DS7 (version A) /189

Exercice 1 /37

On note E l'espace vectoriel des fonctions polynomiales réelles de degré inférieur ou égal à 2.
On note e_0, e_1, e_2 les fonctions définies, pour tout réel x par :

$$e_0(x) = 1, \quad e_1(x) = x \quad \text{et} \quad e_2(x) = x^2$$

et on rappelle que $\mathscr{B} = (e_0, e_1, e_2)$ est une base de E.
Soit f l'application qui à toute fonction polynomiale P de E associe la fonction $Q = f(P)$, où Q est la dérivée seconde de l'application qui à tout réel x associe $(x^2 - x)P(x)$.

1. a) Montrer que f est un endomorphisme de E.

- **2 pts : f est à valeurs dans E**
- **2 pts : f est une application linéaire (dont 1 pt pour citer la linéarité de la dérivation)**

b) Déterminer $f(e_0)$, $f(e_1)$ et $f(e_2)$ en fonction de e_0, e_1 et e_2.

- **1 pt :** $f(e_0) = 2 \cdot e_0$
- **1 pt :** $f(e_1) = -2 \cdot e_0 + 6 \cdot e_1$
- **1 pt :** $f(e_2) = -6 \cdot e_1 + 12 \cdot e_2$

c) En déduire que la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$ est $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 6 & -6 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$.

- **2 pts :** $\text{Mat}_{\mathscr{B}}(f(e_0)) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$**,** $\text{Mat}_{\mathscr{B}}(f(e_1)) = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ **et** $\text{Mat}_{\mathscr{B}}(f(e_2)) = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 12 \end{pmatrix}$

  (seulement 1 pt à la question si justification imprécise)

d) Montrer sans calcul que f est un automorphisme de E.

- **1 pt : A est triangulaire supérieure et tous les coefficients diagonaux de A sont non nuls donc A est inversible**
- **1 pt : A est inversible donc f bijectif**

2. a) Donner les valeurs propres de f, puis en déduire que f est diagonalisable.

- **1 pt : A est triangulaire supérieure donc les coefficients diagonaux de A sont les valeurs propres de A**
- **1 pt :** $\text{Sp}(f) = \text{Sp}(A) = \{2, 6, 12\}$
- **1 pt :** $\dim(E) = 3$ **et f admet 3 valeurs propres distinctes, donc f diagonalisable**

b) Déterminer les sous-espaces propres de f.

- **3 pts :** $E_2(f) = \text{Vect}\,(e_0)$
  - × **1 pt : écriture du système**
  - × **1 pt : résolution du système** ($\{\ y = z = 0$)
  - × **1 pt : obtention** $E_2(f)$
- **2 pts :** $E_6(f) = \text{Vect}\,(e_0 - 2e_1)$
- **2 pts :** $E_{12}(f) = \text{Vect}\,(e_0 - 5e_1 + 5e_2)$

(**-1 pt si confusion d'objets**)

3. ***a)*** Justifier l'existence d'une matrice P inversible dont la première ligne ne contient que des « 1 » telle que $A = PDP^{-1}$, où $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$.

- **1 pt :** $\mathscr{B}' = (e_0, e_0 - 2e_1, e_0 - 5e_1 + 5e_2)$ **base de vecteurs propres**
- **1 pt : Formule de changement de base citée :** $\text{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} \text{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}$
- **1 pt :** $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$
- **1 pt :** $\text{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$

b) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = PD^nP^{-1}$.

- **1 pt : initialisation**
- **2 pts : hérédité**
  - × **1 pt : utilisation hypothèse de récurrence**
  - × **1 pt : utilisation *3.a)***

4. ***a)*** Déterminer la matrice P^{-1}.

- **3 pts :** $P^{-1} = \dfrac{1}{10} \begin{pmatrix} 10 & 5 & 3 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(**-1 pt à la question si introduction de fractions avant la fin + erreur de calcul**)

b) En déduire explicitement, en fonction de n, la matrice A^n.

