DS7 (version A)

Exercice 1

On note E l'espace vectoriel des fonctions polynomiales réelles de degré inférieur ou égal à 2.
On note e_0, e_1, e_2 les fonctions définies, pour tout réel x par :

$$e_0(x) = 1, \quad e_1(x) = x \quad \text{et} \quad e_2(x) = x^2$$

et on rappelle que $\mathscr{B} = (e_0, e_1, e_2)$ est une base de E.
Soit f l'application qui à toute fonction polynomiale P de E associe la fonction $Q = f(P)$, où Q est la dérivée seconde de l'application qui à tout réel x associe $(x^2 - x)P(x)$.

1. ***a)*** Montrer que f est un endomorphisme de E.

b) Déterminer $f(e_0)$, $f(e_1)$ et $f(e_2)$ en fonction de e_0, e_1 et e_2.

c) En déduire que la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$ est $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 6 & -6 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$.

d) Montrer sans calcul que f est un automorphisme de E.

2. ***a)*** Donner les valeurs propres de f, puis en déduire que f est diagonalisable.

b) Déterminer les sous-espaces propres de f.

3. ***a)*** Justifier l'existence d'une matrice P inversible dont la première ligne ne contient que des « 1 » telle que $A = PDP^{-1}$, où $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$.

b) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.

4. ***a)*** Déterminer la matrice P^{-1}.

b) En déduire explicitement, en fonction de n, la matrice A^n.

c) On dit qu'une suite de matrices (M_n) tend vers la matrice M, lorsque n tend vers $+\infty$, si chaque coefficient de M_n tend vers le coefficient situé à la même place dans M.
On pose $B = \dfrac{1}{12} A$. Montrer que la suite (B^n) tend vers une matrice J vérifiant $J^2 = J$.

Exercice 2

Partie A

On considère l'application f définie sur $]-\infty,1[$ par :

$$f : t \mapsto \begin{cases} -\dfrac{\ln(1-t)}{t} & \text{si } t \in \,]-\infty,0[\, \cup \,]0,1[\\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $]-\infty,1[$.

2. ***a)*** Démontrer : $\forall t \in \,]-\infty,1[,\ \dfrac{t}{1-t} + \ln(1-t) \geqslant 0$.

b) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]-\infty,0[$ et sur $]0,1[$ et déterminer f' sur ces intervalles.

c) En déduire la monotonie de f sur $]-\infty,1[$.

3. ***a)*** Donner le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $t \mapsto \ln(1-t)$.

b) Montrer que f est dérivable en 0 et : $f'(0) = \dfrac{1}{2}$.

c) Montrer enfin que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty,1[$.

4. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en 1.

5. Tracer l'allure de la courbe représentative de f dans un repère orthonormé en faisant apparaître la tangente en 0.

Partie B

On considère maintenant la fonction L définie sur $]-\infty,1[$ par :

$$L : x \mapsto \int_0^x f(t)\ dt$$

On rappelle que la série $\sum\limits_{k \geqslant 1} \dfrac{1}{k^2}$ converge et on admet : $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{k^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$.

6. Justifier que L est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty,1[$ et préciser L' sur $]-\infty,1[$.

7. **Étude de L en 1 :**

a) Démontrer, à l'aide d'un changement de variable :

$$\forall (A,B) \in \,]0,1[^2, \quad \int_A^B f(t)\ dt \ = \ \int_{1-B}^{1-A} \frac{-\ln(t)}{1-t}\ dt$$

b) Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in \,]0,1[,\ -\dfrac{\ln(t)}{1-t} = \sum\limits_{k=0}^{n} \big(-t^k \ln(t)\big) + \dfrac{-t^{n+1}\ln(t)}{1-t}$.

c) Démontrer que, pour tout k de $\mathbb{N}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 -t^k \ln(t)\ dt$ converge et :

$$\int_0^1 -t^k \ln(t)\ dt \ = \ \frac{1}{(k+1)^2}$$

d) Démontrer que la fonction $t \mapsto \dfrac{-t\ \ln(t)}{1-t}$ est bornée sur $]0,1[$.
(On pourra commencer par calculer les limites en 0 *et en* 1*)*

En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{-t^{n+1}\ \ln(t)}{1-t}\ dt$ converge puis démontrer :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{-t^{n+1}\ \ln(t)}{1-t}\ dt \ = \ 0$$

e) À l'aide de la question ***7.b)***, montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{-\ln(t)}{1-t}\ dt$ converge puis que l'on a :

$$\int_0^1 \frac{-\ln(t)}{1-t}\ dt \ = \ \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \ = \ \frac{\pi^2}{6}$$

f) En déduire que L est prolongeable par continuité en 1 en posant $L(1) = \dfrac{\pi^2}{6}$.

On note encore L la fonction ainsi prolongée en 1.

8. ***a)*** Justifier que la fonction $x \mapsto L(x) + L(-x) - \dfrac{1}{2}\ L(x^2)$ est dérivable sur $]-1,0[$ et sur $]0,1[$ et calculer sa dérivée sur ces intervalles.

b) En déduire : $\forall x \in [-1,1]$, $L(x) + L(-x) = \dfrac{1}{2}\ L(x^2)$.

c) Préciser alors la valeur de $L(-1)$.

