n supérieur ou égal à 2 , $Z_n = \dfrac{n}{\sum\limits_{k=1}^{n} Y_k}$.

On admet que Z_n est une variable aléatoire définie, elle aussi, sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.
La suite $(Z_n)_{n\geqslant 2}$ est appelée estimateur du maximum de vraisemblance pour λ.

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la v.a.r. S_n par : $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} Y_k$.
On admet le résultat suivant :
Soient X et Y deux v.a.r. à densité indépendantes définies sur le même espace probabilisé, de densités respectives f_X et f_Y telles que f_X et f_Y soient bornées.
Alors la v.a.r. $X + Y$ est une v.a.r. à densité et une densité de $X + Y$ est donnée par la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\, f_Y(x-t)\ dt$$

En utilisant la propriété admise, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la v.a.r. S_n est une v.a.r. à densité et admet pour densité la fonction f_n définie par :

$$f_n : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \dfrac{\lambda^n}{(n-1)!}\ t^{n-1}\ \mathrm{e}^{-\lambda\, t} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$$

Démonstration.
Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$,

où $\mathcal{P}(n)$: $f_n : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \dfrac{\lambda^n}{(n-1)!}\ t^{n-1}\ \mathrm{e}^{-\lambda\, t} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$.

▶ **Initialisation** :
Par définition : $S_1 = \sum\limits_{j=1}^{1} Y_j = Y_1$ et donc : $S_1 \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$. On en déduit :

$$f_1 : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \lambda\ \mathrm{e}^{-\lambda\, t} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$$

Or, pour tout $t \geqslant 0$, on a : $\dfrac{\lambda^1}{(1-1)!}\ t^{1-1}\ \mathrm{e}^{-\lambda\, t} \ = \ \dfrac{\lambda}{0!}\ t^0 \mathrm{e}^{-\lambda\, t} \ = \ \lambda\ \mathrm{e}^{-\lambda\, t}$.
D'où $\mathcal{P}(1)$.

▸ **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ $\left(i.e. : f_{n+1} : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \dfrac{\lambda^{n+1}}{n!} \, t^n \, \mathrm{e}^{-\lambda t} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases} \right)$.

- Par définition : $S_{n+1} = \sum\limits_{j=1}^{n+1} Y_j = \sum\limits_{j=1}^{n} Y_j + Y_{n+1} = S_n + Y_{n+1}$.

  Comme pour tout $j \in [\![1, n+1]\!]$, $Y_j(\Omega) \subset [0, +\infty[$, alors $S_{n+1}(\Omega) \subset [0, +\infty[$.

  $$\boxed{\text{On en déduit : } S_{n+1}(\Omega) \subset [0, +\infty[.}$$

- D'autre part, les v.a.r. S_n et Y_{n+1} :
  × sont des variables à densité.
  En effet, par hypothèse de récurrence, S_n admet pour densité f_n.
  Et par définition, Y_{n+1} admet pour densité la fonction f.
  × sont indépendantes.
  En effet, d'après l'énoncé, $(Y_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de v.a.r. mutuellement indépendantes. On en déduit, par lemme des coalitions que les v.a.r. $S_n = Y_1 + \ldots + Y_n$ et Y_{n+1} sont indépendantes.
  × admettent pour densités des fonctions bornées.
  La fonction f_n est bien bornée sur $\mathbb{R}$: $\forall t \in \mathbb{R}$, $0 \leqslant f_n(t) \leqslant f_n(n-1)$ $(*)$.
  La fonction f est également bornée sur $\mathbb{R}$: $\forall t \in \mathbb{R}$, $0 \leqslant f(t) \leqslant \mathrm{e}^{-0} = 1$.

- On en déduit, d'après le théorème de l'énoncé, que la v.a.r. S_{n+1} admet une densité f_{n+1} définie par :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R},\ f_{n+1}(x) &= f_{S_n + Y_{n+1}}(x) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{S_n}(t)\, f_{Y_{n+1}}(x-t) \ dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)\, f(x-t) \ dt \end{aligned}$$

- Soit $x \in \mathbb{R}$.
  Deux cas se présentent alors :
  × si $x < 0$ alors $f_{n+1}(x) = 0$ car $S_{n+1}(\Omega) \subset\ [0, +\infty[$.
  × si $x \geqslant 0$ alors emarquons que pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f_n(t) f(x-t) \neq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} f_n(t) \neq 0 \\ f(x-t) \neq 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} t \in [0, +\infty[\\ x - t \in [0, +\infty[\end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} t \geqslant 0 \\ x - t \geqslant 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \ 0 \leqslant t \leqslant x \right. \end{aligned}$$

  On en déduit : $f_n(t) f(x-t) \neq 0 \ \Leftrightarrow \ t \in [0, x]$. Et ainsi :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t) f(x-t) \ dt = \int_{0}^{x} f_n(t) f(x-t) \ dt$$

  car $t \mapsto f_n(t) f(x-t)$ est nulle en dehors de $[0, x]$.