- **2 pts : première multiplication correcte**

$$P\,D^n \;=\; \begin{pmatrix} 2^n & 6^n & 12^n \\ 0 & -2\cdot 6^n & -5\cdot 12^n \\ 0 & 0 & 5\cdot 12^n \end{pmatrix} \quad \textbf{ou} \quad D^n\,P^{-1} \;=\; \begin{pmatrix} 10\cdot 2^n & 5\cdot 2^n & 3\cdot 2^n \\ 0 & -5\cdot 6^n & 5\cdot 6^n \\ 0 & 0 & 2\dot{1}2^n \end{pmatrix}$$

- **1 pt : deuxième multiplication correcte pour obtenir**

$$A^n \;=\; \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 10\cdot 2^n & 5(2^n - 6^n) & 3\cdot 2^n - 5\cdot 6^n + 2\cdot 12^n \\ 0 & 10\cdot 6^n & 10(6^n - 12^n) \\ 0 & 0 & 10\cdot 12^n \end{pmatrix}$$

c) On dit qu'une suite de matrices (M_n) tend vers la matrice M, lorsque n tend vers $+\infty$, si chaque coefficient de M_n tend vers le coefficient situé à la même place dans M.
On pose $B = \dfrac{1}{12}\, A$. Montrer que la suite (B^n) tend vers une matrice J vérifiant $J^2 = J$.

- **2 pts :** $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} B^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = J$
- **1 pt : Vérification** $J^2 = J$

Exercice 2 /72

Partie A

On considère l'application f définie sur $]-\infty, 1[$ par :

$$f : t \mapsto \begin{cases} -\dfrac{\ln(1-t)}{t} & \text{si } t \in\,]-\infty, 0[\, \cup\,]0, 1[\\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $]-\infty, 1[$.

- **1 pt :** f **continue sur** $]-\infty, 0[$ **et sur** $]0, 1[$
- **1 pt :** f **continue en** 0

2. a) Démontrer : $\forall t \in\,]-\infty, 1[,\ \dfrac{t}{1-t} + \ln(1-t) \geqslant 0$.

- **1 pt :** $g : t \mapsto \dfrac{t}{1-t} + \ln(1-t)$ **dérivable sur** $]-\infty, 1[$
- **1 pt :** $g' : t \mapsto \dfrac{t}{(1-t)^2}$
- **1 pt :** g **admet** 0 **pour minimum en** 0.

b) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, 1[$ et déterminer f' sur ces intervalles.

- **1 pt :** f **de classe** $\mathcal{C}^2$ **sur** $]-\infty, 0[$ **et sur** $]0, 1[$
- **1 pt :** $f' : t \mapsto \dfrac{\frac{t}{1-t} + \ln(1-t)}{t^2}$

c) En déduire la monotonie de f sur $]-\infty, 1[$.

- **1 pt :**

t	$-\infty$	0	1
Signe de $f'(t)$	$+$	‖ $+$	‖
Variations de f	↗	1 ↗	‖

3. a) Donner le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $t \mapsto \ln(1-t)$.

- **1 pt :** $\ln(1-t) = -t - \dfrac{t^2}{2} + \underset{t\to 0}{o}(t^2)$

b) Montrer que f est dérivable en 0 et : $f'(0) = \dfrac{1}{2}$.

- **1 pt :** $\tau_0(f)(t) = -\dfrac{\ln(1-t)+t}{t^2}$
- **1 pt :** $\ln(1-t)+t = \dfrac{t^2}{2} + \underset{t\to 0}{o}(t^2)$
- **1 pt :** $\tau_0(f)(t) \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{2}$

c) Montrer enfin que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 1[$.

- **1 pt : f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, 1[$.**
- **1 pt : f dérivable en 0 d'après la question précédente**
- **1 pt :** $f'(t) \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{2}$
- **1 pt : f' continue en 0**

4. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en 1.