Partie C

On considère enfin la fonction Φ définie sur l'ouvert $]-\infty,0[^2$ par :

$$\Phi : (x,y) \mapsto L(x) + L(y) - L(-xy)$$

On admet que la fonction Φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]-\infty,0[^2$.

9. ***a)*** Calculer, pour tout (x,y) de $]-\infty,0[^2$, les dérivées partielles d'ordre 1 de Φ au point (x,y).

b) En déduire que Φ admet $(-1,-1)$ comme unique point critique.

10. ***a)*** Montrer que la matrice hessienne, notée H, de Φ au point $(-1,-1)$ est : $H = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

b) Déterminer les valeurs propres de H.

11. La fonction Φ présente-t-elle un extremum local sur $]-\infty,0[^2$?

Problème

On désigne par λ, un réel strictement positif et on considère la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$, par :

$$f : x \mapsto \lambda\,|x|\ \mathrm{e}^{-\lambda\,x^2}$$

1. ***a)*** Montrer que f est paire.

b) Établir que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\ dx$ converge et donner sa valeur.

c) Montrer que la fonction f peut être considérée comme densité d'une variable aléatoire X que l'on suppose, dans la suite, définie sur un certain espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

2. ***a)*** Justifier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\,f(x)\ dx$.

b) En déduire que la variable aléatoire X possède une espérance, notée $\mathbb{E}(X)$, et donner sa valeur.

3. ***a)*** Montrer, grâce à une intégration par parties, que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2\,f(x)\ dx$ converge et donner sa valeur.

b) En déduire que la variable aléatoire X possède une variance, notée $\mathbb{V}(X)$, et donner sa valeur.

4. On pose $Y = X^2$ et on admet que Y est une variable aléatoire à densité, elle aussi définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

a) Donner l'expression de la fonction de répartition F_Y de la variable aléatoire Y à l'aide de la fonction de répartition F_X de la variable aléatoire X.

b) Déterminer une densité f_Y de Y, puis vérifier que Y suit la loi exponentielle de paramètre λ.

c) Retrouver alors sans calcul la valeur de $\mathbb{V}(X)$.

5. Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0, 1[$.

a) On pose $W = -\dfrac{1}{\lambda}\ \ln(1-U)$ et on admet que W est une variable aléatoire.
Déterminer la fonction de répartition de W et en déduire la loi suivie par la variable aléatoire W.

b) En déduire une fonction **Python** dont l'en-tête est `def SimuVaX(lambda)` qui simule la v.a.r. $|X|$.
Vérifier que la probabilité que X prenne des valeurs positives est égale à la probabilité que X prenne des valeurs négatives.
En déduire une fonction **Python**, utilisant `rd.random()`, dont l'en-tête est `def SimuX(lambda)` qui simule la v.a.r. X.

On suppose, dans la suite, que le paramètre λ est inconnu et on souhaite l'estimer en utilisant la loi de Y.
On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et on considère n v.a.r. $Y_1, \ldots, Y_n$, supposées définies sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. On suppose qu'elles sont indépendantes et de même loi que Y.

6. On considère des réels $x_1, \ldots, x_n$ strictement positifs, ainsi que la fonction L, à valeurs dans $\mathbb{R}$, définie sur $]0,+\infty[$ par : $\forall \lambda \in]0,+\infty[$, $L(\lambda) = \prod\limits_{k=1}^{n} f_Y(x_k)$.

a) Exprimer $L(\lambda)$, puis $\ln\big(L(\lambda)\big)$ en fonction de λ, $x_1, \ldots, x_n$.

b) On considère la fonction φ, définie pour tout réel λ de $]0,+\infty[$ par : $\varphi(\lambda) = n\,\ln(\lambda) - \lambda \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$.
Montrer que la fonction φ admet un maximum, atteint en un seul réel que l'on notera z et que l'on exprimera en fonction de $x_1, \ldots, x_n$.
Que peut-on dire de z pour la fonction L ?

7. On pose dorénavant, toujours avec n supérieur ou égal à 2 , $Z_n = \dfrac{n}{\sum\limits_{k=1}^{n} Y_k}$.
On admet que Z_n est une variable aléatoire définie, elle aussi, sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.
La suite $(Z_n)_{n\geqslant 2}$ est appelée estimateur du maximum de vraisemblance pour λ.

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la v.a.r. S_n par : $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} Y_k$.
On admet le résultat suivant :
Soient X et Y deux v.a.r. à densité indépendantes définies sur le même espace probabilisé, de densités respectives f_X et f_Y telles que f_X et f_Y soient bornées.
Alors la v.a.r. $X+Y$ est une v.a.r. à densité et une densité de $X+Y$ est donnée par la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\, f_Y(x-t)\, dt$$

En utilisant la propriété admise, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la v.a.r. S_n est une v.a.r. à densité et admet pour densité la fonction f_n définie par :

$$f_n : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \dfrac{\lambda^n}{(n-1)!}\, t^{n-1} \mathrm{e}^{-\lambda t} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$$

b) Soit $n \geqslant 2$. En remarquant que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_{n-1}(t)\, dt = 1$, montrer que Z_n possède une espérance et : $\mathbb{E}(Z_n) = \dfrac{n}{n-1}\,\lambda$.

c) **Seulement pour les cubes** : Déterminer un estimateur Z'_n , fonction simple de Z_n qui soit un estimateur sans biais de λ.