Ainsi :

$$\begin{array}{rcl}
f_{n+1}(x) & = & \displaystyle\int_0^x f_n(t)\, f(x-t)\ dt \\
& = & \displaystyle\int_0^x \left(\frac{\lambda^n}{(n-1)!}\ t^{n-1}\ \mathrm{e}^{-\lambda\, t}\right)\ \left(\lambda\ \mathrm{e}^{-\lambda\,(x-t)}\right)\ dt \quad \textit{(par définition de } f_n\textit{)} \\
& = & \displaystyle\frac{\lambda^{n+1}}{(n-1)!}\ \mathrm{e}^{-\lambda\, x} \int_0^x t^{n-1}\mathrm{e}^{-\lambda\, t+\lambda\, t}\ dt \\
& = & \displaystyle\frac{\lambda^{n+1}}{(n-1)!}\ \mathrm{e}^{-\lambda\, x} \int_0^x t^{n-1}\ dt \\
& = & \displaystyle\frac{\lambda^{n+1}}{(n-1)!}\ \mathrm{e}^{-\lambda\, x} \left[\ \frac{t^n}{n}\ \right]_0^x \ = \ \frac{\lambda^{n+1}}{n!}\ x^n\ \mathrm{e}^{-\lambda\, x}
\end{array}$$

Finalement, on a bien : $\forall x \in \mathbb{R},\ f_{n+1} : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{\lambda^{n+1}}{n!}\ x^n\ \mathrm{e}^{-\lambda\, x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$.

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ f_n : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \dfrac{\lambda^n}{(n-1)!}\ x^{n-1}\ \mathrm{e}^{-\lambda\, x} & \text{si } x > 0 \end{cases}.}$$

Commentaire

- L'objectif de cette question est l'application du théorème du produit de convolution. C'est pourquoi on ne détaille pas la démonstration du caractère borné de f_n $(*)$. Celle-ci s'effectue par étude de fonction détaillée ci-dessous.
- Soit $n \geqslant 2$ (le cas $n = 1$ correspond au cas $f_1 = f$).
  - La fonction f_n est dérivable sur $[0, +\infty[$ en tant que produit de fonctions dérivables sur cet intervalle. Soit $x \in [0, +\infty[$.

$$f_n'(x) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!}\ \left((n-1)\, x^{n-2}\, \mathrm{e}^{-\lambda\, x} - x^{n-1}\mathrm{e}^{-x}\right) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!}\ x^{n-2}\, \mathrm{e}^{-\lambda\, x}\ (n-1-x)$$

    Comme $\frac{\lambda^n}{(n-1)!} > 0$, $x^{n-2} \geqslant 0$ et $\mathrm{e}^{-\lambda\, x} > 0$, alors $f_n'(x)$ est du signe de $n-1-x$.
    En particulier : $f_n'(x) \geqslant 0 \ \Leftrightarrow\ x \leqslant n-1$.
  - On en déduit le tableau de variations suivant :

x	0		$n-1$		$+\infty$
Signe de $f_n'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de f_n	0	$\nearrow$	$f_n(n-1)$	$\searrow$	0

  On en déduit que f_n est bornée. Plus précisément : $\forall x \in \mathbb{R},\ 0 \leqslant f_n(x) \leqslant f_n(n-1)$. □

b) Soit $n \geqslant 2$. En remarquant que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_{n-1}(t)\, dt = 1$, montrer que Z_n possède une espérance et : $\mathbb{E}(Z_n) = \dfrac{n}{n-1}\,\lambda$.

Démonstration.
Soit $n \geqslant 2$.