- **1 pt :** $\lim\limits_{t\to 1} f(t) = +\infty$
- **2 pts :** $\lim\limits_{t\to -\infty} f(t) = 0$
  - × **1 pt : changement de variable** $\boxed{u = 1-t}$
  - × **1 pt : croissances comparées**

5. Tracer l'allure de la courbe représentative de f dans un repère orthonormé en faisant apparaître la tangente en 0.

- **4 pts : propreté, monotonie, limites, tangente en 0**

Partie B

On considère maintenant la fonction L définie sur $]-\infty, 1[$ par :

$$L : x \mapsto \int_0^x f(t)\, dt$$

On rappelle que la série $\sum\limits_{k\geqslant 1} \dfrac{1}{k^2}$ converge et on admet : $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{k^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$.

6. Justifier que L est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 1[$ et préciser L' sur $]-\infty, 1[$.

- **1 pt : D'après la question *1.*, la fonction f est continue sur $]-\infty, 1[$. Elle admet donc une primitive F de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 1[$.**
- **1 pt :** $L' = f$

7. **Étude de L en** 1 :

a) Démontrer, à l'aide d'un changement de variable :

$$\forall (A,B) \in\,]0,1[^2, \quad \int_A^B f(t)\, dt \ = \int_{1-B}^{1-A} \frac{-\ln(t)}{1-t}\, dt$$

- **1 pt : Ce changement de variable est valide car $\psi : u \mapsto 1-u$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment d'extrémités $1-A$ et $1-B$.**
- **1 pt : reste**

b) Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \,]0,1[, \ -\dfrac{\ln(t)}{1-t} = \sum\limits_{k=0}^{n} \big(-t^k \ln(t)\big) + \dfrac{-t^{n+1} \ln(t)}{1-t}$.

- **1 pt :** $\sum\limits_{k=0}^{n} \big(-t^k \ln(t)\big) = -\ln(t) \ \dfrac{1-t^{n+1}}{1-t}$ **car** $t \neq 1$
- **1 pt : reste**

c) Démontrer que, pour tout k de $\mathbb{N}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 -t^k \ln(t) \, dt$ converge et :

$$\int_0^1 -t^k \ln(t) \, dt \ = \ \frac{1}{(k+1)^2}$$

- **1 pt : la fonction** $t \mapsto -t^k \ln(t)$ **est continue sur** $]0,1]$
- **1 pt : Cette IPP est valide car les fonctions** u **et** v **sont de classe** $\mathcal{C}^1$ **sur le** `SEGMENT` $[A,1]$**.**
- **1 pt :** $\displaystyle\int_A^1 -t^k \ln(t) \, dt = \frac{1}{k+1} \ A^{k+1} \ln(A) + \frac{1}{(k+1)^2} \Big(1 - A^{k+1}\Big)$
- **1 pt :** $\lim\limits_{A \to 0} A^{k+1} \ln(A) = 0$ **par croissances comparées**

d) Démontrer que la fonction $t \mapsto \dfrac{-t \ln(t)}{1-t}$ est bornée sur $]0,1[$.
(On pourra commencer par calculer les limites en 0 *et en* 1*)*

En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{-t^{n+1} \ln(t)}{1-t} \, dt$ converge puis démontrer :

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 \frac{-t^{n+1} \ln(t)}{1-t} \, dt \ = \ 0$$

- **4 pts :** $t \mapsto -\dfrac{t \ln(t)}{1-t}$ **bornée sur** $[0,1]$
  - × **1 pt :** $\lim\limits_{t \to 0} \ -\dfrac{t \ln(t)}{1-t} = 0$
  - × **1 pt :** $\lim\limits_{t \to 1} \ -\dfrac{t \ln(t)}{1-t} = 1$
  - × **1 pt :** g **prolongeable par continuité en** 0 **et en** 1 **et continue sur** $]0,1[$
  - × **1 pt :** $\tilde{g}$**, prologement par continuité de** g **sur** $[0,1]$ **est continue sur le segment** $[0,1]$**. Elle est donc bornée.**
- **1 pt :** $\forall t \in \,]0,1[, \ 0 < -\dfrac{t^{n+1} \ln(t)}{1-t}$
- **1 pt :** $\forall t \in \,]0,1[, \ -\dfrac{t^{n+1} \ln(t)}{1-t} \leqslant M \, t^n$
- **1 pt :** $\displaystyle\int_0^1 t^n \, dt$ **est bien définie car la fonction** $t \mapsto t^n$ **est continue sur le segment** $[0,1]$
- **1 pt : par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant** $(0 < 1)$
- **1 pt :** $\displaystyle\int_0^1 M \, t^n \, dt = \frac{M}{n+1}$
- **1 pt : théorème d'encadrement**

e) À l'aide de la question ***7.b)***, montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{-\ln(t)}{1-t}\,dt$ converge puis que l'on a :

$$\int_0^1 \frac{-\ln(t)}{1-t}\,dt \;=\; \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \;=\; \frac{\pi^2}{6}$$

- **1 pt : d'après *7.c)*, pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 -t^k \ln(t)\,dt$ est convergente, et d'après *7.d)*, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{-t^{n+1}\ln(t)}{1-t}\,dt$ est convergente**
- **1 pt :** $\displaystyle\int_0^1 -\frac{\ln(t)}{1-t}\,dt = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} + \int_0^1 \frac{-t^{n+1}\ln(t)}{1-t}\,dt$
- **1 pt : la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k^2}$ est une série de Riemann d'exposant 2 $(2>1)$. Elle est donc convergente**

f) En déduire que L est prolongeable par continuité en 1 en posant $L(1) = \dfrac{\pi^2}{6}$.

- **1 pt : La fonction L est prolongeable par continuité en 1 si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt$ est convergente. D'après la question *7.a)*, $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt$ est convergente si et seulement si $\displaystyle\int_0^1 \frac{-\ln(t)}{1-t}\,dt$ est convergente.**
- **1 pt : D'après la question *7.e)*, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{-\ln(t)}{1-t}\,dt$ est convergente**
- **1 pt : d'après *7.a)* et *7.e)*, $L(1) = \dfrac{\pi^2}{6}$**

On note encore L la fonction ainsi prolongée en 1.

8. *a)* Justifier que la fonction $x \mapsto L(x) + L(-x) - \dfrac{1}{2}\,L(x^2)$ est dérivable sur $]-1,0[$ et sur $]0,1[$ et calculer sa dérivée sur ces intervalles.

- **1 pt : $\varphi : x \mapsto L(x) + L(-x) - \dfrac{1}{2}\,L(x^2)$ dérivable sur $]-1,0[$ et sur $]0,1[$**
- **1 pt : $\forall x \in\,]-1,0[\, \cup\,]0,1[$, $\varphi'(x) = 0$**

b) En déduire : $\forall x \in [-1,1]$, $L(x) + L(-x) = \dfrac{1}{2}\,L(x^2)$.

- **1 pt : il existe $(c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\varphi : x \mapsto \begin{cases} c_1 & \textbf{si } x \in\,]-1,0[\\ c_2 & \textbf{si } x \in\,]0,1[\end{cases}$**
- **1 pt : φ est continue en 0**
- **1 pt : $\forall x \in\,]-1,1[$, $\varphi(x) = \varphi(0) = 0$**
- **1 pt : φ prolongeable par continuité en -1 et en 1 car L est prolongeable par continuité en 1**

c) Préciser alors la valeur de $L(-1)$.

- **1 pt : $L(-1) = -\dfrac{\pi^2}{12}$**

Partie C

On considère enfin la fonction Φ définie sur l'ouvert $]-\infty, 0[^2$ par :

$$\Phi : (x,y) \mapsto L(x) + L(y) - L(-xy)$$

On admet que la fonction Φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]-\infty, 0[^2$.