- D'après la question précédente, S_n admet f_n pour densité.
- D'après le théorème de transfert, la v.a.r. $Z_n = \dfrac{n}{S_n}$ admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{n}{t}\, f_n(t)\, dt$ est absolument convergente.
- Or, comme f_n est nulle en dehors de $[0, +\infty[$, on a :
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{n}{t}\, f_n(t)\, dt = \int_0^{+\infty} \frac{n}{t}\, f_n(t)\, dt$$
Les fonctions en présence étant positives sur $[0, +\infty[$, l'absolue convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{n}{t}\, f_n(t)\, dt$ équivaut à sa convergence.
- Remarquons alors que pour tout $t \in [0, +\infty[$:
$$\begin{aligned} \frac{n}{t}\, f_n(t) &= \frac{n}{t}\, \frac{\lambda^n}{(n-1)!}\, t^{n-1}\, \mathrm{e}^{-\lambda\, t} \\ &= n\, \frac{\lambda^n}{(n-1)!}\, t^{n-2}\, \mathrm{e}^{-\lambda\, t} \\ &= \frac{n}{n-1}\, \frac{\lambda^n}{(n-2)!}\, t^{n-2}\, \mathrm{e}^{-\lambda\, t} \\ &= \frac{n}{n-1}\, \lambda\, \frac{\lambda^{n-1}}{(n-2)!}\, t^{n-2}\, \mathrm{e}^{-\lambda\, t} \\ &= \frac{n}{n-1}\, \lambda\, f_{n-1}(t) \end{aligned}$$
On reconnaît, à une constante multiplicative près, l'expression de f_{n-1} sur $[0, +\infty[$. La fonction f_{n-1} étant une densité de probabilité, on en déduit que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_{n-1}(t)\, dt$ est convergente.
De plus, comme f_{n-1} est nulle en dehors de $[0, +\infty[$, on a :
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{n-1}(t)\, dt \ = \ \int_0^{+\infty} f_{n-1}(t)\, dt$$
On ne change pas la nature d'une intégrale impropre par multiplication par un réel non nul de son intégrande. Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{n}{t}\, f_n(t)\, dt$ est convergente.

$$\boxed{\text{On en conclut que, pour tout } n \geqslant 2, \text{ la v.a.r. } Z_n = \frac{n}{S_n} \text{ admet une espérance.}}$$

Commentaire

Il est à noter que l'on ne connaît pas la loi de la v.a.r. Z_n. C'est tout l'intérêt du théorème de transfert : on exprime sous forme intégrale (resp. d'une somme) l'espérance, si elle existe, de toute v.a.r. qui s'exprime comme transformée d'une v.a.r. à densité (resp. discrète).
C'est le cas ici : $Z_n = g(S_n)$ où $g : t \mapsto \frac{n}{t}$ et S_n est une v.a.r. à densité.

- De plus :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Z_n) &= \mathbb{E}\left(\frac{n}{S_n}\right) \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{n}{t}\, f_n(t)\, dt \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{n}{n-1}\, \lambda\, f_{n-1}(t)\, dt \\
&= \frac{n}{n-1}\, \lambda \int_0^{+\infty} f_{n-1}(t)\, dt \\
&= \frac{n}{n-1}\, \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f_{n-1}(t)\, dt \\
&= \frac{n}{n-1}\, \lambda & \textit{(car } f_{n-1} \textit{ est une densité de probabilité)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \geqslant 2,\ \mathbb{E}(Z_n) = \frac{n}{n-1}\, \lambda}$$

□

c) **Seulement pour les cubes** : Déterminer un estimateur Z'_n, fonction simple de Z_n qui soit un estimateur sans biais de λ.

Démonstration.
Soit $n \geqslant 2$.

- D'après la question précédente : $\mathbb{E}(Z_n) = \dfrac{n}{n-1}\, \lambda$. Or :

$$\mathbb{E}(Z_n) = \frac{n}{n-1}\, \lambda \ \Leftrightarrow\ \frac{n-1}{n}\, \mathbb{E}(Z_n) = \lambda \ \Leftrightarrow\ \mathbb{E}\left(\frac{n-1}{n}\, Z_n\right) = \lambda$$

- Notons alors : $Z'_n = \dfrac{n-1}{n}\, Z_n = \dfrac{n-1}{\cancel{n}}\, \dfrac{\cancel{n}}{\sum\limits_{k=1}^{n} Y_k} = \dfrac{n-1}{\sum\limits_{k=1}^{n} Y_k}$. Or :
  × $(Y_1, \dots, Y_n)$ est un n-échantillon de la v.a.r. Y.
  × Z'_n s'exprime en fonction des v.a.r. $Y_1, \dots, Y_n$ et cette expression ne fait pas apparaître λ.

  On en conclut que Z'_n est un estimateur de λ.

$$\boxed{\text{Enfin, comme } \mathbb{E}(Z'_n) = \lambda, \text{ la v.a.r. } Z'_n \text{ est un estimateur sans biais de } \lambda.}$$

□