9. a) Calculer, pour tout (x,y) de $]-\infty, 0[^2$, les dérivées partielles d'ordre 1 de Φ au point (x,y).

- **1 pt : Φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]-\infty, 0[^2$. Elle admet donc des dérivées partielles d'ordre 1 sur cet ouvert.**
- **1 pt :** $\partial_1(\Phi) : (x,y) \mapsto f(x) + y\, f(-xy)$
- **1 pt :** $\partial_2(\Phi) : (x,y) \mapsto f(y) + x\, f(-xy)$

b) En déduire que Φ admet $(-1,-1)$ comme unique point critique.

- **1 pt : (x,y) point critique de Φ** $\Leftrightarrow \nabla(\Phi)(x,y) = 0_{\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})}$
- **1 pt : (x,y) point critique de Φ** $\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} -\ln(1-x) + \ln(1+xy) & = & 0 \\ -\ln(1-y) + \ln(1+xy) & = & 0 \end{array} \right.$
- **1 pt : injectivité de $\ln$ sur $]0, +\infty[$**
- **1 pt : fin de la résolution**
  0 pt si pas de précision de $x \neq 0$

10. a) Montrer que la matrice hessienne, notée H, de Φ au point $(-1,-1)$ est : $H = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

- **2 pts : pour tout $(x,y) \in\,]-\infty, 0[^2$,**

$$\begin{array}{rcl} \partial^2_{1,1}(\Phi)(x,y) & = & f'(x) - y^2\, f'(-xy) \\ \partial^2_{2,1}(\Phi)(x,y) & = & \partial^2_{1,2}(\Phi)(x,y) \;=\; f(-xy) - xy\, f'(-xy) \\ \partial^2_{2,2}(\Phi)(x,y) & = & f'(y) - x^2\, f'(-xy) \end{array}$$

- **1 pt :** $\partial^2_{1,1}(\Phi)(-1,-1) = \partial^2_{2,2}(\Phi)(-1,-1) = 0$
- **1 pt :** $\partial^2_{2,1}(\Phi)(-1,-1) = \partial^2_{1,2}(\Phi)(-1,-1) = \dfrac{1}{2}$

b) Déterminer les valeurs propres de H.

- **1 pt :** $\det(H - \lambda\, I_2) = \left(\lambda - \dfrac{1}{2}\right)\left(\lambda + \dfrac{1}{2}\right)$
- **1 pt :** $\mathrm{Sp}(H) = \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$

11. La fonction Φ présente-t-elle un extremum local sur $]-\infty, 0[^2$?

- **1 pt : Tout extremum local de Φ sur $]-\infty, 0[^2$ est un point critique de Φ sur cet ouvert.**
- **1 pt : $(-1,-1)$ n'est pas un extremum local de Φ sur $]-\infty, 0[^2$ (c'est un point col)**
- **1 pt : la fonction Φ n'admet donc aucun extremum local sur $]-\infty, 0[^2$**

Problème /80

On désigne par λ, un réel strictement positif et on considère la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$, par :

$$f : x \mapsto \lambda\,|x|\ \mathrm{e}^{-\lambda\,x^2}$$

1. a) Montrer que f est paire.

- **1 pt :** $-x \in \mathbb{R}$
- **1 pt :** $f(-x) = f(x)$

b) Établir que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\ dx$ converge et donner sa valeur.

- **1 pt : f est continue sur** $[0, +\infty[$
- **1 pt :** $\displaystyle\int_0^A f(x)\ dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ \mathrm{e}^{-\lambda\,A^2}$
- **1 pt :** $\lim\limits_{A \to +\infty} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ \mathrm{e}^{-\lambda A^2} = \frac{1}{2}$

0 si le calcul n'est pas effectué sur un segment

c) Montrer que la fonction f peut être considérée comme densité d'une variable aléatoire X que l'on suppose, dans la suite, définie sur un certain espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

- **2 pts : f est continue sur $\mathbb{R}$ (détails de la composition)**
- **1 pt :** $\forall x \in \mathbb{R}$**,** $f(x) \geqslant 0$
- **2 pts : f est paire donc** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ dx$ **converge et :** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ dx = 2 \int_0^{+\infty} f(x)\ dx = 1$

2. a) Justifier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\,f(x)\ dx$.

- **1 pt :** $x \mapsto xf(x)$ **est continue sur** $[0, +\infty[$
- **4 pts : convergence de** $\displaystyle\int_1^{+\infty} x\,f(x)\ dx$ **:**
  - × **1 pt :** $\forall x \in [1, +\infty[$**,** $x\,f(x) \geqslant 0$
  - × **2 pts :** $xf(x) \underset{x \to +\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ **par croissances comparées**
  - × **1 pt :** $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\ dx$ **converge par critère de Riemann**

  -1 si critère de négligeabilité non cité
- **1 pt :** $\displaystyle\int_0^1 x\,f(x)\ dx$ **convergente car** $x \mapsto x\,f(x)$ **continue sur le segment** $[0, 1]$

b) En déduire que la variable aléatoire X possède une espérance, notée $\mathbb{E}(X)$, et donner sa valeur.

- **1 pt : X admet une espérance ssi** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\ dx$ **converge absolument ce qui revient à montrer la convergence de l'intégrale** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\ dx$
- **1 pt :** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\ dx$ **converge car** $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\,f(x)\ dx$ **converge et** $x \mapsto x\,f(x)$ **est impaire**
- **1 pt :** $\mathbb{E}(X) = 0$

3. ***a)*** Montrer, grâce à une intégration par parties, que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2\, f(x)\, dx$ converge et donner sa valeur.

- **1 pt :** $x \mapsto x^2 f(x)$ **est continue sur** $[0, +\infty[$
- **1 pt : se placer sur un segment** $[0, B]$
- **1 pt : les fonctions** $u : x \mapsto x^2$ **et** $v : x \mapsto -\dfrac{1}{2}\, \mathrm{e}^{-\lambda\, x^2}$ **sont** $\mathcal{C}^1$ **sur** $[0, B]$
- **1 pt :** $\displaystyle\int_0^B x^2\, f(x)\, dx = -\frac{B^2}{2}\, \mathrm{e}^{-\lambda\, B^2} + \int_0^B x\, \mathrm{e}^{-\lambda\, x^2}\, dx$
- **1 pt :** $\displaystyle\lim_{B \to +\infty} -\frac{B^2}{2}\, \mathrm{e}^{-\lambda\, B^2} = 0$ **par croissances comparées**
- **1 pt :** $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\, e^{-\lambda x^2}\, dx = \frac{1}{\lambda} \int_0^{+\infty} f(x)\, dx = \frac{1}{2\,\lambda}$

b) En déduire que la variable aléatoire X possède une variance, notée $\mathbb{V}(X)$, et donner sa valeur.

- **1 pt :** X **admet une variance ssi** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\, dx$ **converge absolument ce qui revient à montrer la convergence de l'intégrale** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\, dx$
- **1 pt :** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\, dx$ **converge car** $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2\, f(x)\, dx$ **converge et** $x \mapsto x^2\, f(x)$ **est paire**
- **1 pt :** $\displaystyle\mathbb{E}(X^2) = 2 \int_0^{+\infty} x^2\, f(x)\, dx = \frac{1}{\lambda}$
- **1 pt :** $\mathbb{V}(X) = \dfrac{1}{\lambda}$ **d'après la formule de Koenig-Huyghens**

4. On pose $Y = X^2$ et on admet que Y est une variable aléatoire à densité, elle aussi définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

a) Donner l'expression de la fonction de répartition F_Y de la variable aléatoire Y à l'aide de la fonction de répartition F_X de la variable aléatoire X.

- **1 pt :** $Y(\Omega) \subset [0, +\infty[$
- **1 pt : si** $x < 0$**, alors** $F_Y(x) = 0$
- **2 pt : si** $x \geqslant 0$**, alors** $F_Y(x) = F_X(\sqrt{x}) - F_X(-\sqrt{x})$

b) Déterminer une densité f_Y de Y, puis vérifier que Y suit la loi exponentielle de paramètre λ.

- **1 pt : pour tout** $x < 0$**,** $f_Y(x) = 0$
- **3 pts : pour tout** $y > 0$**,** $f_Y(y) = \lambda\, \mathrm{e}^{-\lambda\, y}$ **(dont 1 pt pour la dérivation des composées)**
- **1 pt : choix d'une valeur positive pour** $f_Y(0)$

c) Retrouver alors sans calcul la valeur de $\mathbb{V}(X)$.

- **1 pt :** Y **suit une loi exponentielle de paramètre** λ**, donc** $\mathbb{E}(Y) = \dfrac{1}{\lambda}$
- **1 pt :** $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) = \mathbb{E}(Y)$ **d'après la formule de Koenig-Huyghens**

5. Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0, 1[$.

a) On pose $W = -\dfrac{1}{\lambda} \ln(1-U)$ et on admet que W est une variable aléatoire.
Déterminer la fonction de répartition de W et en déduire la loi suivie par la variable aléatoire W.

- **1 pt :** $W(\Omega) = [0, +\infty[$
- **1 pt : si** $x < 0$, $F_W(x) = 0$
- **4 pts : si** $x \geqslant 0$, $F_W(x) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}$
  - × **2 pts :** $F_W(x) = F_U\left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}\right)$
  - × **1 pt :** $1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} \in]0, 1[$
  - × **1 pt :** $F_W(x) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}$
- **1 pt :** W **suit une loi exponentielle de paramètre** λ

b) En déduire une fonction **Python** dont l'en-tête est `def SimuVaX(lambda)` qui simule la v.a.r. $|X|$.
Vérifier que la probabilité que X prenne des valeurs positives est égale à la probabilité que X prenne des valeurs négatives.
En déduire une fonction **Python**, utilisant `rd.random()`, dont l'en-tête est `def SimuX(lambda)` qui simule la v.a.r. X.

- **3 pts : fonction** `SimuVaX` **(1 pt par ligne entre** 4 **et** 6**)**

```
1  import random as rd
2  import numpy as np
3  def SimuVaX(lambda) :
4      U = rd.random()
5      Y = (-1 / lambda) * np.log(1-U)
6      AbsX = np.sqrt(Y)
7      return AbsX
```

- **1 pt :** $\mathbb{P}([X \leqslant 0]) = \mathbb{P}([X \geqslant 0])$ **car** f **paire**
- **1 pt :** $\mathbb{P}([X \leqslant 0]) = \dfrac{1}{2}$ **car** $([X \leqslant 0], [X > 0])$ **est un SCE**
- **4 pts : fonction** `SimuX`
  - × **2 pts : lignes** 2 **et** 3
  - × **2 pts : structure conditionnelle**

```
1  def SimuX(lambda) :
2      r = rd.random()
3      if r <= 1/2 :
4          T = -1
5      else :
6          T = 1
7      AbsX = SimuVaX(lambda)
8      X = T * AbsX
9      return X
```

On suppose, dans la suite, que le paramètre λ est inconnu et on souhaite l'estimer en utilisant la loi de Y.
On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et on considère n v.a.r. $Y_1, \ldots, Y_n$, supposées définies sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. On suppose qu'elles sont indépendantes et de même loi que Y.

6. On considère des réels $x_1, \ldots, x_n$ strictement positifs, ainsi que la fonction L, à valeurs dans $\mathbb{R}$, définie sur $]0,+\infty[$ par : $\forall \lambda \in]0,+\infty[$, $L(\lambda) = \prod\limits_{k=1}^{n} f_Y(x_k)$.

a) Exprimer $L(\lambda)$, puis $\ln\big(L(\lambda)\big)$ en fonction de λ, $x_1, \ldots, x_n$.

- **2 pts :** $L(\lambda) = \lambda^n \exp\left(-\lambda \sum\limits_{k=1}^{n} x_k\right)$
- **1 pt :** $\ln\big(L(\lambda)\big) = n \ln(\lambda) - \lambda \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$**.**

b) On considère la fonction φ, définie pour tout réel λ de $]0,+\infty[$ par : $\varphi(\lambda) = n \ln(\lambda) - \lambda \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$.
Montrer que la fonction φ admet un maximum, atteint en un seul réel que l'on notera z et que l'on exprimera en fonction de $x_1, \ldots, x_n$.
Que peut-on dire de z pour la fonction L ?

- **1 pt :** φ **est dérivable sur** $]0,+\infty[$
- **1 pt :** $\varphi'(\lambda) = \dfrac{n}{\lambda} - \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$
- **2 pts :** φ **admet un unique maximum en** $z = \dfrac{n}{\sum\limits_{k=1}^{n} x_k}$
- **2 pts :** z **est l'unique maximum de la fonction** L**, par stricte croissance de la fonction exponentielle**

7. On pose dorénavant, toujours avec n supérieur ou égal à 2 , $Z_n = \dfrac{n}{\sum\limits_{k=1}^{n} Y_k}$.
On admet que Z_n est une variable aléatoire définie, elle aussi, sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.
La suite $(Z_n)_{n\geqslant 2}$ est appelée estimateur du maximum de vraisemblance pour λ.

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la v.a.r. S_n par : $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} Y_k$.
On admet le résultat suivant :
Soient X et Y deux v.a.r. à densité indépendantes définies sur le même espace probabilisé, de densités respectives f_X et f_Y telles que f_X et f_Y soient bornées.
Alors la v.a.r. $X+Y$ est une v.a.r. à densité et une densité de $X+Y$ est donnée par la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\, f_Y(x-t)\ dt$$

En utilisant la propriété admise, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la v.a.r. S_n est une v.a.r. à densité et admet pour densité la fonction f_n définie par :

$$f_n : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\[2mm] \dfrac{\lambda^n}{(n-1)!}\ t^{n-1} e^{-\lambda t} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$$

- **1 pt : initialisation**
- **6 pts : hérédité**
  - × **1 pt :** S_n **et** X_{n+1} **indépendantes par lemme des coalitions**
  - × **1 pt : caractère borné des densités**

  × **1 pt : cas $t < 0$**
  × **3 pts : cas $t \geqslant 0$**
    - 2 pts : réduction de l'intervalle d'intégration
    - 1 pt : reste du calcul

b) Soit $n \geqslant 2$. En remarquant que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_{n-1}(t)\ dt = 1$, montrer que Z_n possède une espérance et : $\mathbb{E}(Z_n) = \dfrac{n}{n-1}\ \lambda$.

- **1 pt : Z_n admet une espérance ssi $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{n}{t}\ f_n(t)\ dt$ est absolument convergente d'après le théorème de transfert**
- **1 pt : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{n}{t}\ f_n(t)\ dt = \int_0^{+\infty} \frac{n}{t}\ f_n(t)\ dt$ car f_n nulle en dehors de $]0, +\infty[$**
- **1 pt : $\forall t \geqslant 0$, $\dfrac{1}{t}\ f_n(t) = \dfrac{\lambda}{n-1}\ f_{n-1}(t)$**
- **1 pt : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_{n-1}(t)\ dt = 1$**

c) **Seulement pour les cubes** : Déterminer un estimateur Z'_n , fonction simple de Z_n qui soit un estimateur sans biais de λ.

- **2 pts : $Z'_n = \dfrac{n-1}{n}\ Z_n$ convient**
  × **1 pt : Z'_n est un estimateur de λ**
  × **1 pt : Z'_n est sans biais**